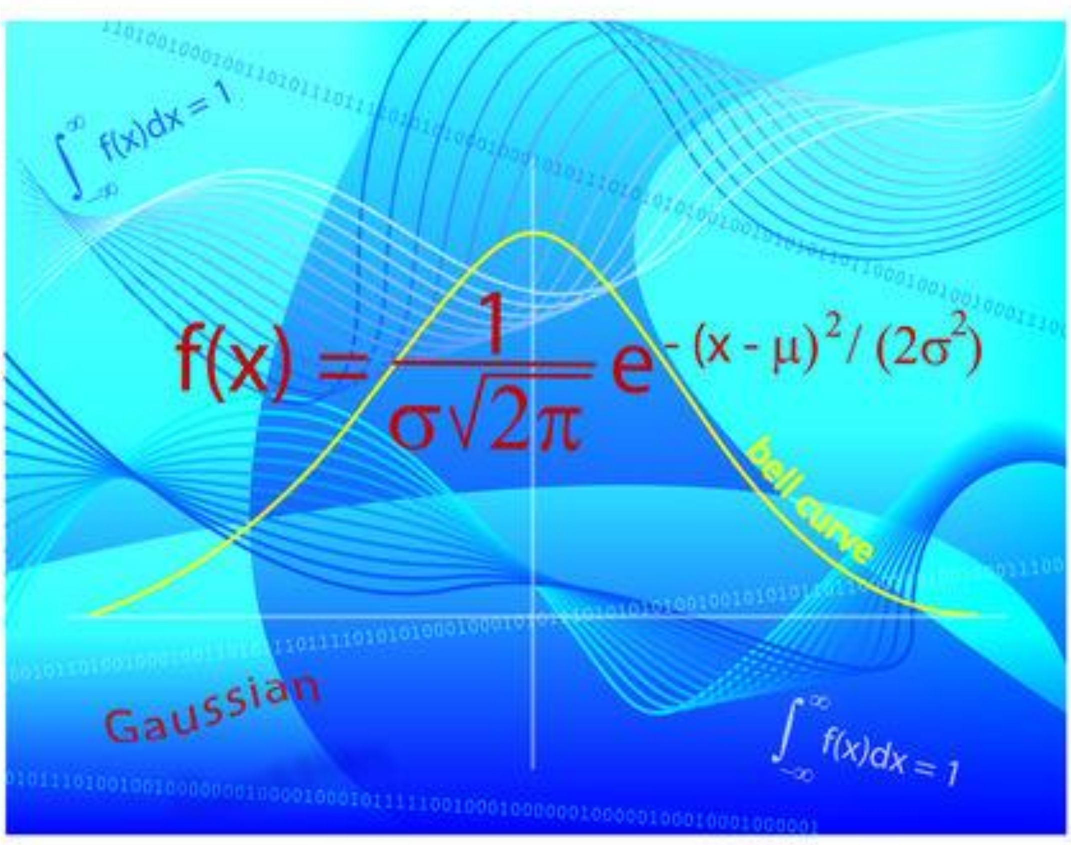
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ომარ ფურთუხია

ამოცანათა კრებული ალბათობის თეორიაში

(შემოკლებული ვარიანტი)



თსუ - 2013

სარჩევი

ალბათობის თეორია

თავი I

ალბათობის თეორიის ელემენტები

შემთხვევითი მოვლენის ცალკეულ შესაძლო შედეგს **ელემენტა-რული ხდომილება** ეწოდება, მათ ერთობლიობას – **ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე** და აღინიშნება Ω ასოთი: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.

თუ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე სასრულია, ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ მისი ელემენტები. იმ შემთხვევაში, რო-ცა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე დიდია ან უსასრულოა, მაშინ მოხერხებულია მისი ელემენტები აღიწეროს რაიმე თვისე-ბით (წესით). მაგალითად, თუ ექსპერიმენტის (დაკვირვების) შე-საძლო შედეგებია მსოფლიოს ის ქალაქები, რომელთა მოსახლეო-ბა მილიონს აღემატება, მაშინ შეასაბამისი ელემენტარულ ხდომი-ლებათა სივრცე ჩაიწერება შემდეგნაირად:

Ω={x : x არის ქალაქი, რომლის მოსახლეობა 1000000-ზე მეტია}.

ანალოგიურად, თუ ჩვენ შემთხვევით ვირჩევთ წერტილს 3 რადიუსის მქონე წრიდან ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, მაშინ:

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 9\}.$$

აღსანიშნავია, რომ ერთი და იგივე ექსპერიმენტი შეიძლება აღიწეროს სხვადასხვა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცით იმის მიხედვით, თუ რითი ინტრესდება ექსპერიმენტატორი. მაგა-ლითად, კამათლის გაგორებისას, თუ ჩვენ გვაინტერესებს რომე-ლი რიცხვი გამოჩნდება მის ზედა წახნაგზე, მაშინ $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, ხოლო თუ ჩვენ გვაინტერესებს ეს რიცხვი კენ-ტია თუ ლუწი, მაშინ $\Omega_2 = \{$კენტი, ლუწი$\}$. ამ შემთხვევაში Ω_1 შე-იცავს მეტ ინფორმაციას ვიდრე Ω_2. მაგ.: თუ ჩვენ ვიცით Ω_1-ის რომელი ელემენტი მოხდა, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ Ω_2-ის რო-მელ ელემენტარულ ხდომილებას ჰქონდა ადგილი, მაგრამ, პირი-ქით, ეს შეუძლებელია. სასურველია, საზოგადოდ, ვისარგებლოთ

ექსპერიმენტთან დაკავშირებული მაქსიმალური ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცით.

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ ჩვენ შემთხვევით ვარჩევთ ქარხნის მიერ გამოშვებულ სამ ნაწარმს და ვამოწმებთ თითოეულ მათგანს სტანდარტულია (ს) თუ წუნდებული (წ). მაშინ მაქსიმალური ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega_1 = \{\text{სსს}, \text{სსწ}, \text{სწს}, \text{წსს}, \text{სწწ}, \text{წსწ}, \text{წწს}, \text{წწწ}\}.$$

უფრო ნაკლები ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega_2 = \{0,1,2,3\},$$

რომელიც გვიჩვენებს, თუ არჩეული სამი ნაწარმიდან რამდენია სტანდარტული (ან წუნდებული).

სავარჯიშოები: **I.** მონეტის ერთხელ აგდებისას – Ω={გ, ს}; **II.** მონეტის ორჯერ აგდებისას, ან ორი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω={გგ, გს, სგ, სს}; **III.** მონეტის სამჯერ აგდებისას, ან სამი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω= {გგგ, გგს, გსგ, სგგ, გსს, სგს, სსგ, სსს}; **IV.** მონეტის n-ჯერ აგდებისას $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n), a_i = \text{გ}$ ან ს$\}$ და შედეგების საერთო რაოდენობა ტოლია 2^n-ის; **V.** ერთი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}; **VI.** ვთქვათ, თავიდან ვაგდებთ მონეტას. თუ მოვა გერბი, მაშინ ვაგორებთ სათამაშო კამათელს; ხოლო თუ მოვა საფასური, მაშინ კიდევ ერთჯერ ვაგდებთ მონეტას. ამ შემთხვევაში $\Omega = \{\text{გ}1, \text{გ}2, \text{გ}3, \text{გ}4, \text{გ}5, \text{გ}6, \text{სგ}, \text{სს}\}$; **VII.** ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={(1,1); (1,2); . . .; (1,6); (2,1); (2,2); . . . ; (2,6); . . . ; (6,1); . . . ; (6,6)} ანუ $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,\ldots,6\}$; **VIII.** პროდუქციის ვარგისინობის დადგენისას – Ω={„ვარგისი“, „უვარგისი“}; **IX.** სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რაოდენობა – Ω={0, 1, 2, . . . }; **X.** ძაბვა ქსელში – Ω={[0, 220]}.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს **ხდომილება** ეწოდება. თუ ექსპერიმენტის კონკრეტული შედეგი ეკუთვნის რაიმე ხდომილებას, მაშინ ამბობენ რომ ეს ხდომილება **მოხდა,** ხოლო რომელსაც არ ეკუთვნის – ის ხდომილება **არ მოხდა.** ხდომილებები აღინიშნება დიდი ლათინური

ასოებით: $A, B, C, D, \ldots$. ხდომილებას $A = \Omega$ უწოდებენ **აუცილე-ბელ ხდომილებას,** *ხოლო* Ø-ს – **შეუძლებელ ხდომილებას.** A და B ხდომილების **გაერთიანება** (ან **ჯამი)** ეწოდება ისეთ ხდო-მილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ამ ხდომილებებიდან ერ-თი მაინც ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \cup B$ (ან $A + B$). A და B ხდომილების **თანაკვეთა** (ან **ნამრავლი)** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ეს ხდომილებები ერთდროულად ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \cap B$ (ან AB). A ხდომილების **საწინააღმდეგო** ხდომილება ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A არ ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\overline{A}$. A და B ხდომილების **სხვაობა** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ხდე-ბა A, მაგრამ არ ხდება B და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \setminus B$. A და B ხდომილებას ეწოდება **უთავსებადი** თუ $A \cap B =$Ø.

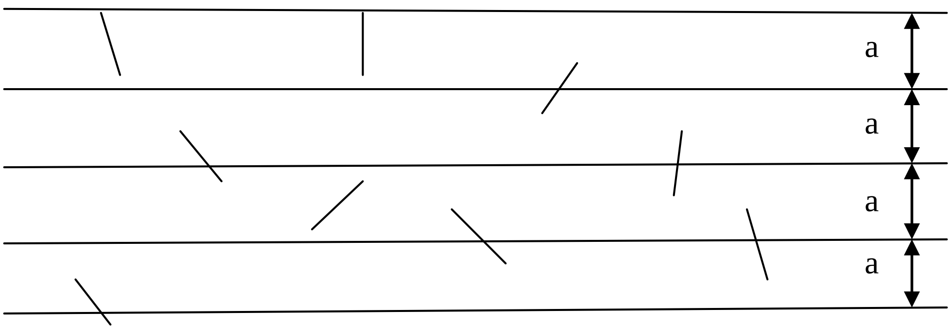
თუ Ω-ს ნებისმიერ ელემენტარულ ხდომილებას ω_i შეესაბა-მება გარკვეული რიცხვები $p_i = P(\omega_i)$, რომლებიც აკმაყოფი-ლებს პირობებს: $0 \le p_i \le 1$ და $\sum_i p_i = 1$, მაშინ ამ რიცხვებს ეწო-დებათ ω_i ელემენტარული ხდომილებების **ალბათობები.** $P(A) := \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$**.** თუ $P(\omega_i) = const$ და $|\Omega| < \infty$, ვღებულობთ **ალბათობის კლასიკურ განმარტებას:** $P(A) = |A| / |\Omega|$.

ხდომილების **სტატისტიკურ ალბათობად** ითვლება ამ ხდო-მილების ფარდობითი სიხშირე $W_N(A) = M / N$ (სადაც N – ცდათა საერთო რიცხვია, M კი – A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი) ან მასთან ახლოს მყოფი რიცხვი (მათემატიკურად ზუსტი ფორმუ-ლირება ასეთია: $P(A) = \lim_{N \to \infty} W_N(A)$).

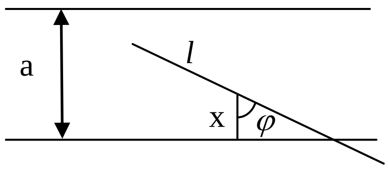
გეომეტრიული ალბათობა. თუ L მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ წერტილს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ აგდებული წერტილი დაეცემა $l \subset L$ მონაკვეთზე: $P = |l| / |L|$. ანალოგიური განმარტება გვაქვს სიბრტყეზე და სივრცეში.

მაგალითი 3 *(ბიუფონის ამოცანა).* სიბრტყე დაყოფილია თა-ნაბრად (a მანძილით) დაშორებული პარალელური წრფეებით და შემთხვევით აგდებენ l სიგრძის ($l < a$) ნემსს. როგორია ალ-ბათობა იმისა, რომ ნემსი გადაკვეთს ერთ-ერთს პარალელური წრფეებიდან.

ამოხსნა. ნემსის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება მისი ცენტრის დაშორებით x უახლოეს წრფემდე და კუთხით φ, რომელსაც ნემსი ადგენს წრფეთა პერპენდიკულართან. ცხადია, რომ $0 \le x \le a/2$ და $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

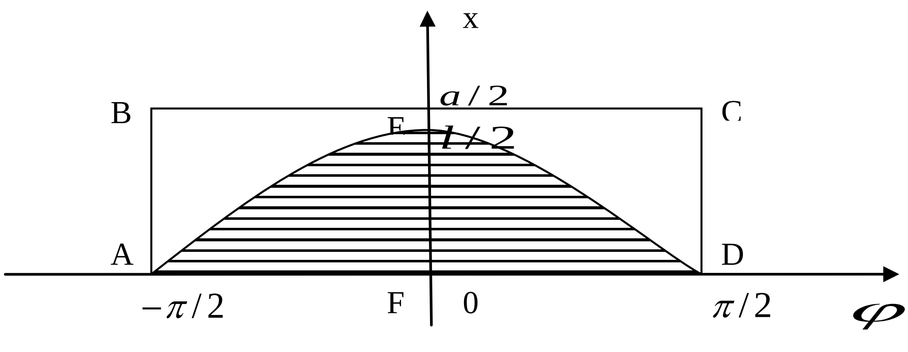


შემოვიღოთ ხდომილება: A={ნემსმა გადაკვეთა ერთ-ერთი წრფე}. ნემსის მიერ ერთ-ერთი წრფის გადაკვეთისას შესრულდება თანაფარდობა $x \le l\cos\varphi/2$.



ამ პირობას აკმაყოფილებს წერტილები, რომელთა (x,φ) კოორდინატები AED დაშტრიხულ არეშია (რომლის სიმაღლეა $EF = l/2$), ხოლო ნემსის ყველა შესაძლო მდგომარეობა ხასიათდება ABCD მართკუთხედით. შესაბამისად, ალბათობის გეომეტრიული განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A) = S_{AED} / S_{ABCD}.$$



ცხადია, რომ $S_{ABCD}=a\pi/2$, ხოლო დაშტრიხული არის ფართობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ფორმულით:

$$S_{AED}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{l}{2}\cos\varphi\, d\varphi=\frac{l}{2}\sin\varphi\,|_{-\pi/2}^{\pi/2}=l\,.$$

შესაბამისად, $P(A)=2l/a\pi$.

აქედან $\pi=2l/aP(A)$, რაც, თავის მხრივ, საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით გამოვთვალოთ π რიცხვის მნიშვნელობა: თუ ნემსს შემთხვევით დავაგდებთ სიბრტყეზე n-ჯერ და ის პარალელურ წრფეებს გადაკვეთავს m-ჯერ, მაშინ საკმაოდ დიდი n-სათვის $P(A)\approx m/n$ და, შესაბამისად, ვღებულობთ π რიცხვის გამოსათვლელ მიახლოებით გამოსახულებას $\pi\approx 2nl/am$.

მაგალითი 5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წესიერ სათამაშო კამათლის სამჯერ გაგორებისას მოსული ქულები ერთი და იგივეა?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება ისეთი დალაგებული (i,j,k) სამეულების ერთობლიობა, სადაც თითოეული კომპონენტი ღებულობს მნიშვნელობებს 1,2,...,6 ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ნამრავლის პრინციპის თანახმად (იხ. თავი II), ასეთი სამეულების რაოდენობა იქნება: $|\Omega|=6\cdot6\cdot6=216$. ვინაიდან სათამაშო კამათელი წესიერია, ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად მოსალოდნელია. ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება აღვნიშნოთ A სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $A=\{(1,1,1);(2,2,2);(3,3,3);(4,4,4);(5,5,5);(6,6,6\}$ და ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად ვპოულებთ, რომ საძიებელი ალბათობა იქნება $P(A)=6/216=1/36$.

მაგალითი 7. 20 სტუდენტიდან ნახევარი ქალია და ნახევარი ვაჟი. მათგან შემთხვევით ირჩევენ სტუდენტთა საბჭოს პრეზიდენტსა და ვიცე-პრეზიდენტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პრეზიდენტი გახდება ქალი, ხოლო ვიცე-პრეზიდენტი – ვაჟი?

ამოხსნა. ცხადია, რომ საქმე გვაქვს განმეორების გარეშე 20 ობიექტიდან 2 ობიექტის შერჩევასთან და როგორც ვიცით ეს შესაძლებელია $20\cdot19=380$ სხვადასხვანაირად. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სწორედ ამ 380 ერთნაირად შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილებისაგან. ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი, ნამრავლის პრინ-

ციპის თანახმად, იქნება $10 \cdot 10 = 100$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება $100/380 = 5/19$.

მაგალითი 9. 52 კარტიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 5 კარტს. **ა)** რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება „გული“; **ბ)** რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში იქნება k „გული“ $(k = 0,1,...,5)$; **გ)** „გულების“ რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი?

ამოხსნა. ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა იქნება C_{52}^5 (დალაგებებს ყურადღებას არ ვაქცევთ). **ა)** შემთხვევაში ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილების მისაღებად 5 კარტის არჩევა უნდა მოხდეს $52 - 13 = 39$ არა „გულიდან“ და რადგან ეს შესაძლებელია C_{39}^5 სხვადასხვანაირად, ამიტომ ვღებულობთ:

$$P\{\text{არა "გული"}\} = C_{39}^5 / C_{52}^5 \approx 0.22\,;$$

შენიშვნა. საძიებელი ალბათობა არ შეიცვლება თუ დალაგებას გავითვალისწინებთ, მაგრამ უნდა გავითვალისწინოთ როგორც ელემენტარული ხდომილებების საერთო რაოდენობაში, ისე ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობაშიც. ეს აიხსნება იმ გარემოებით, რომ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$A_m^k / A_n^k = C_m^k / C_n^k\,.$$

ბ) შემთხვევაში k „გული“ უნდა აირჩეს გულების საერთო რაოდენობიდან ანუ 13-დან. ეს შესაძლებელია C_{13}^k სხვადასხვანაირად. დანარჩენი $5-k$ კარტი უნდა აირჩეს დარჩენილი 39 კარტიდან, რაც შესაძლებელია C_{39}^{5-k} სხვადასხვანაირად. ნამრავლის პრინციპის თანახმად ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k}$ და საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$P\{k \text{ "გული"}\} = C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k} / C_{52}^5\,,\; k = 0,1,...,5\,.$$

გ) წინა პუნქტში მიღებული გამოსახულების გამოყენებით დავრწმუნდებით, რომ ყველაზე უფრო მოსალოდნელია 1 „გული“ ალბათობით 0.41.

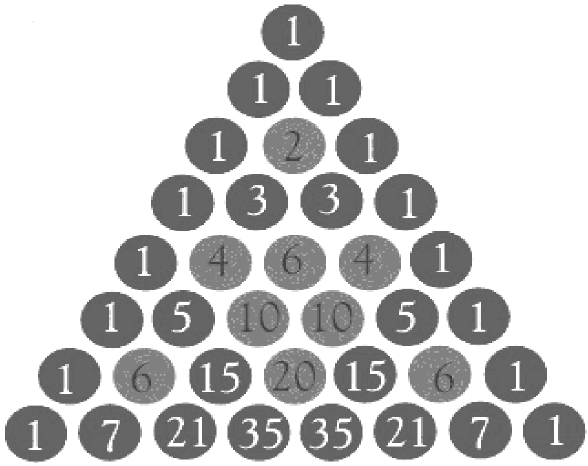
მაგალითი 11 (გალტონის დაფა). გვაქვს დაფაზე სამკუთხედის ფორმით დალაგებული რგოლები ისე, რომ წვეროში ერთი

რგოლია, მეორე რიგში წინასგან თანაბრ მანძილებზე ორი რგოლი, მესამე რიგში ზედა ორი რგოლიდან თანაბარ მანძილებზე სამი რგოლი და ა.შ. ბოლოში არის ექვსი რგოლი. მე-7 რიგში კი არის ბოლო 6 რგოლიდან თანაბარ მანძილებზე 7 ღრმული. ზედა რგოლზე აგდებენ ბურთს და მას შეუძლია იგორაოს თანაბარი ალბათობით ან მარჯვნივ, ან მარცხნივ რგოლიდან რგოლზე, რაც საბოლოოდ სრულდება რომელიმე ღრმულში ჩავარდნით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ბურთი ჩავარდება მეხუთე ღრმულში?

●
o
o o
o o o
o o o o
o o o o o
o o o o o o
U U U U U U U
1 2 3 4 5 6 7

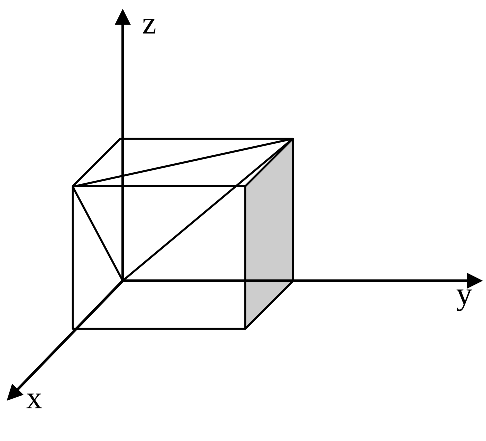
ამოხსნა. როგორც ვხედავთ არსებობს პირველ და მე-7 ღრმულებში ბურთის ჩავარდნის ერთადერთი გზა (ტრაექტორია), მეორე და მე-6 ღრმულებში ბურთის ჩავარდნის – ექვს-ექვსი გზა, მესამე და მეხუთე ღრმულებში – თხუთმეტ-თხუთმეტი გზა და, ბოლოს, მეოთხე ღრმულში – ბურთის ჩავარდნის 20 გზა. გზების (შედეგების) სრული რაოდენობაა 1+6+15+20+15+6+1=64 და ყველა ეს შედეგი თანაბრად მოსალოდნელია, ვინაიდან თითოეული ტრაექტორიის გავლისას ბურთი განიცდის ექვს დაჯახებას რგოლებზე და ყოველი დაჯახებისას ის თანაბარი ალბათობებით გადაადგილდება ან მარჯვნივ, ან მარცხნივ. თანაბარალბათური 64 შედეგიდან მეხუთე ღრმულში ჩავარდნას ხელს უწყობს 15 შედეგი და, შესაბამისად, საძებნი ალბათობა იქნება 15/64.

ქვემოთ მოყვანილია გალტონის დაფაზე რგოლების 7 რიგის შემთხვევაში თითოეულ პოზიციაზე ბურთის მოხვედრის შესაძლო გზების რიცხვი.



მაგალითი 13. AB მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ სამ წერტილს C, D და M. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ AC, AD და AM მონაკვეთებისაგან შეიძლება აიგოს სამკუთხედი?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ AC, AD და AM მონაკვეთების სიგრძეები შესაბამისად x, y და z -ით და ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის როლში განვიხილოთ სივრცის წერტილთა სიმრავლე კოორდინატებით (x, y, z). თუ ჩავთვლით, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე ტოლია 1-ის, მაშინ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება კუბი, რომლის წიბოა ერთი. ამავე დროს, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე (სამკუთხედის აქსიომის თანახმად) შედგება იმ წერტილებისაგან, რომელთა კოორდინატებისათვის სრულდება სამკუთხედის უტოლობები: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$. ეს კი წარმოადგენს კუბის ნაწილს, რომელიც მოჭრილია მისგან სიბრტყეებით: $x + y = z$, $x + z = y$, $y + z = x$ (ერთ-ერთი ამ სიბრტყიდან, კერძოდ $x + y = z$, მოყვანილია ნახაზზე).



ყოველი ასეთი სიბრტყე კუბიდან მოჭრის პირამიდას, რომლის მოცულობა ტოლია

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

შესაბამისად, კუბის დარჩენილი ნაწილის მოცულობა იქნება

$$|v|=1-3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა, განმარტების თანახმად, იქნება

$$|P|=\frac{|v|}{|V|}=\frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}.$$

ამოცანები

1. ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტები:

   ა) 1-დან 50-მდე მოთავსებული 7-ის ჯერადი მთელი რიცხვები;

   ბ) $\Omega=\{x: x^2+x-6=0\}$;

   გ) ერთდროულად აგდებენ სათამაშო კამათელს და მონეტას;

   დ) $\Omega=\{x: x$ არის კონტინენტი$\}$;

   ე) $\Omega=\{x: 2x-4=0$ და $x>5\}$.

3. რომელია ტოლი ქვემოთ ჩამოთვლილი ხდომილებებიდან?

   ა) $A=\{1,3\}$;

   ბ) $B=\{x: x$ არის კამათელზე მოსული ქულა$\}$;

   გ) $C=\{x: x^2-4x+3=0\}$;

   დ) $D=\{x: x$ არის გერბთა რიცხვი მონეტის 6-ჯერ აგდებისას$\}$.

5. თუ მონეტის აგდების შედეგად მოვიდა გერბი, მაშინ მას აგდებენ ხელმეორედ, ხოლო თუ პირველადი აგდებისას მოვიდა საფასური, მაშინ აგორებენ სათამაშო კამათელს. ა) ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტები; ბ) ჩამოთვალეთ A ხდომილების ელემენტები – სათამაშო კამათელზე მოვიდა 4-ზე ნაკლები ქულა; გ) ჩამოთვალეთ B ხდომილების ელემენტები – მოვიდა ორი საფასური.

7. შემთხვევით შეარჩიეს ოთხი პაციენტი და ინტერესდებიან მათი სქესით. ა) ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივ-

რცის ელემენტები (მამრობითი სქესი აღნიშნეთ სიმბოლოთი M, ხოლო მდედრობითი სქესი კი – F); ბ) განსაზღვრეთ მეორე ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცე, რომლის ელემენტებს წარმოადგენს მდედრობითი სქესის პაციენტთა რაოდენობა.

9. მოცემულია $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{0,2,4,6,8\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{2,3,4,5\}$ და $D=\{1,6,7\}$. ჩამოთვალეთ შემდეგი ხდომილებების ელემენტები: ა) $A\cup C$; ბ) $A\cap B$; გ) $\overline{C}$; დ) $(\overline{C}\cap D)\cup B$; ე) $\overline{(\Omega\cap C)}$; ვ) $A\cap C\cap\overline{D}$.

11. მოცემულია $A=\{x:1<x<9\}$ და $B=\{y:y<5\}$. იპოვეთ $A\cup B$ და $A\cap B$.

13. აღწერეთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე: ა) აგორებენ სამ სათამაშო კამათელს და ითვლიან მოსულ ქულათა ჯამს; ბ) ირჩევენ ორ ნამდვილ რიცხვს 0-სა და 1-ს შორის; გ) შემთხვევით ირჩევენ ამერიკელს და ახდენენ კლასიფიცირებას სქესისა და ასაკის მიხედვით; დ) ორ განსხვავებულ მთელ რიცხვს ირჩევენ 1-სა და 10-ს შორის და ალაგებენ ზრდის მიხედვით; ე) შემთხვევით ირჩევენ ორ წერტილს 20 სმ სიგრძის სახაზავზე და ზომავენ მათ შორის მანძილს.

15. დინამოს სათამაშო აქვს 7 მატჩი. B_k იყოს ხდომილება, რომ დინამომ მოიგო k-ური მატჩი და გამოვსახოთ B_k-ს ტერმინებში ხდომილებები: ა) დინამომ მოიგო I მატჩი; ბ) დინამომ წააგო I და მოიგო II და III შეხვედრები; გ) დინამომ მოიგო ყველა შეხვედრა; დ) დინამომ ბოლო სამი შეხვედრიდან მოიგო ორი შეხვედრა და წააგო ერთი; ე) დინამომ მოიგო პირველი სამი შეხვედრა და დანარჩენი წააგო.

17. რამდენი ელემენტისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე სათამაშო კამათლის სამჯერ აგდებისას?

19. რას უდრის აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილებების: ა) გადაკვეთა? ბ) გაერთიანება?

21. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cap B=A\cap C$ და $A\neq\varnothing$, მაშინ $B=C$ არაა მართებული.

23. სამართლიანია თუ არა ჩართვა $[(B\cap C)\cup B]\cup C\subset[(C\cap C)\cup B]\cap(B\cup B)$?

25. როგორ შეიძლება მარტივად ჩაიწეროს შემდეგი ხდომილებები:

ა) $A\cup(B\cup A)$; ბ) $A\cap(B\cap A)$;

გ) $A\cup[B\cup(A\cup B)]$; დ) $B\cap[A\cap(B\cap A)]$;

ე) $(B\cup B\cup B)\cap(A\cup A\cup A)$; ვ) $(B\cap B\cap B)\cup(A\cap A\cap A)$;

ზ) $B \cap [A \cup (B \cap A)]$; თ) $(B \cup A) \cap (A \cap A)$;

ი) $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{A}$; კ) $\overline{(B \cap A)} \cap \overline{B}$;

ლ) $\overline{(B \cup A)} \cap \overline{A}$; მ) $\overline{(B \cup A)} \cap \overline{B}$.

27. რვა ადამიანისაგან, რომელთა შორის 3 დოქტორია და 5 კანდიდატი, უნდა შევადგინოთ სამკაციანი კომისია. კომისიის წევრები შეირჩევა შემთხვევით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ კომისიაში მოხვდება: ა) სამი დოქტორი? ბ) ორი დოქტორი და ერთი კანდიდატი? გ) ერთი დოქტორი და ორი კანდიდატი? დ) სამი კანდიდატი?
29. მონეტას აგდებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა) კენტ რიცხვჯერ? ბ) ლუწ რიცხვჯერ? გ) არც ერთხელ? დ) ორჯერ მაინც?
31. მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ საფასური მოვა: ა) არანაკლებ სამჯერ? ბ) არანაკლებ ორჯერ? გ) არანაკლებ ერთჯერ? დ) არც ერთხელ?
33. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ: ა) გერბი მოვა კენტ რიცხვჯერ, ხოლო საფასური ლუწ რიცხვჯერ? ბ) გერბი მოვა კენტ რიცხვჯერ? გ) გერბი მოვა ლუწ რიცხვჯერ? დ) გერბი მოვა ლუწ რიცხვჯერ, ხოლო საფასური კენტ რიცხვჯერ?
35. სათამაშო კამათელს აგორებენ ორჯერ. რა უფრო ალბათურია – ჯამში მოვა: ა) 6 ქულა თუ 8 ქულა? ბ) 5 ქულა თუ 9 ქულა? გ) 5 ქულა თუ 6 ქულა? დ) 5 ქულა თუ 8 ქულა? ე) 6 ქულა თუ 7 ქულა? ვ) 7 ქულა თუ 5 ქულა?
37. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას ერთჯერ მაინც მოვა: ა) ერთიანი? ბ) ორიანი? გ) სამიანი? დ) ოთხიანი? ე) ხუთიანი? ვ) ექვსიანი?
39. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა ლუწი ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა ლუწი ქულა?
41. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა 3-ის ჯერადი ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა 3-ის ჯერადი ქულა?
43. სათამაშო კამათელს აგორებენ ორჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ნამრავლი აღმოჩნდება: ა) 12-ის ტოლი? ბ) 3-ის ჯერადი? გ) 4-ის ჯერადი? დ) 5-ის ჯერადი? ე) 10-ის ჯერადი?

45. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოვა ერთი მაინც ერთიანი?

47. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ არც ერთჯერ არ მოვა ერთიანი? იგივე კითხვა 2, 3, 4, 5 და 6-სათვის.

49. A იყოს ხდომილება, რომ შაბათს იწვიმებს, ხოლო B – კვირას იწვიმებს. დავუშვათ, რომ $P(A)=P(B)=0.5$. p იყოს ალბათობა, რომ იწვიმებს ორივე დღეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) იწვიმებს შაბათს, მაგრამ არ იწვიმებს კვირას; ბ) იწვიმებს ერთ დღეს, მაგრამ არ იწვიმებს ორივე დღეს; გ) არ იწვიმებს არც ერთ დღეს.

51. დაიჭირეს ორი თევზი და აწონეს. განვიხილოთ ხდომილებები: A={პირველი თევზის წონა მეტია 10 ფუნტზე}, B={მეორე თევზის წონა მეტია 10 ფუნტზე} და C={ორი თევზის წონის ჯამი მეტია 20 ფუნტზე}. შეამოწმეთ, რომ $C \subseteq A \cup B$.

53. აჩვენეთ, რომ: ა) ნებისმიერი ორი A და B ხდომილებისათვის:

$$P(A)+P(B)-1 \le P(A \cup B) \le P(A)+P(B).$$

ბ) $A_1,\ldots,A_n$ ხდომილებებისათვის სამართლიანია თანაფარდობა:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-(n-1) \le P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

55. შემთხვევით ირჩევენ რიცხვს მთელი რიცხვებიდან $1,\ldots,100$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ის გაიყოფა: ა) 2-ზე, 3-ზე ან 4-ზე; ბ) i-ზე, j-ზე ან k-ზე.

57. სათამაშო „რულეტი“ შედგება 38 ტოლი ფართობის მქონე სექტორისაგან, რომელთაგან 18 შავია, 18 წითელია და 2 კი მწვანე. აგდებენ ბურთს, რომელიც საბოლოოდ ჩერდება ერთ-ერთ სექტორში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთი: ა) გაჩერდება წითელ სექტორში; ბ) არ გაჩერდება შავ სექტორში.

59. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ორი ციფრი: ა) არ დაემთხვევა ერთმანეთს; ბ) დაემთხვევა ერთმანეთს.

61. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას ქულების ჯამი იქნება: ა) 9 ქულა; ბ) 10 ქულა.

63. 60 საგამოცდო საკითხიდან სტუდენტმა იცის 50 საკითხი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი უპასუხებს ორსაკითხიანი ბილეთის ორივე საკითხს.

65. 1000 დადებითი მთელი რიცხვიდან შემთხვევით ირჩევენ ერთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი იქნება: ა) 4-ის ჯერადი; ბ) ერთდროულად 4-ისა და 6-ის ჯერადი.
67. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 4 მწვანე კალკულატორი. იღებენ ორ კალკულატორს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე კალკულატორი წითელია; ბ) ორივე მწვანეა; გ) ზუსტად ერთი კალკულატორი წითელია; დ) ერთი კალკულატორი მაინც წითელია; ე) მეორე კალკულატორი წითელია.
69. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 4 მწვანე კალკულატორი. შემთხვევით იღებენ ერთ კალკულატორს, მის ფერს ინიშნავენ და მას აბრუნებენ ჩანთაში. შემდეგ შემთხვევით იღებენ მეორე კალკულატორს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე კალკულატორი წითელია; ბ) ორივე მწვანეა; გ) ზუსტად ერთი წითელია; დ) ერთი მაინც წითელია; ე) მეორე წითელია.
71. A ყუთი შეიცავს 6 წითელ და 2 მწვანე ბურთს, B ყუთი შეიცავს 4 წითელ და 3 მწვანე ბურთს. აგორებენ წესიერ კამათელს. თუ მოვიდა ლუწი ქულა, მაშინ A ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში B ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ამოღებული ბურთი წითელია; ბ) ბურთი ამოღებული იყო B ყუთიდან, თუ ცნობილია, რომ ამოღებული ბურთი წითელია.
73. ორი სიგნალი მიმღებ მოწყობილობაზე T დროის მანძილზე შემთხვევით მომენტში მიიღება. მოწყობილობა მათ განასხვავებს, თუ ისინი t დროით მაინც არიან დაცილებული ერთმანეთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სიგნალი მიღებული იქნება?
75. 36 კარტიდან A მოთამაშეს აქვს ორი დედოფალი და ერთი მეფე. A მოთამაშისაგან B მოთამაშე შემთხვევით იღებს ერთ კარტს და უბრუნებს ისევ მას. A მოთამაშე ერთმანეთში ურევს ამ სამ კარტს და შემდეგ B მოთამაშე კვლავ იღებს ერთ კარტს. B მოთამაშე იგებს თუ მის მიერ ამოღებული ორივე კარტი იქნება მეფე. იპოვეთ B მოთამაშის მოგების ალბათობა.

77. ყუთში დევს 10 ბურთი გადანომრილი 1-დან 10-მდე რიცხვებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებულ 6 ბურთში აღმოჩნდება: ა) ბურთი 9; ბ) ბურთი 9 და 10.

79. სიბრტყეზე, რომელიც დაფარულია a გვერდის მქონე კვადრატთა ბადით, შემთხვევით აგდებენ მონეტას რადიუსით $r < a/2$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტა არ გადაკვეთს არც ერთი კვადრატის გვერდს.

81. შემთხვევით იღებენ ორ დადებით რიცხვს, რომელთაგან თითოეული არ აღემატება 2-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათი ნამრავლი არ აღემატება 1-ს, ხოლო განაყოფი კი არ აღემატება 2-ს.

თავი II

კომბინატორიკა

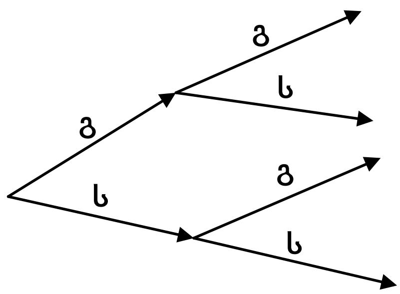
კომბინატორიკის ელემენტები. ალბათობის ამოცანების ამოხსნის პირველ ეტაპზე, უმეტეს შემთხვევაში, აუცილებელია განისაზღვროს როგორც ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტთა საერთო რაოდენობა, ისე ამა თუ იმ ხდომილების ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა. ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობის გამოსათვლელ ძირითად პრინციპს წარმოადგენს ე.წ. ნამრავლის პრინციპი, რომლის კერძო შემთხვევაში ასე ფორმულირდება:

ნამრავლის პრინციპი: თუ ერთი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n სხვადასხვა გზით და თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია m სხვადასხვა გზით, მაშინ ობიექტთა წყვილის შერჩევა შესაძლებელია nm სხვადასხვა გზით.

მაგალითად, თუ მამაკაცს აქვს 4 პერანგი და 2 პიჯაკი, მაშინ ამ მამაკაცს აქვს პერანგისა და პიჯაკის შერჩევის $4 \times 2 = 8$ შესაძლებლობა (ვარიანტი).

ნამრავლის პრინციპთან დაკავშირებით ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი **(ხისებრი) დიაგრამის** ანუ **დენდროგრამის** გამოყენება.

მაგალითად, დენდროგრამით გამოსახული მონეტის ორჯერ აგდების შესაბამისი შედეგების სიმრავლე იქნება:



მაგალითი 1. რამდენი ელემენტარული ხდომილებისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე თუ ორ კამათელს ვაგორებთ ერთჯერ?

ამოხსნა. პირველი კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე (კამათელის ზედა წახნაგზე შეიძლება გამოჩნდეს ნებისმიერი 6 რიცხვიდან). ამ 6 შესაძლებლობიდან თითოეულისათვის მეორე კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე. ამიტომ ნამრავლის პრინცეპის თანახმად ორი კამათელი შეიძლება დაეცეს $6 \cdot 6 = 36$ სხვადასხვანაირად.

მაგალითი 3. ვაგდებთ მონეტას ერთჯერ, თუ მოვიდა გერბი მეორეჯერ ვაგდებთ მონეტას, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ვაგორებთ სათამაშო კამათელს. მონეტა ისევ შეიძლება დაეცეს 2 სხვადასხვა მხარეზე და კამათელი ასევე შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე, მაგრამ აქ დარღვეულია ნამრავის პრინციპის ძირითადი მოთხოვნა, რომ პირველი პროცედურის თითოეული შედეგისათვის მეორე პროცედურის შედეგთა რაოდენობა იყოს უცვლელი (აქ კი მეორე შემთხვევაში გვაქვს ან 2 ან 6 შესაძლებლობა). ამიტომ შესაძლო შედეგთა რაოდენობის ნამრავლის პრინციპით გამოთვლა არ იქნება მართებული. სინამდვილეში აქ მოსალოდნელია 8 სხვადასხვა შედეგი. ეს შედეგებია: გგ, გს, ს1, ს2, . . . ,ს6.

ნამრავლის პრინციპი ზოგადად ასე ყალიბდება: თუ ერთი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_1 სხვადასხვა გზით, თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_2 სხვადასხვა გზით, თითოეულისათვის პირველი ორი შესაძლებლობიდან მესამე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_3 სხვადასხვა გზით და ა. შ., მაშინ ობიექტთა m-ეულის (ამ პროცედურის m-ჯერ გამეორების შედეგად) შერჩევა შესაძლებელია $n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ სხვადასხვა გზით.

მაგალითი 5. რამდენი ლუწი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრების 1, 2, 5, 6 და 9 საშუალებით, თუ თითოეული გამოყენებული იქნება მხოლოდ ერთჯერ?

ამოხსნა. ვინაიდან რიცხვი უნდა იყოს ლუწი, ჩვენ გვაქვს ერთეულის არჩევის მხოლოდ ორი შესაძლებლობა. თითოეული არჩეული ერთეულისათვის ჩვენ შეგვიძლია ასეულების ციფრი შევარჩიოთ 4 სხვადსხვა გზით და ერთეულისა და ასეულის არჩევის შემდეგ ათასეულების ციფრი შეგვიძლია შევარჩიოთ 3 სხვადასხვა გზით. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ სხვადსხვა ლუწი სამნიშნა რიცხვი.

გადანაცვლებები – ეს არის კომბინაციები, რომლებიც შედგენილია მოცემული n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა n ელემენტისაგან და ერთამანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ ელემენტების განლაგების რიგით. $P_n = n!$.

წყობები – ეს არის m ელემენტიანი კომბინაციები n განსხვავებული ელემენტის მქონე სიმრავლიდან, რომელებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან ელემენტების შემადგენლობით ან ელემენტების განლაგების რიგით. $A_n^m = n!/(n-m)!$.

ჯუფდებები – ეს არის n ელემენტიანი სიმრავლის დაულაგებელი m ელემენტიანი ქვესიმრავლეები. $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$. ცხადია, რომ $C_n^m \cdot m! = A_n^m$.

მაგალითი 7. შეჯიბრებაში მონაწილე 10 სპორტსმენიდან პირველ სამ ადგილზე გასული სამი გამარჯვებული რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს დასაჯილდოებელ კვარცხლბეკზე?

ამოხსნა. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

მაგალითი 9. 20 ლატარიის ბილეთიდან იღებენ ორს I და II პრიზის მოსაგებად. რამდენი ელემენტისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380 .$$

მაგალითი 11. რამდენი გზით შეიძლება მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდიუმის 5 წევრიდან სამი სხვადასხვა მომხსენებლის შერჩევა მათემატიკური საზოგადოების სამი სხვადასხვა შეხვედრისათვის?

ამოხსნა. კომბინაციათა რაოდენობა იქნება

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 .$$

მაგალითი 13. რამდენნაირად შეიძლება 6 სახეობის ასაფეთქებელი ნივთიერება დავალაგოთ გრძელ თაროზე, თუ ცნობილია, რომ ორი მათგანი არ შეიძლება ერთმანეთის გვერდით დაიდოს?

ამოხსნა. ამ ორი ასაფეთქებელი ნივთიერებიდან ერთ-ერთი გადავდოთ ცალკე და დანარჩენი 5 დავალაგოთ თაროზე. 5 ნივთიერების თაროზე დალაგება შესაძლებელია 5! სხვადასხვანაი-

რად. მას შემდეგ რაც თაროზე დალაგებულია 5 ნივთიერება მე-6 ნივთიერება ვერ დაიდება ერთ-ერთი მათგანის გვერდზე (არც მარჯვნივ და არც მარცხნივ), შესაბამისად, მე-6 ნივთიერება შესაძლებელია დაიდოს $6-2=4$ ადგილას. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, საძიებელი რაოდენობა იქნება: $5!\times4=480$.

წრიული გადანაცვლებები – გადანაცვლებებს, რომელსაც ადგილი აქვს ობიექტების წრეწირზე დალაგებისას (განთავსებისას) ეწოდება წრიული გადანაცვლებები. განსხვავებით სწორ ხაზზე განლაგებისაგან, ორი წრიული გადანაცვლება არ ითვლება განსხვავებულად თუ ამ განლაგებებში ნებისმიერი ობიექტის წინა და მომდევნო ობიექტები უცვლელია (ამ შემთხვევაში არ არსებობს პირველი და ბოლო პოზიცია). მაგალითად, თუ ოთხი ადამიანი თამაშობს ბრიჯს, ჩვენ არ გვაქვს ახალი გადანაცვლება თუკი ყველას გადავაადგილებთ ერთი (ან რამდენიმე) პოზიციით საათის ისრის მოძრაობის (ან მოძრაობის საწინააღმდეგო) მიმართულებით. თუ განვიხილავთ ერთ მოთამაშეს ფიქსირებულ პოზიციაზე და დანარჩენ სამს დავალაგებთ ნებისმიერად, რაც შესაძლებელია 3! სხვადასხვანაირად, დავინახავთ, რომ ბრიჯის თამაშის დროს შესაძლებელია მოთამაშეების 3! სხვადსახვანაირად განთავსება.

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: წრეწირზე განლაგებული n განსხვავებული ობიექტის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რაოდენობა ტოლია $(n-1)!$-ის.

გარდა ამისა, თუ სწორხაზოვან n ადგილზე $m\,(m\le n)$ ობიექტის განთავსება შეიძლება A_n^m სხვადასხვანაირად, წრეწირზე განლაგებულ n ადგილზე m ობიექტის განთავსება შეიძლება უკვე A_n^m/m სხვადასხვანაირად (კერძო შემთხვევაში, როცა $n=m$ ვღებულობთ წრიულ გადანაცვლებათა რაოდენობას:

$$A_n^n/n=P_n/n=n!/n=(n-1)!\,).$$

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით განსხვავებული ობიექტების გადანაცვლებებს. ცხადია, რომ თუ ავიღებთ ლათინური ანბანის სამ ასოს a, b და c-ს, მაშინ მათი განსხვავებული 3! = 6 გადანაცვლებებია: abc; acb; bac; bca; cab და cba. მაგრამ, თუ ამ სამი ასოდან b და c ერთი და იგივე x-ია, მაშინ axx; axx; xax; xxa; xax; xxa გადანაცვლებებიდან, მხოლოდ 3 (axx; xax; xxa) იქნება განსხვავებული (3=3!/2!). ოთხი განსხვავებული a, b, c და d ასოს შემთხვევაში გადანაცვლებათა რაოდენობაა 4! = 24, მაგრამ თუ მაგალითად, $a=b=x$ და $c=d=y$, მაშინ ჩვენ გვექნება

მხოლოდ 4!/(2! 2!)=6 განსხვავებული გადანაცვლება: $xxyy$; $xyxy$; $yxxy$; $yyxx$; $xyyx$ და $yxyx$.

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: იმ n ობიექტის განსხვავებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომელთა შორის n_1 პირველი ტიპისაა, n_2 მეორე ტიპისაა, და ა. შ. n_k – k-ური ტიპისაა, შეადგენს:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \qquad (\text{ცხადია, რომ } P_n^{\overbrace{n-\text{ჯერ}}^{1,1,\ldots,1}} = P_n).$$

მართლაც, როგორც ცნობილია, ყველა ობიექტი განსხვავებული რომ ყოფილიყო, მაშინ გადანაცვლებათა რაოდენობა იქნებოდა $n!$. მათ შორის ერთი და იგივე იქნება: 1) ის n-ეულები, სადაც კონკრეტულ n_1 ადგილას დგას პირველი ტიპის ობიექტები და მათი რაოდენობა შეადგენს $n_1!$-ს; 2) ის n-ეულები, სადაც კონკრეტულ n_2 ადგილას დგას მეორე ტიპის ობიექტები და მათი რაოდენობა შეადგენს $n_2!$-ს; და ა. შ. k) ის n-ეულები, სადაც კონკრეტულ n_k ადგილას დგას k-ური ტიპის ობიექტები და მათი რაოდენობა შეადგენს $n_k!$-ს. შესაბამისად, საძიებელ რაოდენობას მივიღებთ, თუ $n!$-ს შევამცირებთ $n_1! n_2! \cdots n_k!$-ჯერ, ანუ განსხვავებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა იქნება $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

მაგალითი 15. რამდენაირად შეიძლება 3 წითელი, 4 ყვითელი და 2 ლურჯი ნათურა განვათავსოთ საახალწლო ნაძვის ხის გამნათებელ მოწყობილობაში, რომელსაც ნათურის 9 ბუდე გააჩნია?

ამოხსნა. განსხვავებულ განლაგებათა რაოდენობა იქნება

$$\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260.$$

სიმრავლის დაყოფა – ზოგჯერ საჭირო ხდება n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ქვესიმრავლედ შესაძლო დაყოფათა რიცხვის გამოთვლა. სიმრავლის დაყოფა ეწოდება მის ქვესიმრავლეთა ისეთ ერთობლიობას, რომელთა გაერთიანება მოცემული სიმრავლის ტოლია, ხოლო ამ ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი წყვილი უთავსებადია. თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტთა დალაგებას მნიშვნელობა არა აქვს. განვიხილოთ სიმრავლე {ა, ე, ი, ო, უ}. ამ სიმრავლის შესაძლო დაყოფები ორ ნა-

ნილად, რომელთაგან პირველი შეიცავს 4 ელემენტს, ხოლო მეორე კი 1 ელემენტს, შემდეგია: {(ა, ე, ი, ო), (უ)}; {(ე, ი, ო, უ), (ა)}; {(ი, ო, უ, ა), (ე)}; {(ო, უ, ა, ე), (ი)}; {(ა, ე, ი, უ), (ო)}. ასეთ დაყოფათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი $C_5^{4,1}$, სადაც ქვედა რიცხვი 5 გვიჩვენებს დასაყოფი სიმრავლის ელემენტთა მთლიან რაოდენობას, ხოლო ზედა რიცხვები 4 და 1 კი თუ რამდენ ელემენტიან ქვესიმრავლეებად ვყოფთ მოცემულ სიმრავლეს, ამასთანავე:

$$C_5^{4,1} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5 .$$

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ნაწილად შესაძლო დაყოფათა რაოდენობა, სადაც პირველი ნაწილი შეიცავს n_1 ელემენტს, მეორე ნაწილი – n_2 ელემენტს და ა. შ. m-ური ნაწილი – n_m ელემენტს აღინიშნება სიმბოლოთი $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ და ტოლია:

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!},$$

სადაც $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ (ცხადია, რომ

$C_n^{m.n-m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$).

მართლაც, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ავიღოთ ნებისმიერი n_1-ელემენტიანი ქვესიმრავლე n**-ელემენტიანი** სიმრავლის (ამის გაკეთება შეიძლება $C_n^{n_1}$ სხვადასხვანაირად), დარჩენილი $n - n_1$ ობიექტიდან ავიღოთ n_2-ელემენტიანი სიმრავლე (ამის გაკეთება შეიძლება $C_{n-n_1}^{n_2}$ სხვადასხვანაირად) და ა. შ. ნამრავლის პრინციპის თანახმად n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ნაწილად შესაძლო დაყოფათა საერთო რაოდენობა იქნება:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times$$

$$\times \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-\cdots-n_m)!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} .$$

პოლინომიალური ფორმულა. განვიხილოთ ამოცანა იმის შესახებ თუ როგორ გავხსნათ ფრჩხილები $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$ გამოსახულების გამოსთვლელად. სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n=\sum_{r_1\geq 0,\ldots,r_k\geq 0,r_1+\cdots+r_k=n}\frac{n!}{r_1!\cdots r_k!}a_1^{r_1}\cdots a_k^{r_k}\ .$$

დამტკიცება. გადავამრავლოთ n-ჯერ თავის თავზე $(a_1+a_2+\cdots+a_k)$. მაშინ მივიღებთ k^n შესაკრებს $d_1d_2\cdots d_n$ სახის, სადაც თითოეული თანამამრავლი d_i, $i=1,2,...,n$, არის ან a_1, ან a_2, და ა. შ. ან a_k. აღვნიშნოთ $B(r_1,...,r_k)$ სიმბოლოთი იმ შესაკრებების ერთობლიობა, სადაც a_1 გვხვდება თანამამრავლად r_1-ჯერ, a_2 – r_2-ჯერ , და ა. შ. a_k – r_k-ჯერ. გასაგებია, რომ ასეთი შესაკრებების რაოდენობა ტოლია $\dfrac{n!}{r_1!\cdots r_k!}$-ის, ხოლო შესაბამისი შესაკრები კი იქნება $\dfrac{n!}{r_1!\cdots r_k!}a_1^{r_1}\cdots a_k^{r_k}$.

ჯუფდება განმეორებებით. n ელემენტიდან m ელემენტიანი ჯუფდებები განმეორებებით ეწოდება ჯგუფებს, რომლებიც შედგება m ელემენტისაგან, რომელთაგან თითოეული ელემენტი მიეკუთვნება ერთ-ერთს n ტიპიდან.

მაგალითად, სამი a, b და c ელემენტიდან შესაძლებელია შევადგინოთ შემდეგი ორელემენტიანი ჯუფდებები განმეორებებით:

$$aa,\ bb,\ cc,\ ab,\ ac,\ bc\ .$$

სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა: რაოდენობა n ელემენტიდან m ელემენტიანი ჯუფდებების განმეორებებით ტოლია $f_n^m=C_{n+m-1}^{n-1}=C_{n+m-1}^{m}$.

მართლაც, ნებისმიერი ჯუფდება ცალსახად განისაზღვრება თუ მივუთითებთ ყოველი n ტიპიდან რამდენი ელემენტი შედის მასში. ყოველ ჯუფდებას შევუსაბამოთ ნულებისა და ერთების მიმდევრობა, რომელიც შედგენილია შემდეგი წესით: დავწეროთ ერთმანეთის გვერდით იმდენი ერთიანი რამდენი პირველი ტიპის ელემენტიც შედის ჯუფდებაში, შემდეგ დავწეროთ ნული და მის შემდეგ იმდენი ერთიანი რამდენი მეორე ტიპის ელემენტიც შედის ჯუფდებაში და ა. შ. (მაგალითად, ზევით დაწერილ ჯუფდებებს სამი ასოდან ორ-ორად შეესაბამება შესაბამისად შემდეგი მიმდევრობები: 1100, 0110, 0011, 1010, 1001, 0101). ამრიგად,

n ელემენტიდან ნებისმიერ m ელემენტიან ჯუფდებას განმეორებებით შეესაბამება მიმდევრობა შედგენილი m ერთიანისაგან და $n-1$ ნულისაგან და პირიქით. შესაბამისად, საძიებელი რაოდენობა იქნება $f_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$.

მაგალითი 17. ვიპოვოთ რაოდენობა იმ ვარიანტების რამდენნაირადაც შესაძლებელია ამოვარჩიოთ 3 ასო შემდეგი 12 ასოდან: ა, ა, ა, გ, გ, გ, ტ, ტ, ტ, ც, ც, ც.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $n=4$, ხოლო $m=3$. ამიტომ საძიებელი რაოდენობა იქნება: $f_4^3 = C_{4+3-1}^3 = 20$.

მაგალითი 19. ვიპოვოთ $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ განტოლების მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რაოდენობა.

ამოხსნა. არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა აღნიშნული განტოლების ამონახსნებსა და n ელემენტიდან m ელემენტიან განმეორებებით ჯუფდებებს შორის. თუ გვაქვს მთელი არაუარყოფითი რიცხვები $x_1, x_2, ..., x_m$, ისეთი, რომ $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, მაშინ შეგვიძლია შევადგინოთ m ელემენტიანი ჯუფდება, თუ ავიღებთ პირველი ტიპის x_1 ელემენტს, მეორე ტიპის – x_2 ელემენტს, და ა. შ. მე-m ტიპის – x_m ელემენტს. პირიქით, თუ გვექნება n ელემენტიდან m ელემენტიანი ჯუფდება, ჩვენ მივიღებთ საწყისი განტოლების გარკვეულ ამონახსნს მთელ არაუარყოფით რიცხვებში. ამიტომ მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რაოდენობა იქნება $f_n^m = C_{n+m-1}^m$.

ალბათობის გამოთვლა კომბინატორიკის გამოყენებით.

ამორჩევა დაბრუნებით: ექსპერიმენტის ყოველ ნაბიჯზე ყუთიდან ამოღებული ბურთი უკან ბრუნდება. ვიგულისხმოთ, რომ ბურთები გადანომრილია რიცხვებით 1-დან M -მდე. განასხვავებენ ორი ტიპის ამორჩევებს: **დალაგებული ამორჩევები** და **დაულაგებელი ამორჩევები.** დალაგებული ამორჩევები აღინიშნება სიმბოლოთი $(a_1, ..., a_n)$, ხოლო დაულაგებელი ამორჩევები – $[a_1, ..., a_n]$.

დაბრუნებით დალაგებული ამორჩევის შემთხვევაში:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, ..., a_n) : a_i = 1, ..., M;\ i = 1, ..., n\} \text{ და } |\Omega| = M^n.$$

დაულაგებელი ამორჩევები დაბრუნებით:

$$\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,...,a_n]:a_i=1,...,M;\ i=1,...,n\},\ |\Omega|=C_{M+n-1}^{n}.$$

ამორჩევა დაბრუნების გარეშე: $n\le M$ და ამოღებული ბურთი უკან არ ბრუნდება.

დაბრუნების გარეშე დალაგებული შერჩევის შემთხვევაში:

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,...,a_n):a_k\ne a_l,\ k\ne l;\ a_i=1,...,M;\ i=1,...,n\}\ \text{და}\ |\Omega|=A_M^n.$$

დაულაგებელი ამორჩევები დაბრუნების გარეშე:

$$\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,...,a_n]:a_k\ne a_l,\ k\ne l;\ a_i=1,...,M;\ i=1,...,n\},\ |\Omega|=C_M^n$$

საბოლოო სურათი ასეთია:

	დალაგებული	**დაულაგებელი**
დაბრუნებით	M^n	C_{M+n-1}^{n}
დაბრუნების გარეშე	A_M^n	C_M^n

მაგალითად, $M=3$ და $n=2$-ის შემთხვევაში შესაბამის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეებს ექნებათ შემდეგი სახის სტრუქტურები:

			შერჩევა
	(1,1)(1,2)(1,3) (2,1)(2,2)(2,3) (3,1)(3,2)(3,3)	[1,1][2,2][3,3] [1,2][1,3][2,3]	**დაბრუნებით**
	(1,2)(1,3) (2,1)(2,3) (3,1)(3,2)	[1,2] [1,3] [2,3]	**დაბრუნების გარეშე**
ერთობლიობა	**დალაგებული**	**დაულაგებელი**	

სავარჯიშოები:

I. კურსზე, რომელზეც სამი ჯგუფია, ჯგუფხელების არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტების რიცხვია $n_1\cdot n_2\cdot n_3$, სადაც n_i – i-ურ ჯგუფში სტუდენტების რაოდენობაა (ვიყენებთ ნამრავლის პრინციპს);

III. m ადამიანის დაბადების დღეების ყველა შესაძლო კომბინაცია (იმ პირობით, რომ თითეული დაბადების დღე არის რომელიმე 365 დღიდან) ტოლია 365^m (საქმე გვაქვს ამორჩევასთან

დაბრუნებით, ამასთანავე ამორჩევები ითვლება დალაგებულად, სადაც $M = 365$ და $n = m$);

V. პარტიების რაოდენობა, რომელიც უნდა შედგეს n მონაწილისაგან შემდგარ წრიულ საჭადრაკო ტურნირში ტოლია $C_n^2 = n(n-1)/2$ (დაულაგებელი ამორჩევა დაბრუნების გარეშე).

მაგალითი 21. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 6-ჯერ აგედბისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A-თი ხდომილება, რომ მონეტის 6-ჯერ აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი. ვინაიდან მონეტის ყოველი აგდება შეიძლება დასრულდეს ორი სხვადასხვა შედეგით დამოუკიდებლად სხვა აგდებების შედეგებისაგან. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $2^6 = 64$ ელემენტარული ხდომილებისაგან. ამ შემთხვევაში უფრო მოხერხებულია საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილებაზე გადასვლა, რომელიც ნიშნავს, რომ მონეტის 6-ჯერ აგდებისას არც ერთჯერ არ მოვიდა გერბი. ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ ერთ შემთხვევაში – თუ ექვსივეჯერ მოვიდა საფასური. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1/64$. ამიტომ

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1/64 = 63/64.$$

მაგალითი 23. კონფერენციის 20 მონაწილისათვის, რომელთა შორის 12 თბილისელია, სასტუმროში დაჯავშნულია 20 ნომერი. ამ ნომრებიდან 12 გადაჰყურებს ზღვას. ადმინისტრატორი შემთხვევით აწვდის კონფერენციის მონაწილეებს ნომრების გასაღებებს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 12 თბილისელს შეხვდება ის ნომრები, რომლებიც ზღვას გადაჰყურებს.

ამოხსნა. კონფერენციის 20 მონაწილისათვის 20 სხვადასხვა ნომრის მიცემა იმდენნაირად შეიძლება, რამდენნაირადაც 20 ობიექტი შეიძლება განთავსდეს 20 ადგილას, ანუ $|\Omega| = 20!$. ანალოგიურად, 12 ნომერში 12 თბილისელის განთავსება შესაძლებელია 12! სხვადასხვანაირად, ხოლო დარჩენილ 8 ნომერში კონფერენციის დანარჩენი 8 მონაწილის განთავსება შესაძლებელია 8! სხვადასხვანაირად, დამოუკიდებლად იმისაგან თუ რომელი თბილისელი ზღვაზე ხედის მქონე რომელ ნომერში მოხვდება. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|A| = 12!\cdot 8!$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{12!\cdot 8!}{20!}=\frac{8\cdot 7\cdots 1}{20\cdot 19\cdots 13}\approx 7.9\cdot 10^{-6}.$$

მაგალითი 25. ივ. ჯავახიშვილის სახ. უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი, ილიას უნივერსიტეტის 2 სტუდენტი და წერეთელის უნივერსიტეტის 4 სტუდენტი შემთხვევით ჯდება 3 ვაგონში. თითეული მგზავრის ნებისმიერ ვაგონში მოხვედრის ალბათობები ერთი და იგივეა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი მოხვდება სხვადახვა ვაგონში (ხდომილება A); ბ) ილიას უნივერსიტეტის 2 სტუდენტი მოხვდება სხვადასხვა ვაგონში (ხდომილება B).

ამოხსნა. ა) ნამრავლის პრინციპის თანახმად $|\Omega|=\underbrace{3\cdot 3\cdots 3}_{9-\text{ჯერ}}=3^9$.

ავიღოთ სხვადასხვა ვაგონის ნებისმიერი 3 ბილეთი და გავუნაწილოთ ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტს, ამის გაკეთება შესაძლებელია $3!$ სხვადასხვანაირად. თითოეული ამ ვარიანტისათვის არსებობს დანარჩენი 6 სტუდენტის 3 ვაგონში გადანაწილების 3^6 შესაძლებლობა. ამიტომ $|A|=3!\cdot 3^6$ და, მაშასადამე,

$$P(A)=3!\cdot 3^6/3^9=3!/3^3=2/9.$$

ბ) ილიას უნივერსიტეტის I სტუდენტს შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი 3 ვაგონიდან, მეორე სტუდენტს კი ნებისმიერი დარჩენილი 2 ვაგონიდან და ყოველი ამ კომბინაციისათვის არსებობს დანარჩენი 7 სტუდენტის 3 ვაგონში გადანაწილების 3^7 შესაძლებლობა. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად $|B|=3\cdot 2\cdot 3^7$ და, ამგვარად, $P(B)=3\cdot 2\cdot 3^7/3^9=2/3$.

მაგალითი 25-ის გაგრძელება. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ვაგონში არის ზუსტად k ადგილი და ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტს შეუძლია დაიკავოს ნებისმიერი ადგილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი აღმოჩნდება სხვადასხვა ვაგონში.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ბილეთების ნომრების სამეულებისაგან და $|\Omega|=3k(3k-1)(3k-2)$, რაც შეეხება ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებებს, მათი რაოდენობა იქნება უკვე $3k\cdot 2k\cdot k=6k^3$ და, შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$P_k(A)=\frac{6k^3}{3k(3k-1)(3k-2)}=\frac{2k^2}{(3k-1)(3k-2)}.$$

შენიშვნა. ადვილი დასანახია, რომ ვაგონებში ადგილების რაოდენობის უსასრულოდ გაზრდის შემთხვევაში (ანუ როცა $k\to\infty$), მივიღებთ, რომ საძიებელი ალბათობა უახლოვდება წინა მაგალითის ა) პუნქტში მიღებულ ალბათობას:

$$\lim_{k\to\infty}P_k(A)=\lim_{k\to\infty}\frac{2k^2}{9k^2-9k+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{9-9/k+2/k^2}=\frac{2}{9}.$$

მაგალითი 27. დავუშვათ, რომ ლატარეაში თამაშდება 6 მომგებიანი ნომერი 49-დან. მომგებიანი ნომრების ამოღების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. ლატარეაში მონაწილე ირჩევს 6 ნომერს 49-დან. ვიპოვოთ 4 მომგებიანი ნომრის გამოცნობის ალბათობა (ხდომილება A).

ამოხსნა. ელემენტარული ხდომილება იქნება 6 ნომრის ერთობლიობა 49-დან. ასეთი 6 ნომრიანი ერთობლიობების რაოდენობა ემთხვევა 49 ელემენტიანი სიმრავლის 6 ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას, ანუ $|\Omega|=C_{49}^6$. ლატარეის გათამაშების შემდეგ გათამაშებაში მონაწილე 49 ნომერი იყოფა ორ ჯგუფად: 6 მომგებიანი ნომერი და 43 არამომგებიანი ნომერი. 6 მომგებიანი ნომრიდან 4 მომგებიანი ნომრის შერჩევა შესაძლებელია C_6^4 სხვადასხვანაირად და თითოეული ამ ვარიანტისათვის არსებობს დანარჩენი 2 არამომგებიანი ნომრის არჩევის C_{43}^2 შესაძლებლობა. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|A|=C_6^4\cdot C_{43}^2$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$P(A)=C_6^4\cdot C_{43}^2/C_{49}^6\approx 9.7\cdot 10^{-4}.$$

მაგალითი 29 *(მოგება ლატარეაში).* გვაქვს M ბილეთი გადანომრილი რიცხვებით ერთიდან M-მდე, რომელთაგან n ბილეთი ნომრებით ერთიდან n-მდე მომგებიანია ($M\geq 2n$). ვყიდულობთ n ცალ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ n ბილეთიდან ერთი მაინც იქნება მომგებიანი (ავღნიშნოთ ეს ხდომილება A ასოთი)?

ამოხსნა. ვინაიდან ბილეთების ამოღების (ყიდვის) თანმიმდევრობას არა აქვს მნიშვნელობა ნაყიდ ბილეთებში მომგებიანი ბილეთების არსებობის ან არ არსებობის თვალსაზრისით, ამი-

ტომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეს ექნება შემდეგი სტუქტურა:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1,...,a_n] : a_k \neq a_l,\, k \neq l;\, a_i = 1,...,M\}\,.$$

შესაბამისად, ჩვენ მიერ ზემოთ მოყვანილი ცხრილის თანახმად $|\Omega| = C_M^n$.

ხდომილებას (ავღნიშნოთ იგი B_0-ით), რომ ნაყიდ ბილეთებში არ არის მომგებიანი ბილეთები, ექნება შემდეგი სტრუქტურა:

$$B_0 = \{\omega : \omega = [a_1,...,a_n] : a_k \neq a_l,\, k \neq l;\, a_i = n+1,...,M\} \text{ და } |B_0| = C_{M-n}^n\,.$$

ამიტომ,

$$P(B_0) = \frac{C_{M-n}^n}{C_M^n} = \frac{A_{M-n}^n}{A_M^n} = (1-\frac{n}{M})(1-\frac{n}{M-1})\cdots(1-\frac{n}{M-n+1})\,.$$

შესაბამისად, საძებნი ალბათობა იქნება:

$$P(B) = 1 - P(B_0) = 1-(1-\frac{n}{M})(1-\frac{n}{M-1})\cdots(1-\frac{n}{M-n+1})\,.$$

თუ მაგალითად, $M = n^2$ და $n \to \infty$, მაშინ $P(B_0) \to e^{-1}$ (აქ e ნეპერის რიცხვია) და $P(B) \to 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$, სადაც კრებადობის სიჩქარე საკმაოდ დიდია: უკვე როცა $n = 10$, მაშინ $P(B) = 0{,}670$.

დავალება. წინა ამოცანის პირობებში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნაყიდი n ბილეთიდან ზუსტად m ($m \le n$) იქნება მომგებიანი.

მაგალითი 31 (ორ „ტუზი“). განვიხილოთ პრეფერანსის თამაში, როდესაც კარტის შეკვრის მაღალი 32 კარტი შემთხვევით ნაწილდება (რიგდება) სამ მოთამაშეს შორის, ისე რომ თითეული ღებულობს 10 კარტს და ორი კარტი ინახება „საყიდლებში“. როგორია ალბათობა იმისა, რომ „საყიდლებში“ აღმოჩნდება ორი „ტუზი“?

ამოხსნა. ორი კარტის სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აღმოჩნდეს „საყიდლებში“, ტოლია $C_{32}^2 = 496$. კარტის შეკვრაში ოთხი „ტუზია“და სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც მოგვცემდა ორ „ტუზს“, ტოლია $C_4^2 = 6$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$C_4^2 \big/ C_{32}^2 = 6/496 = 0{,}012\,.$$

დავალება. დავუშვათ წინა ამოცანაში ერთ-ერთმა მოთამაშემ, ნახა რა თავისი კარტები, იცის, რომ მას „ტუზი“ არა აქვს. შეიცვლება თუ არა მაშინ ალბათობა იმისა, რომ „საყიდლებში“ ორი „ტუზია“? გამოთვალეთ ეს ალბათობა.

ამოცანები

1. რამდენნაირად შეიძლება საკლასო ჟურნალში 9 ბაშვის გვარისა და სახელის შეტანა?
3. რამდენნაირად შეიძლება ერთი დღის გაკვეთილების ცხრილის შედგენა 6 სხვადასხვა საგნისათვის?
5. რამდენნაირად შიძლება 6 ადგილიან მერხზე 4 სტუდენტის განთავსება?
7. რამდენნაირად შეიძლება 3 საპრიზო ადგილის განაწილება სიმღერის ფესტივალზე მონაწილე 20 კონკურსანტს შორის?
9. სტუდენტის საბოლოო შეფასება აღინიშნება სიმბოლოებით A, B, C, D, E. რამდენნაირად შეიძლება შეფასდეს 10 სტუდენტი?
11. რამდენი ექვსნიშნა სატელეფონო ნომრის შედგენა შეიძლება, რომელიც არ იწყება ნულით და არ მთავრდება კენტი ციფრით?
13. 2010 წელს საშუალო სკოლა დაამთავრა 35938 საქართველოს მოქალაქემ. შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ, სულ ცოტა, ორი მათგანის სახელის, გვარისა და მამის სახელის პირველი ასოები ერთმანეთს დაემთხვა? პასუხი დაასაბუთეთ.
15. რამდენნაირად შეიძლება 12 პროფესორისაგან 3 კაციიანი საგამოცდო კომისიის შედგენა?
17. ნაძვის ხეზე გაბმულ სადენზე 12 ნათურის ბუდეა. რამდენნაირად შეიძლება მასზე 6 წითელი, 4 ლურჯი და 2 მწვანე ნათურის ჩამოკიდება?
19. წრეწირზე 10 წერტილია. რამდენი სამკუთხედი ჩაიხაზება წრეწირში წვეროებით ამ წერტილებზე?
21. გარნიზონში 50 ჯარისკაცი და 10 ოფიცერია. რამდენი საპატრულო ჯგუფის შედგენა შეიძლება, რომელშიც შედის 2 ოფიცერი და 5 ჯარისკაცი?

23. წერა-კითხვის უცოდინარ ბავშვს მისცეს ასოები: ა, ა, ა, ბ, ბ, თ, ლ, ო. რამდენი განსხვავებული კომბინაციით უნდა დაალაგოს ბავშვმა ეს ასოები, რომ მათში აუცილებლად აღმოჩნდეს სიტყვა „ალბათობა“?
25. რამდენი წერტილი არსებობს სიბრტყეზე, რომელთა აბსცისა კენტი ციფრია, ხოლო ორდინატა კი 5-ის ჯერადი ორნიშნა რიცხვი?
27. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება განსხვავებული ციფრებით?
29. 15 მოჭადრაკე ქალისა და 10 მოჭადრაკე ვაჟისაგან უნდა დაკომპლექტდეს 7 კაციანი გუნდი, რომელშიც შევა 4 ქალი და 3 ვაჟი. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება?
31. რამდენ ელემენტს უნდა შეიცავდეს სიმრავლე, რომ მისი ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი იყოს: ა) არა უმეტეს 1000-ისა; ბ) არა ნაკლებ 500-ისა.
33. შეასრულეთ მოქმედებები და გამოთვალეთ:

1. $\frac{8!-6!}{12!}$; 2. $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$; 3. $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+4)!}$; 4. $\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!}$.

35. კლასში 28 მოსწავლეა. გამოსაშვებ საღამოზე მათ ერთმანეთს სამახსოვროდ ფოტოსურათები გაუცვალეს. რამდენი ფოტოსურათი გაიცვალა სულ?
37. იპოვეთ საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეთა რაოდენობა, თუ თითოეულმა მონაწილემ ყველა დანარჩენთან თითო პარტია ითამაშა და სულ 55 პარტია შედგა?
39. იპოვეთ 0, 1, 2, 3 ციფრებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომელშიც ყველა ციფრი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.
41. ამოხსენით განტოლება $A_n^3-6C_n^2=n^2-n$.
43. რამდენი განსხვავებული ბილეთის შედგენა შეიძლება 10 ალგებრული და 6 გეომეტრიული ამოცანის გამოყენებით, თუ თითოეულ ბილეთში შედის 3 ალგებრული და 2 გეომეტრიული ამოცანა?
45. ავტომობილის სანომრე ნიშანი შედგება ქართული ანბანის 3 ასოსა და 3 ციფრისაგან. რამდენი ასეთი სანომრე ნიშანი არსებობს?
47. ავტომობილის სანომრე ნიშანი შედგება ქართული ანბანის 3 ასოსა და 3 ციფრისაგან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული სანომრე ნიშანში: ა) არ მეორდება ასოე-

ბი; ბ) არ მეორდება ციფრები; გ) ყველა ასო ერთი და იგივეა; დ) მხოლოდ ლუწი ციფრებია; ე) არ მეორდება ასოები და ციფრები ერთი და იგივეა.

49. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენნაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 4 ადამიანი, თუ საჭესთან ადგილის დაკავება შეუძლია ორ მათგანს?
51. სტუდენტმა 6 დღეში უნდა ჩააბაროს 3 გამოცდა: მათემატიკა, ფიზიკა და ელექტრონიკა. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება გამოცდების ცხრილის შედგენა, თუ ერთ დღეს არ შეიძლება ერთზე მეტი გამოცდის ჩაბარება და ჯერ უნდა ჩააბაროს მათემატიკა, შემდეგ ფიზიკა და ბოლოს, ელექტრონიკა?
53. 10 ადამიანი უნდა განთავსდეს 3 ოთახში, ისე რომ თითოეულ ოთახში იყოს არანაკლებ 3 ადამიანი. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება?
55. მონეტას აგდებენ 6-ჯერ. რამდენი ვარიანტია საფასურის ან 2-ჯერ, ან 3-ჯერ მოსვლის?
57. მონეტას აგდებენ 8-ჯერ. რამდენი ვარიანტია ერთდროულად საფასურის 5-ჯერ და გერბის 3-ჯერ მოსვლის?
59. მონეტას აგდებენ 8-ჯერ. რას უფრო მეტი შანსები აქვს: საფასურის 4-ჯერ მოსვლას, თუ გერბის 5-ჯერ მოსვლას და რამდენჯერ?
61. უნივერსიტეტის პირველკურსელმა უნდა აირჩიოს მეცნიერების, საზოგადოებრივი მეცნიერებების და მათემატიკის კურსები. თუკი მას შესაძლებლობა ექნება არჩევანი გააკეთოს შესაბამისად მეცნიერების 3, საზოგადოებრივი მეცნიერებების 4 და მათემატიკის 2 კურსიდან, მაშინ რამდენ სხვადასხვანაირად შეეძლება მას შეადგინოს სასწავლო პროგრამა?
63. მოცემული 10 ასოს – „აიიკსსსტტტტ“ რამდენი განსხვავებული განლაგება შეიძლება 10 ადგილას?
65. რამდენი სამნიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება ციფრებით 0, 1, 2, 3, 4 და 5, თუ თითოეული ციფრი გამოიყენება მხოლოდ ერთჯერ? რამდენი იქნება ამ სამნიშნა რიცხვებიდან ლუწი? რამდენი იქნება 330-ზე მეტი?
67. რამდენნაირად შეიძლება 4 ბიჭი და 3 გოგო დავსვათ მწკრივში, ისე რომ ბიჭები და გოგოები ისხდნენ მონაცვლეობით?
69. რამდენნაირად შეიძლება სწორ ხაზზე დაირგოს 2 მუხა, 3 ნაძვი და 2 ვერხვი, თუ ერთი და იმავე სახეობის ხეების გარჩევა შეუძლებელია?

71. 9 სპორტსმენი აპირებს 3 მანქანით წავიდეს გუდაურში, რომლებშიც ეტევა შესაბამისად 2, 4 და 5 მგზავრი. რამდენნაირად შეიძლება ამ 9 სპორტსმენის განთავსება მანქანებში?
73. რამდენნაირად შეიძლება 13 კარტის დარიგება 36 კარტიდან (ყოველი წარმომადგენელი ცხრა-ცხრა ცალია), რომელშიც შევა 5 "აგური", 3 „გული", 3 „ჯვარი" და 2 „ყვავი"?
75. 10 სატელევიზიო არხიდან 3 შემეცნებითია. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება 5 არხის შეძენა ისე, რომ მასში: ა) 2 იყოს შემეცნებითი? ბ) სულ ცოტა 2 მაინც იყოს შემეცნებითი? გ) არა უმეტეს ერთი იყოს შემეცნებითი?
77. ყუთში მოთავსებულია 500 ერთნაირი კონვერტი, რომელთაგან 50-ში დევს 100 ლარი; 100-ში – 25 ლარი და 350-ში – 10 ლარი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ კონვერტს, რომლის ყიდვა შეიძლება 25 ლარად. რა იქნება შემთხვევით ამოღებულ კონვერტში ფულის რაოდენობის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე? რა იქნება თითოეული ელემენტარული ხდომილების ალბათობა? რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებულ კონვერტში დევს 100 ლარზე ნაკლები? იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი კონვერტის შეძენით თქვენ არ იზარალებთ.
79. შეამოწმეთ შემდეგი იგივეობები: ა) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$;

ბ) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$; გ) $C_{2n}^n = \sum_{k=1}^{m}(C_n^k)^2$; დ) $\sum_{k=1}^{m} C_n^k = 2^n$.

81. საკოორდინატო სიბრტყის სათავიდან (0,0) იწყებენ მონეტის გადაადგილებას თითო-თითო უჯრით გვერდზე ((1,0)-სკენ) ან ზევით ((0,1)-სკენ) და n-ჯერადი გადაადგილების შემდეგ აღწევენ წერტილს (j,k), სადაც $j+k=n$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ჯერ გაკეთდა ყველა j გადაადგილება გვერდზე და შემდეგ k გადაადგილება ზევით; ბ) ჯერ გაკეთდა ყველა j გადაადგილება გვერდზე და შემდეგ k გადაადგილება ზევით ან ჯერ გაკეთდა ყველა k გადაადგილება ზევით და შემდეგ j გადაადგილება გვერდზე; გ) ყველა j გადაადგილება გვერდზე მოხდა ერთ სტრიქონში.
83. თქვენ ირჩევთ ხუთ რიცხვს და კიდევ ერთ ბონუს რიცხვს 1,...,44 რიცხვებიდან. მომგებიანი რიცხვები ირჩევა შემთხვევით (გვაქვს 5 მომგებიანი და 39 წამგებიანი რიცხვი). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მომგებიანი იქნება: ა) ოთხი

რიცხვი პირველი ხუთი რიცხვიდან, მაგრამ არა ბონუს რიცხვი; ბ) სამი რიცხვი პირველი ხუთი რიცხვიდან და ბონუს რიცხვი.

85. ურნაში მოთავსებულია n თეთრი და m შავი ბურთი. თქვენ შემთხვევით იღებთ ბურთებს დაბრუნების გარეშე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველად შავი ბურთი ამოღებული იქნება k-ური ამოღებისას, $k=1,2,...,n+1$.

87. ერთდროულად აგორებენ ორ სათამაშო კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ჯამური ქულა იქნება: ა) 5? ბ) არა უმეტეს 4-ის?

89. შემთხვევით იღებენ 3 წიგნს თაროდან, რომელზეც ძევს 4 რომანი, 3 ლექსების კრებული და ლექსიკონი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არჩეულ იქნება: ა) ლექსიკონი? ბ) 2 რომანი და 1 ლექსების კრებული?

91. საკრედიტო ბარათის მფლობელს დაავიწყდა უკანასკნელი სამი ციფრი და შემთხვევით აკრიფა ისინი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ის ისარგებლებს ბარათით, თუ ცნობილია, რომ ეს ციფრები განსხვავებულია.

93. 52 კარტი შემთხვევით იყოფა ორ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) თითოეულ ნაწილში ორ-ორი ტუზია; ბ) ყველა ტუზი ერთ ნაწილშია; გ) ერთ ნაწილში იქნება 1 ტუზი, ხოლო მეორეში კი 3 ტუზი.

95. ერთდროულად აგორებენ ორ სათამაშო კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ჯამური ქულა იქნება: ა) 5? ბ) არა უმეტეს 4-ის?

97. შემთხვევით იღებენ 3 წიგნს თაროდან, რომელზეც ძევს 4 რომანი, 3 ლექსების კრებული და ლექსიკონი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არჩეული იქნება: ა) ლექსიკონი? ბ) 2 რომანი და 1 ლექსების კრებული?

99. A და B არათავსებადი ხდომილებებია, $P(A)=0.4$ და $P(B)=0.5$. იპოვეთ: ა) $P(A\cup B)$; ბ) $P(\overline{A})$; გ) $P(\overline{A}\cap B)$; დ) $P(A\setminus B)$.

101. ფარავნის ტბაზე მოწყობილია ერთნაირი მიმზიდველობის მქონე 30 თევზსაჭერი ადგილი. 5 მეთევზეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თავაზობენ ამოირჩიონ თევზსაჭერი ადგილი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ისინი ამოირჩევენ სხვადასხვა ადგილებს.

103. ციფრებიდან 3, 4, 5 შემთხვევით ადგენენ ექვსნიშნა რიცხვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი იქნება კენტი, რომელშიც ციფრი 4 მონაწილეობს 1-ჯერ.

105. სასტუმროში 6 ერთადგილიანი ნომერია. სასტუმროში შემთხვევით მიდის 6 კაცი და 4 ქალი და თითოეულს მისვლისთანავე აძლევენ ნომერს, თუკი რომელიმე ნომერი თავისუფალია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნომრებს მიიღებს: ა) ექვსივე კაცი; ბ) 4 კაცი და 2 ქალი; გ) ერთი მაინც ქალი.

107. მაგიდაზე დგას შამპანიურის 5 სასმისი, თეთრი ღვინის 3 სასმისი და წითელი ღვინის 2 სასმისი. მაგიდასთან მივიდა 7 ადამიანი (რომელთათვისაც ყველა სასმელი ერთნაირად სასიამოვნოა) და აიღო თითო სასმისი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მაგიდაზე დარჩება ყველა სასმელის \თითო სასმისი.

109. პროდუქციის რეკლამირების მიზნით მწარმოებელმა გამოშვებული 500000 ნაწარმიდან 10000 აღჭურვა სპეციალური კუპონით. მყიდველი რომელსაც შეხვდებოდა 3 კუპონი ღებულობდა დამატებით 1 ნაწარმს, 4 კუპონის შემთხვევაში – 2 დამატებით ნაწარმს, ხოლო 4-ზე მეტი კუპონის შემთხვევაში – 3 დამატებით ნაწარმს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 5 ნაწარმის შეძენის შემთხვევაში მყიდველი დამატებით მიიღებს არანაკლებ 2 ნაწარმს.

111. რაიონულ ცენტრს გააჩნია ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ორი სახანძრო მანქანა. ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტული მანქანა თავისუფალია საჭიროების შემთხვევაში არის 0.99. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში არც ერთი მანქანა არ იქნება თავისუფალი? ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში თავისუფალი იქნება ერთი მაინც სახანძრო მანქანა? გ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში თავისუფალი იქნება ზუსტად ერთი სახანძრო მანქანა? დ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში თავისუფალი იქნება არა უმეტეს ერთი სახანძრო მანქანა?

113. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 2 კარტს დაბრუნების გარეშე. ისარგებლეთ ნამრავლის ალბათობის ფორმულით და იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი: ა) ნაკლებია 4-ზე; ბ) მეტია 2-ზე და ნაკლებია 9-ზე.

115. ცნობილია, რომ $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$. აჩვენეთ, რომ $P(AB)\le 3/8$.

117. შრომის ბირჟის მიერ შემოთავაზებული სამუშაო სამუშაოს მაძიებელს აკმაყოფილებს ალბათობით 0.01. რამდენმა სამუშაოს მაძიებელმა უნდა ისარგებლოს შრომის ბირჟის მომსახურებით, რომ ერთმა მაინც იპოვოს სამუშაო არანაკლებ 0.95-ის ტოლი ალბათობით.

119. ალბათობა იმისა, რომ ივანე (შესაბამისად, პავლე) ცოცხალი იქნება 20 წლის შემდეგ არის 0.6 (შესაბამისად, 0.9). რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 20 წლის შემდეგ: ა) არც ერთი იქნება ცოცხალი? ბ) ერთი მაინც იქნება ცოცხალი? გ) მხოლოდ ერთი იქნება ცოცხალი?

121. ალბათობა იმისა, რომ დაოჯახებული მამაკაცი (შესაბამისად, ქალი) უყურებს სერიალს არის 0.4 (შესაბამისად, 0.5). ალბათობა იმისა, რომ მამაკაცი უყურებს სერიალს პირობაში, რომ მისი ცოლი უყურებს მას ტოლია 0.7-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) დაოჯახებული წყვილი უყურებს სერიალს; ბ) ცოლი უყურებს სერიალს პირობაში, რომ მისი ქმარი უყურებს მას; გ) სულ ცოტა ერთი მეუღლეთაგანი უყურებს სერიალს.

123. მონეტა ისეა დამზადებული, რომ გერბის მოსვლის ალბათობა ორჯერ მეტია საფასურის მოსვლის ალბათობაზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 3-ჯერ აგდებისას საფასური მოვა 2-ჯერ?

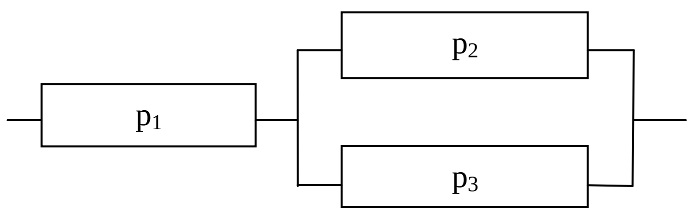
125. ვაჟის დაბადების ალბათობაა 0.515. ოჯახმა გადაწყვიტა, რომ შვილები გააჩინონ მეორე ვაჟის დაბადებამდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში იქნება 4 ბავშვი.

127. A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია, $P(AB) = P(B) = 1/4$. იპოვეთ $P(A+B)$.

129. მონეტას აგდებენ გერბის პირველ მოსვლამდე. რისი ტოლია აგდებათა უალბათესი რიცხვი?

131. ყუთში მოთავსებულია დეტალების ორი პარტია, რომელთაგან თითოეული შედგება ას-ასი დეტალისაგან და თითოეულში არის ათ-ათი წუნდებული დეტალი. ყუთიდან ამოიღეს ერთი დეტალი. დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილებები: A={ამოღებული დეტალი პირველი ყუთიდანაა} და B ={ ამოღებული დეტალი წუნდებულია}?

133. სისტემა შედგება 3 ელემენტისაგან, რომელთა მწყობრიდან გამოსვლა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია:



ამ ელემენტების გამართულად მუშაობის ალბათობებია: $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.6$. იპოვეთ ამ სისტემის გამართულად მუშაობის ალბათობა.

135. კარადაში ინახება 9 ერთნაირი ხელსაწყო. ცდის ჩასატარებლად შემთხვევით იღებენ კარადიდან 3 ხელსაწყოს და ცდის დასრულების შემდეგ აბრუნებენ კარადაში. გარეგნულად გამოუყენებელი და გამოყენებული ხელსაწყო ერთნაირად გამოიყურება. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ცდის სამჯერ ჩატარების შემდეგ კარადაში არ იქნება გამოუყენებელი ხელსაწყო.

137. ერთი მცდელობით სპორტსმენი საკუთარ რეკორდს აუმჯობებსებს P ალბათობით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სპორტსმენი შეჯიბრებაზე გააუმჯობესებს საკუთარ რეკორდს, თუ მას შეუძლია მხოლოდ ორი მცდელობა და, ამასთანავე, თუკი პირველი მცდელობით იგი გააუმჯობესებს რეკორდს, მაშინ მეორე მცდელობას არ იყენებს.

139. ორი მოთამაშე მონაცვლეობით აგდებეს წესიერ მონეტას. იგებს ის ვისაც პირველად მოუვა „გერბი“. იპოვეთ თითოეულის მოგების ალბათობა.

თავი III

შედგენილი ხდომილების ალბათობები

ალბათობათა შეკრების კანონი: თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ

$$P(A+B) = P(A) + P(B) .$$

საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობა: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

სხვაობის ალბათობის ფორმულა: თუ $B \subset A$, მაშინ $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

საზოგადოდ: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

თუ $A_i \cap A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

როცა ხდომილებები თავსებადია: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

საზოგადოდ:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) .$$

პირობითი ალბათობის ფორმულა

A **ხდომილების პირობითი ალბათობა** პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა B ხდომილებას აღინიშნება $P(A \mid B)$ (ან $P_B(A)$) სიმბოლოთი და

$$P(A \mid B) := P(A \cap B) / P(B) \text{, თუ } P(B) \neq 0 .$$

თვისებები:

$$0 \le P(A \mid B) \le 1 ;$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \mid B) = 0 ;$$

$$B \subset A \Rightarrow P(A \mid B) = 1 ;$$

თუ $A_i \cap A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P[(\sum_{i=1}^{n} A_i) \mid B] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B)$;

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) ;$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) ;$$

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A}\cup\overline{B});$$
$$P[(A\cup B)\,|\,C]=P(A\,|\,C)+P(B\,|\,C)-P[(A\cap B)\,|\,C];$$
$$P[(A\setminus B)\,|\,C]=P(A\,|\,C)-P[(A\cap B)\,|\,C].$$

ნამრავლის ალბათობის ფორმულა

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)=P(B)\cdot P(A\,|\,B).$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)\cdot P[C\,|\,(A\cap B)].$$

საზოგადოდ:

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)\cdots P(A_n\,|\,A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}).$$

ნებისმიერი A და B ხდომილებისათვის:

$$P(A\,|\,B)+P(\overline{A}\,|\,B)=1.$$

მართლაც, განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$P(A\,|\,B)+P(\overline{A}\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P[(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)]}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

შენიშვნა. საზოგადოდ $P(A\,|\,B)+P(A\,|\,\overline{B})\neq 1$.

დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ხდომილებები

A ხდომილებას ეწოდება B ხდომილებისაგან **დამოუკიდებელი,** თუ $P(A\,|\,B)=P(A)$ ან რაც იგივეა $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. თუ $P(A\,|\,B)\neq P(A)$, მაშინ გვაქვს **დამოკიდებული** ხდომილებები.

თუ A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია, მაშინ ხდომილებები $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებელია.

ორ A და B ხდომილებას ეწოდება **პირობითად დამოუკიდებელი** მოცემული C ხდომილების მიმართ, თუ $P(A\cap B\,|\,C)=P(A\,|\,C)P(B\,|\,C)$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ეწოდება **წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი** თუ: $P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\cdot P(A_j),\quad \forall i\neq j$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ეწოდება **ერთობლივად დამოუკიდებელი** თუ $\forall\quad k\le n$, $i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k$: $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$.

მაგალითი 1. ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს მათემატიკაში არის 2/3, ხოლო ფიზიკაში კი 4/9. ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს ერთ საგანში მაინც შეადგენს 4/5-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე

ორივე საგანში გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს მათემატიკაში, B – მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს ფიზიკაში. მაშინ ჩვენ გვაქვს, რომ: $P(A)=2/3$, $P(B)=4/9$ და $P(A\cup B)=4/5$. საპოვნელია – $P(A\cap B)$. ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

შესაბამისად, გვაქვს:

$$P(A\cap B)=2/3+4/9-4/5=14/45.$$

მაგალითი 3 *(მეტეოროლოგიური პარადოქსი).* ერთი მეტეოროლოგიური სადგური 10-დან 9 შემთხვევაში სწორად იცნობს ამინდს, ხოლო მეორე კი 10-დან 8 შემთხვევაში. 1 აგვისტოსათვის პირველმა სადგურმა იწინასწარმეტყველა „სველი" ამინდი, მეორე სადგურმა კი „მშრალი" ამინდი. ვინაიდან სხვა შესაძლებლობა არ არსებობს, ამ ორი ხდომილების გაერთიანება წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილებას: $\{\text{"სველი"}\}\cup\{\text{"მშრალი"}\}=\Omega$. ამასთანავე, ეს ხდომილებები ურთიერთგამომრიცხავია. შესაბამისად,

$$P(\{\text{"სველი"}\}\cup\{\text{"მშრალი"}\})=P\{\text{"სველი"}\}+P\{\text{"მშრალი"}\}=1.$$

შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A=\{\text{I სადგური სწორად იცნობს ამინდს}\},$$

$$B=\{\text{II სადგური სწორად იცნობს ამინდს}\}.$$

მაშინ, პირობის თანახმად $P(A)=0.9$ და $P(B)=0.8$. აქედან გამომდინარე, 1 აგვისტოს „სველი" ამინდს უნდა ველოდეთ ალბათობით $P\{\text{"სველი"}\}=0.9$, ხოლო „მშრალი" ამინდს ალბათობით $P\{\text{"მშრალი"}\}=0.8$. შესაბამისად,

$$1=P(\Omega)=P\{\text{"სველი"}\}\cup\{\text{"მშრალი"}\}=P\{\text{"სველი"}\}+P\{\text{"მშრალი"}\}=$$
$$=0.9+0.8=1.7.$$

სად დავუშვით შეცდომა? არ შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $P\{\text{"სველი"}\}=P(A)$ და $P\{\text{"მშრალი"}\}=P(B)$, თუნდაც იმის გამო, რომ A და B არ არის უთავსებადი (სინამდვილეში 0.9 არის

პირობითი ალბათობა იმისა, რომ 1 აგვისტოს იქნება „სველი“ ამინდი, პირობაში რომ პროგნოზს აკეთებს I სადგური).

მაგალითი 5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რიცხვებიდან 1,...,100 შემთხვევით ამორჩეული რიცხვი გაიყოფა ან 2-ზე, ან 3-ზე, ან 5-ზე.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A_k = \{\text{რიცხვი იყოფა } k - \text{ზე}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. მაშინ საძიებელია $P(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$. ცხადია, რომ: $A_2 \cap A_3 = A_6$, $A_2 \cap A_5 = A_{10}$, $A_3 \cap A_5 = A_{15}$ და $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$. ადვილი მისახვედრია, რომ:

$P(A_2) = 50/100 = 0.5$, $P(A_3) = 33/100 = 0.33$;
$P(A_5) = 20/100 = 0.2$; $P(A_6) = 16/100 = 0.16$;
$P(A_{10}) = 10/100 = 0.1$; $P(A_{15}) = 6/100 = 0.06$;
$P(A_{30}) = 3/100 = 0.03$.

ამიტომ სამი ხდომილებისათვის ჯამის ალბათობის ფორმულის მიხედვით ვღებულობთ, რომ:

$$P(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 0.5 + 0.33 + 0.2 - 0.16 - 0.1 - 0.06 + 0.03 = 0.74.$$

მაგალითი 7. ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს შაბათს იგივეა რაც ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს კვირას და არის 0.5. ასევე ცნობილია, რომ წვიმიან დღეს მოსდევს წვიამიანი დღე ალბათობით 0.7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A = \{\text{შაბათს იწვიმებს}\}$ და $B = \{\text{კვირას იწვიმებს}\}$, მაშინ ხდომილება – დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს არის $A \cup B$. გვაქვს: $P(A) = P(B) = 0.5$ და $P(B \mid A) = 0.7$. შესაბამისად,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B),$$

ხოლო ნამრავლის ალბათობის ფორმულა გვაძლევს, რომ

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) P(A) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35.$$

ამიტომ გვაქვს: $P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65$.

მაგალითი 9. განვიხილოთ ოჯახები, სადაც ორ-ორი ბავშვია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში ორივე ბავშვი ვაჟია თუ ცნობილია, რომ: ა) უფროსი ბავშვი – ვაჟია; ბ) ერთი ბავშვი მაინც – ვაჟია?

ამოხსნა. აქ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე ასეთია

$$\Omega = \{\text{ვვ}, \text{ვქ}, \text{ქვ}, \text{ქქ}\},$$

სადაც „ვ“ აღნიშნავს ვაჟს, ხოლო „ქ“ – ქალს. ჩავთვალოთ, რომ ოთხივე შედეგი ტოლალბათურია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – იყოს ხდომილება, რომ უფროსი ბავშვი – ვაჟია, ხოლო B – იყოს ხდომილება, რომ უმცროსი ბავშვი – ვაჟია. მაშინ $A \cap B$ – იქნება ხდომილება, რომ ორივე ბავშვი ვაჟია, ხოლო $A \cup B$ – კი იქნება ხდომილება, რომ ერთი ბავშვი მაინც ვაჟია. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობები იქნება: ა) $P(A \cap B \mid A)$ და ბ) $P(A \cap B \mid A \cup B)$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(A \cap B \mid A) = \frac{P[(A \cap B) \cap A]}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

მაგალითი 11. ორ კამათელს აგდებენ ორჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ამ აგდებებისას მოსულ ქულათა ჯამები იქნება 7 და 11.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i – ორი კამათლის i-ური ($i = 1,2$) გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი 7 ქულა, B_i – ორი კამათლის i-ური ($i = 1,2$) გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 11 ქულა. ცხადია, რომ ხდომილებათა წყვილები A_1 და B_2 და A_2 და B_1 დამოუკიდებელია, როგორც დამოუკიდებელი აგდებების შედეგები, ხოლო ხდომილებები $A_1 \cap B_2$ და $B_1 \cap A_2$ უთავსებადია. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)] = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) =$$

$$= P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}.$$

მაგალითი 13. თუ უთავსებად A და B ხდომილებებს გააჩნიათ არანულოვანი ალბათობები, მაშინ ისინი არადამოუკიდებელია. მართლაც, ვინაიდან $A \cap B = \varnothing$, ამიტომ თუ A და B იქნებოდა დამოუკიდებელი, მაშინ უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0,$$

რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$.

მაგალითი 15. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: $A = \{$კარტი „ტუზია“$\}$ და $B = \{$კარტი „გულისაა“$\}$. არის თუ არა A და B დამოუკიდებელი?

ამოხსნა. ინტუიციურად გასაგებია, რომ ეს ხდომილებები არ იძლევა ინფორმაციას მეორის შესახებ. „ტუზის“ ამოღების ალბათობაა 4/52=1/13 და თუ თქვენ გაქვთ ინფორმაცია, რომ ამოღებული კარტი „გულისაა“, მაშინ „ტუზის“ ალბათობა ისევ 1/13-ია. „ტუზის“ პროპორცია მთლიან დასტაში იგივეა რაც ცალკე განხილულ „გულებში“.

ახლა ფორმალურად შევამოწმოთ, რომ ეს ხდომილებები დამოუკიდებელია. გვაქვს:

$$P(A) = 4/52\,,\ P(B) = 13/52 = 1/4\,,$$
$$P(A \cap B) = P\{\text{"ტუზი" "გულისაა"}\} = 1/52$$

და, შესაბამისად, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. მაშასადამე, A და B დამოუკიდებელია.

მაგალითი 17 (დე მერეს ამოცანა). აზარტული თამაშების მოყვარული ფრანგი შევალიე დე მერე სთავაზობდა პარტნიორებს თამაშის შემდეგ პირობებს: ის გააგორებს ორ კამათელს 24-ჯერ და მოგებული იქნება თუ ერთჯერ მაინც მოვა ორი ექვსიანი. მისი მოწინააღმდეგე გააგორებს ოთხ კამათელს ერთჯერ და მოიგებს თუ ერთი ექვსიანი მაინც მოვა. ერთი შეხედვით დე მერე ეშმაკობს, მაგრამ სინამდვილეში ის უფრო ხშირად აგებდა, ვიდრე იგებდა და გაკვირვებულმა მიმართა ცნობილ მათემატიკოსს ბ. პასკალს. გავარკვიოთ რა უპასუხა მას პასკალმა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A = \{$ორი კამათლის 24-ჯერ გაგორებისას ერთჯერ მაინც მოვა ორი ექვსიანი$\}$;

$A_i = \{$ორი კამათლის i-ური გაგორებისას არ მოვა ორი ექვსიანი$\}$, $\quad i = 1, 2, \ldots 24$;

$B = \{$ოთხი კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა ერთი ექვსიანი მაინც$\}$;

$B_i = \{$ექვსიანი არ მოვა i-ურ კამათელზე$\}$, $i = 1,2,3,4$.

ცხადია, რომ A_i ხდომილებები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია და $\overline{A} = \bigcap\limits_{i=1}^{24} A_i$. გარდა ამისა, $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_{24}) = 35/36$. შესაბამისად,

$$P(\overline{A}) = P(\bigcap_{i=1}^{24} A_i) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_{24}) = (\frac{35}{36})^{24}.$$

ამიტომ შევალიე დე მერეს მოგების ალბათობა იქნება:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \approx 0.491404 .$$

ანალოგიურად გასაგებია, რომ B_i ხდომილებები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, $\overline{B} = \bigcap_{i=1}^{4} B_i$, $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 5/6$ და

$$P(\overline{B}) = P(\bigcap_{i=1}^{4} B_i) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \cdot P(B_4) = (\frac{5}{6})^4 .$$

შესაბამისად, შევალიე დე მერეს მოწინააღმდეგის მოგების ალბათობა იქნება:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.517747 .$$

როგორც ვხედავთ, $P(A) < P(B)$, რაც წარმოადგენს დე მერეს დაკვირვების მეცნიერულ ახსნას.

მაგალითი 19. თქვენ იცით, რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს 2 შვილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მას ჰყავს 2 ქალიშვილი, თუ ცნობილია, რომ მას ჰყავს სულ ცოტა ერთი ქალიშვილი?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა $\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$, სადაც ბიჭი (b) და გოგო (g) დალაგებულია დაბადების თარიღის მიხედვით. თუ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ბიჭისა და გოგოს დაბადება ერთნაირადაა შესაძლებელი და სხვადასხვა ბავშვის სქესი დამოუკიდებელია, მაშინ თითოეული ელემენტარული ხდომილების ალბათობაა 1/4. საძიებელი პირობითი ალბათობა იქნება

$$P(gg \mid bg, gb, gg) = \frac{P(gg)}{P(bg, gb, gg)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} .$$

მაგალითი 21. სისტემა შედგება დამოუკიდებლად ფუნქციონირებადი ორი კომპონენტისაგან, რომელთაგან თითოეული ფუნქციონირებს ალბათობით p . იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სისტემა იფუნქციონირებს კომპონენტების: ა) მიმდევრობითი შეერთებისას; ბ) პარალელური შეერთებისას.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A = \{$სისტემა ფუნქციონირებს$\}$,

$A_1 = \{$I კომპონენტი ფუნქციონირებს$\}$,

$A_2 = \{$II კომპონენტი ფუნქციონირებს$\}$.

მაშინ ა) შემთხვევაში $A = A_1 \cap A_2$, ხოლო ბ) შემთხვევაში კი – $A = A_1 \cup A_2$ და დამოუკიდებლობის გამო შესაბამისად გვაქვს:

ა) $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p \cdot p = p^2$;

ბ) $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) =$

$= 1 - (1-p)(1-p) = 1 - (1-p)^2$.

მაგალითი 23. ყუთში m ბურთია, მათ შორის n თეთრია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ორი ბურთის მიმდევრობით დაბრუნების გარეშე ამოღებისას: ა) პირველი ბურთი თეთრია; ბ) მეორე ბურთი თეთრია; გ) ორივე ბურთი თეთრია.

ამოხსნა. A_i იყოს ხდომილება, რომ i-ური ბურთი თეთრია ($i = 1,2$). მაშინ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

ა) $P(A_1) = n/m$.

გარდა ამისა,

$$P(A_2 \mid A_1) = (n-1)/(m-1) \text{ და } P(A_2 \mid \overline{A_1}) = n/(m-1).$$

ამიტომ ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად:

გ) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = n(n-1)/m(m-1)$.

ანალოგიურად,

$$P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2 \mid \overline{A_1}) = n(m-n)/m(m-1).$$

ამიტომ:

ბ) $P(A_2) = P[(A_1 \cap A_2) + (\overline{A_1} \cap A_2)] = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = n/m$.

მაგალითი 25. კარტების ნაკრებიდან (რომელშიც 36 კარტია) შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი „აგურისაა“, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი „სურათიანია“ წითელი ფერით. არიან თუ არა ეს ხდომილებები დამოუკიდებელი?

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$|\Omega| = 36,\ P(A) = 9/36 = 1/4,\ P(B) = 8/36 = 2/9 \text{ და}$$
$$P(A \cap B) = 4/36 \neq 1/4 \cdot 2/9 = P(A) \cdot P(B).$$

ე.ი. ეს ხდომილებები არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 27. დავუშვათ, ვაგდებთ სამ მონეტას. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A_1 – პირველი და მეორე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე;

A_2 – მეორე და მესამე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე;

A_3 – პირველი და მესამე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აქედან ნებისმიერი ორი ხდომილება დამოუკიდებელია, ხოლო სამივე ერთად დამოკიდებულია, ვინაიდან თუ ჩვენ გვეცოდინება რომ მაგალითად, A_1 და A_2 მოხდა, მაშინ ჩვენ ზუსტად ვიცით, რომ A_3 აგრეთვე მოხდა.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ ხდომილებები A_1, A_2 და A_3 წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 29 *(საუკეთესოს შერჩევაზე).* მოცემულია m ობიექტი გადანომრილი რიცხვებით $1,2,...,m$, ამასთანავე ისე, რომ ვთქვათ, ობიექტი 1 კლასიფიცირდება როგორც „საუკეთესო“, ..., ობიექტი m კი როგორც „ყველაზე უარესი“. იგულისხმება რომ ობიექტები შემოდის დროის მომენტებში $1,2,...,m$ შემთხვევითი რიგით (ანუ ყველა შესაძლო $m!$ გადანაცვლება ტოლალბათურია). დამკვირვებელს შეუძლია ორი მათგანის შედარებით თქვას რომელია უკეთესი და რომელი უარესი. საჭიროა საუკეთესოს შერჩევა იმ პირობით რომ ობიექტები წარმოიდგინება სათითაოდ და უკუგდებულის დამახსოვრება ხდება დამკვირვებლის მიერ. არ შეიძლება საუკეთესოდ მიჩნეულ იქნეს ის ობიექტი, რომელიც დაკვირვებული ობიექტებიდან ერთზე მაინც უარესია ან რომელიც უკვე იქნა უკუგდებული. ვთქვათ, დამკვირვებელმა ობიექტი შეარჩია k-ურ ნაბიჯზე ($k \le m$), ანუ დათვალიერებული ობიექტებიდან უკანასკნელი აღმოჩნდა ყველა წინაზე უკეთესი და ამიტომ მოხდა მისი შერჩევა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული ობიექტი იქნება საუკეთესო მთელი ერთობლიობიდან როგორც უკვე განხილულ, ისე ჯერ კიდევ განუხილავ ობიექტებს შორის?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ k-ური ობიექტი საუკეთესოა ყველა არსებულ m ობიექტს შორის და B იყოს ხდომილება, რომ k-ური ობიექტი საუკეთეოა დაკვირვებულ k ობიექტს შორის. გასაგებია, რომ მოსაძებნია პირობითი ალბათობა $P(A|B)$.

ვინაიდან $A \subset B$, ამიტომ $A \cap B = A$ და $P(A \cap B) = P(A)$. შესაბამისად, პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად

$$P(A|B) = P(A)/P(B)$$

ვინაიდან ობიექტების ყველა შესაძლო გადანაცვლებები ტოლალბათურია, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად ადვილი დასანახია, რომ

$$P(B)=\frac{(k-1)!}{k!}=\frac{1}{k} \text{ და } P(A)=\frac{(m-1)!}{m!}=\frac{1}{m}.$$

შესაბამისად, $P(A|B)=k/m$.

სტრატეგია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ საუკეთესო ობიექტის ამორჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მოწყობილია შემდეგნაირად. ავღნიშნოთ სიმბოლოთი m^* ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\frac{1}{m^*}+\cdots+\frac{1}{m-1}\le 1<\frac{1}{m^*-1}+\cdots+\frac{1}{m-1}.$$

საუკეთესო ობიექტის არჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მდგომარეობს იმაში, რომ დავაკვირდეთ და უკუვაგდოთ პირველი m^*-1 ობიექტი და შემდეგ გავაგრძელოთ დაკვირვება ისეთ τ^* მომენტამდე, როცა პირველად გამოჩნდება ყველა წინამორბედზე უკეთესი ობიექტი.

მაგალითად, თუ $m=1,...,10$, მაშინ m^*-ის შესაბამისი მნიშვნელობებია:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m-ოპტიმალური	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4

საკმაოდ დიდი m-ისათვის $m^*\approx m/e$ (სადაც e – ნეპერის რიცხვია, $e\cong 2.718$) და საუკეთესო ობიექტის არჩევის ალბათობა დაახლოებით ტოლია $1/e\cong 0.368$ (თუმცა, ერთი შეხედვით, ბუნებრივია, მოგვჩვენებოდა, რომ განსახილველი ობიექტების m რაოდენობის ზრდასთან ერთად, საუკეთესო ობიექტის არჩევის ალბათობა უნდა წასულიყო ნულისაკენ). ე. ი. *საუკეთესო ობიექტის არჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მდგომარეობს იმაში, რომ უნდა უკუვაგდოთ ობიექტების საერთო რაოდენობის დაახლოებით მესამედი და შემდეგ ავირჩიოთ პირველი ისეთი ობიექტი, რომელიც ყველა წინაზე უკეთესია.*

ამოცანები

1. როგორი C ხდომილებებისათვის მიიღებს ჯამის ალბათობის ფორმულა შემდეგ სახეს:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)?$$

გამოსახეთ ვენის დიაგრამით.

3. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A \cup B)$ და $P(A \cap B)$ ალბათობები A და B ხდომილებათა შემდეგი წყვილებისათვის:

ა) A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

ბ) A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

გ) A – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე მეტია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია;

დ) A – მოსულ ქულათა ჯამი 10-ზე ნაკლებია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 5-ზე მეტია;

ე) A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 8-ზე ნაკლებია;

ვ) A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 3-ზე ნაკლებია.

5. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ პირობითი ალბათობა $P_B(A)$ A და B ხდომილებათა შემდეგი წყვილებისათვის და მიუთითეთ დამოუკიდებლებია თუ არა ისინი:

ა) A – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა, B – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია;

ბ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 3 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 3 ქულა;

გ) A – მოსულ ქულათა სხვაობაა 1, B – მოსულ ქულათა ჯამია 5;

დ) A – მოსულ ქულათა სხვაობაა 2, B – მოსულ ქულათა ჯამია 8;

ე) A – მოსულ ქულათა ჯამია 7, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა;

ვ) A – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 6-ზე, B – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 10ზე.

7. მონეტას აგდებენ 4-ჯერ. დაამტკიცეთ, რომ A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულები არ არიან ერთობლივად დამოუკიდებელები:

ა) A – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – უკანასკნელი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი;

ბ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მეორე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი;

გ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, C – ოთხივე აგდებისას მოვიდა გერბი;

დ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, C – უკანასკნელი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი.

9. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. დაამტკიცეთ, რომ A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულებისათვის ადგილი აქვს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობას, მაგრამ არა აქვს ადგილი ერთობლივად დამოუკიდებლობას:

ა) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;

ბ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

გ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 2 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 5 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;

დ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

ე) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;

ვ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა.

11. ექვსი მონადირე ერთდროულად ესვრის გადამფრენ იხვს. სამი მათგანისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.4, ხოლო დანარჩენი სამისათვის – 0.6. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოახვედრებს ერთი მონადირე მაინც?

13. A და B არათავსებადი ხდომილებებია, $P(A)=0.4$ და $P(B)=0.5$. იპოვეთ: ა) $P(A\cup B)$; ბ) $P(\overline{A})$; გ) $P(\overline{A}\cap B)$; დ) $P(A\setminus B)$.

15. აგდებენ ორ სათამაშო კამათელს. თუ ცნობილია, რომ ერთ კამათელზე აღმოჩნდა 4 ქულა, მაშინ რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) მეორე კამათელზე აღმოჩნდება 5 ქულა? ბ) მეორე კამათელზე მოსული ქულა ნაკლები იქნება 4-ზე? გ) ორივე კამათელზე მოსული ჯამური ქულა მეტი იქნება 7-ზე?

17. ალბათობა იმისა, რომ ივანე (შესაბამისად, პავლე) ცოცხალი იქნება 20 წლის შემდეგ არის 0.6 (შესაბამისად, 0.9). რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 20 წლის შემდეგ: ა) არც ერთი იქნება ცოცხალი? ბ) ერთი მაინც იქნება ცოცხალი? გ) მხოლოდ ერთი იქნება ცოცხალი?

19. ალბათობა იმისა, რომ დაოჯახებული მამაკაცი (შესაბამისად, ქალი) უყურებს სერიალს არის 0.4 (შესაბამისად, 0.5).

ალბათობა იმისა, რომ მამაკაცი უყურებს სერიალს პირობაში, რომ მისი ცოლი უყურებს მას ტოლია 0.7-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) დაოჯახებული წყვილი უყურებს სერიალს; ბ) ცოლი უყურებს სერიალს პირობაში, რომ მისი ქმარი უყურებს მას; გ) სულ ცოტა ერთი მეუღლეთაგანი უყურებს სერიალს.

21. სამართლიანია თუ არა A და B ხდომილებებისათვის თანაფარდობა $P(A|B)+P(A|\overline{B})=1$? მოიყვანეთ დამტკიცება ან კონტრმაგალითი.

23. ამბობენ, რომ B ხდომილება შეიცავს ***დადებით ინფორმაციას*** და აღნიშნავენ $B\uparrow A$ (შესაბამისად, ***უარყოფით ინფორმაციას*** და აღნიშნავენ $B\downarrow A$) A-ს შესახებ, თუ $P(A|B)>P(A)$ (შესაბამისად, $P(A|B)<P(A)$). ქვემოთ მოყვანილი მტკიცებულებებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი? ა) თუ $B\uparrow A$, მაშინ $A\uparrow B$; ბ) თუ $A\uparrow B$ და $B\uparrow C$, მაშინ $A\uparrow C$; გ) თუ $B\uparrow A$, მაშინ $B\downarrow \overline{A}$; დ) $A\downarrow \overline{A}$.

25. დამზადებულია მონეტა, რომელზეც გერბის მოსვლის ალბათობაა p. ეს მონეტა ავაგდოთ 3-ჯერ და განვიხილოთ ხდომილებები: A={ერთხერ მაინც მოვიდა საფასური} და B={ყოველ აგდებაზე მოვიდა ერთი და იგივე მხარე}. p-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება A და B ხდომილებები დამოუკიდებელი?

27. აგორებენ ორ წესიერ სათამაშო კამათელს. A_k იყოს ხდომილება, რომ პირველზე მოვიდა k ქულა, ხოლო B_n – ორივეზე მოსულ ქულათა ჯამია n. k და n-ის რა მნიშვნელობებისათვის იქნებიან A_k და B_n დამოუკიდებლები?

29. აჩვენეთ, რომ თუ A, B და C დამოუკიდებელი ხდომილებებია, მაშინ A დამოუკიდებელია როგორც $B\cap C$-სგან, ისე $B\cup C$-სგან.

31. გარკვეული ტექსტის 1/3 ნაწილი ხმოვანია, ხოლო 2/3 ნაწილი – თანხმოვანი. შემთხვევით ირჩევენ 5 ასოს და გთავაზობენ ჩამოთვალოთ ეს ასოები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყველა ასო იქნება გამოცნობილი, თუ თქვენ: ა) ხმოვანსა და თანხმოვანს ასახელებთ თანაბარი ალბათობებით; ბ) ხმოვანს ასახელებთ ალბათობით 1/3, ხოლო თანხმოვანს – ალბათობით 2/3; გ) ყოველთვის ასახელებთ თანხმოვანს.

33. წესიერ სათამაშო კამათელს აგორებენ n-ჯერ. A_{ij} იყოს ხდომილება, რომ i-ური და j-ური გაგორებისას მოვიდა ერ-

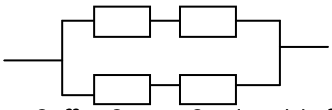
თი და იგივე ქულა, $1 \le i < j \le n$. აჩვენეთ, რომ A_{ij} ხდომილე-ბები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია, მაგრამ ერთობლი-ვად დამოუკიდებელი არ არის.

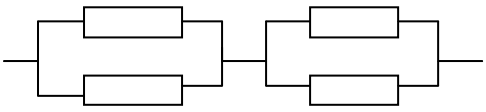
35. აგორებენ სამ წესიერ სათამაშომ კამათელს. რა არის ალბა-თობა იმისა, რომ მათში არ არის 5-იანი, თუ ცნობილია, რომ მათში არ არის 6-იანი.

37. სამი თოკის შემთხვევით შერჩეულ ორ ბოლოს აერთებენ შემთხვევით შერჩეულ ორ ბოლოსთან. ა) რას უდრის ალბა-თობა იმისა, რომ მიიღება ყველაზე გრძელი თოკი; ბ) განა-ზოგადეთ n თოკის შემთხვევისათვის.

39. ყუთში არის 10 თეთრი, 10 შავი და 10 წითელი ბურთი. ყუთი-დან შემთხვევით იღებენ 5 ბურთს დაბრუნებით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება ყველა ფერი?

41. გამოთვალეთ ქვემოთ მოყვანილი ორი სისტემის საიმედოო-ბა, თუ ცნობილია, რომ მათი თითოეული კომპონენტი ფუნ-ქციონირებს დამოუკიდებლად ალბათობით p:





43. თამაში მდგომარეობს შემდეგში: თქვენ დებთ 1 ლარს, აგო-რებენ წესიერ სათამაშო კამათელს და თუ კამათელზე მოვი-და 6 ქულა თქვენ იგებთ 4 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კარგავთ თქვენს 1 ლარს. თუ თქვენ გეძლევათ უფლება დაა-სახელოთ კამათლის გაგორებათა რიცხვი, რომლის შემდე-გაც თქვენ წყვიტავთ თამაშს, როგორ უნდა შეარჩიოთ ის ისე რომ მაქსიმალური იყოს თქვენი შანსი დარჩეთ მოგებაში და რას უდრის ამის ალბათობა?

45. წესიერ სათამაშო კამათელს აგორებენ n-ჯერ. როგორც კი რომელიმე ქულა მოვა, მას უწოდებენ *დაკავებულს* (მაგალი-თად, თუ $n=5$ და მოვიდა ქულები: 2, 6, 5, 6, 2, მაშინ რიცხვე-ბი 2, 5 და 6 დაკავებულია). A_k იყოს ხდომილება, რომ დაკავე-ბულია k რიცხვი. იპოვეთ A_1-ისა და A_2-ის ალბათობები.

47. $P(A)=3/4$, $P(B|A)=1/5$, $P(\overline{B}|\overline{A})=4/7$. იპოვეთ: ა) $P(A\bigcap B)$; ბ) $P(B)$; გ) $P(A|B)$.

49. $P(A)=13/25$, $P(B)=9/25$, $P(A|B)=5/9$. იპოვეთ: ა) $P(A\bigcap B)$; ბ) $P(B|A)$; გ) $P(A\bigcup B)$; დ) $P(\overline{A}|\overline{B})$; ე) $P(A\bigcup \overline{B})$.

51. მოყვარული სინოპტიკოსის თეორიის თანახმად თუ ერთ წელს იყო წყალდიდობა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი განმეორდება მომდევნო წელს არის 0.7, ხოლო თუ ერთ წელს არ იყო წყალდიდობა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი

არ იქნება მომდევნო წელს არის 0.6. გასულ წელს წყალდიდობა არ ყოფილა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წყალდიდობა იქნება: ა) მომდევნო სამ წელიწადს ზედიზედ; ბ) ზუსტად ერთჯერ მომდევნო სამი წლის განმავლობაში.

53. ჩანთაში დევს 25 დისკი, რომელთაგან ნაწილი თეთრია და დანარჩენი შავი. ჩანთიდან ერთდროულად შემთხვევით იღებენ ორ დისკს. ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დისკები ერთი და იგივე ფერისაა ემთხვევა ალბათობას იმისა, რომ ეს დისკები სხვადასხვა ფერისაა. რამდენი თეთრი დისკია ჩანთაში?

თავი IV

სრული ალბათობის ფორმულა. განმეორებითი ცდები

სრული ალბათობის ფორმულა

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **ხდომილებათა სრული სისტემა,** თუ $A_i \cap A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$ და $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (მაგალითად, A და $\overline{A}$).

თუ $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა ($P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$), მაშინ ადგილი აქვს **სრული ალბათობის ფორმულას:**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i) .$$

ბაიესის ფორმულა

თუ $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, $P(A_i) > 0$, $i = 1,2,...,n$, მაშინ ადგილი აქვს **ბაიესის ფორმულას:**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B \mid A_j)} .$$

განმეორებითი ცდები. ბერნულის ფორმულა

განვიხილოთ ერთი და იგივე ექსპერიმენტების სერია, რომლებიც ტარდება ერთი და იგივე პირობებში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამასთანავე, ყოველ კონკრეტულ ექსპერიმენტში ჩვენ განვასხვავებთ მხოლოდ ორ შედეგს: გარკვეული A ხდომილების მოხდენა (რომელსაც პირობითად **„წარმატებას“** უწოდებენ) და მისი არ მოხდენა – $\overline{A}$ (რომელსაც **„მარცხს“** უწოდებენ). A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ნებისმიერი ექსპერიმენტისათვის მუდმივია და ტოლია $P(A) = p$, სადაც $0 < p < 1$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p := q$ ($p + q = 1$).

ალბათობას იმისა, რომ n ექსპერიმენტში A ხდომილება მოხდა k-ჯერ გამოითვლება ე. წ. **ბერნულის ფორმულით:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} .$$

ამასთანავე, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$P_n(k+1) = \frac{(n-k)p}{(k+1)q} P_n(k) .$$

ალბათობების ერთობლიობას $P_n(k)$, როცა $k = 0,1,...,n$ ეწოდება **ალბათობების ბინომიალური განაწილება.**

ისეთ k_0 რიცხვს, რომლის შესაბამისი ალბათობა $P_n(k_0)$ უდიდესია $P_n(0)$, $P_n(1)$,...,$P_n(n)$ ალბათობებს შორის **უალბათესი რიცხვი** ეწოდება. უალბათესი რიცხვი გვიჩვენებს n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი. უალბათესი რიცხვი წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის მთელ ამონახსნს: $np - q \le k_0 \le np + p$.

პუასონის ფორმულა

თანაფარდობას $\lim\limits_{np\to\lambda} p_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ **პუასონის ფორმულა** ეწოდება. იგი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილების k-ჯერ მოხდენის ალბათობა (როცა n საკმაოდ დიდია, ხოლო p საკმაოდ მცირე, ამასთანავე $np = \lambda < 15$) პუასონის მიახლოებითი ფორმულით: $p_n(k) \approx \lambda^k e^{-\lambda} / k!$.

ამ თავში ჩვენ შევეხებით პირობითი ალბათობის გამოყენების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ასპექტს. ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ როდესაც ალბათობის გამოთვლა პირდაპირი გზით საკმაოდ ძნელია, მაშინ შესაძლებელია პრობლემის გაყოფა ისეთ კერძო შემთხვევებად, სადაც პირობითი ალბათობები ადვილი გამოსათვლელია. მაგალითად, დავუშვათ, რომ თქვენ ყიდულობთ ნახმარ ავტომობილს ქალაქში, სადაც ქუჩების დატბორვა თავსხმა წვიმების შემთხვევაში ჩვეულებრივი პრობლემაა. თქვენ იცით, რომ ნახმარი ავტომობილების დაახლოებით 5% ადრე დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო და სპეციალისტების შეფასებით ასეთი ავტომობილების 80%-ს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები, ხოლო თუ ნახმარი ავტომობილები ადრე არ იყო დაზიანებული წყალდიდობის გამო, მაშინ ამ ავტომობილების მხოლოდ 10%-ს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ ავტომობილს მოგვიანებით შეექმნება ძრავის პრობლემები?

ამ სიტუაციაში ცხადია, რომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ალბათობები ორივე განსხვავებულ შემთხვევაში: წყალდიდობით დაზიანებულ და დაუზიანებელ შემთხვევებში.

პირველ რიგში შევხედოთ ამ ამოცანას პროპორციის თვალსაზრისით. ყოველი გაყიდული 1000 ავტომობილიდან 50 არის ადრე წყალდიდობით დაზიანებული და მათი 80%-ს ანუ 40 ავტომობილს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები. 950 ავტომობილი ადრე არ იყო წყალდიდობით დაზიანებული და მათ 10%-ს ანუ 95 ავტომობილს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. შესაბამისად, ჩვენ ვღებულობთ სულ 40 + 95 = 135 ავტომობილს 1000-დან და ალბათობა იმისა, რომ მომავალში ავტომობილს შეექმნება პრობლემები იქნება 135 : 1000 = 0.135.

თუ შემოვიღებთ ხდომილებებს: B ={წყალდიდობით დაზიანებული} და A ={ავტომობილს შეექმნება პრობლემები}, მაშინ ვნახეთ, რომ $P(A)=0.135$. მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ $P(B)=0.05$, $P(\overline{B})=0.95$, $P(A\,|\,B)=0.8$ და $P(A\,|\,\overline{B})=0.1$ და ჩვენ მიერ გამოთვლილი ალბათობა ფაქტიობრივად არის $0.8\times0.05+0.1\times0.95=0.135$. *როგორც ვხედავთ საძიებელი ალბათობა წარმოადგენს ორი განსხვავებული შემთხვევის (წყალდიდობით დაზიანებული და დაუზიანებელი) ალბათობების შეწონილ საშუალოს, სადაც წონები არის ამ შემთხვევების შესაბამისი ალბათობები. ეს მაგალითი ახდენს სრული ალბათობის ძალიან მნიშვნელოვანი ფორმულის გამოყენების ილუსტრირებას, რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:*

$$P(A)=P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B}).$$

მაგალითი 1. სიტყვიდან „სამშობლო“ შემთხვევით ვიღებთ ორ ასოს და შემდეგ შემთხვევით ვდებთ უკან ამ ასოებს ცარიელ ადგილებზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ისევ მივიღებთ სიტყვას „სამშობლო“.

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი განსხვავებული შემთხვევა: 1) ამოღებულია ორივე „ო“, რომელ შემთხვევაშიც ნებისმიერი დაბრუნებისას მიიღება სიტყვა „სამშობლო“ და 2) ამოღებულია სხვადასხვა ასო, რომელ შემთხვევაშიც სიტყვა „სამშობლო“ მიიღება თუ ასოების დაბრუნება მოხდება მათ საწყის მდებარეობაზე. ცხადია, რომ ეს ორი შემთხვევა გამორიცხავს ერთმანეთს და ამოწურავს ყველა შესაძლებლობებს. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენება შესაძლებელია. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აღწერის გარეშე ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ხდომილებები:

$A = \{$მიიღება სიტყვა "სამშობლო"$\}$ და

$B = \{$ორივე ასოა "ო"$\}$.

ცხადია, რომ $P(A|B)=1$. თუ ასოები განსხვავებულია, მაშინ ისინი თავიანთ მდებარეობას დაუბრუნდება ალბათობით 1/2, ანუ $P(A|\overline{B})=1/2$. ორი ასოს შერჩევა 8-დან შესაძლებელია $C_8^2=28$ სხვადასხვანაირად, რომელთა შორის მხოლოდ ერთ შემთხვევაში შეგვხვდება ორი „ო“. შესაბამისად, $P(B)=1/28$ და $P(\overline{B})=27/28$. ამიტომ, საბოლოოდ გვექნება:

$$P(A)=\frac{1}{28}\times 1+\frac{27}{28}\times\frac{1}{2}=\frac{29}{56}.$$

მსჯელობის ეს გ ზა ხშირად საკმარისია ამოცანის ამოხსნელად და იმავდროულად იგი თავიდან გვაცილებს ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აგების პროცედურას.

მაგალითი 3. გაქვთ ორი ყუთი და ათ-ათი ცალი შავი და თეთრი ბურთი. როგორ უნდა გადაანაწილოთ ბურთები ყუთებში ისე, რომ მაქსიმალური იყოს ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A={ამოღებულია თეთრი}, B={შერჩეულია I ყუთი}. მაშინ ბურთების გადანაწილების შემდეგ ალბათობას გამოვითვლით სრული ალბათობის ფორმულით: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$, სადაც $P(B)=P(\overline{B})=1/2$.

განვიხილოთ სამი შესაძლო შემთხვევა:

1) ერთ ყუთში ჩავდოთ ოცივე ბურთი, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად მივიღებთ, რომ:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{20}+0\right)=\frac{1}{4};$$

2) თითოეულ ყუთში განვათავსოთ 10 ბურთი. ერთ ყუთში ჩავდოთ n თეთრი ბურთი ($0\le n\le 10$), ხოლო მეორეში კი $10-n$ თეთრი ბურთი. მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P(A)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{10}+\frac{10-n}{10}\right)=\frac{1}{2};$$

3) ერთ ყუთში ჩავდოთ $10+k$ ($1\le k\le 9$) ბურთი, ხოლო მეორეში კი $10-k$ ბურთი. პირველ ყუთში ჩავდოთ $k+n$ ($1\le k+n\le 10$) თეთრი ბურთი, ხოლო მეორეში კი $10-k-n$ თეთრი ბურთი. მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(A)=\frac{1}{2}(\frac{k+n}{10+k}+\frac{10-k-n}{10-k})=\frac{1}{2}(\frac{k}{10+k}+1+\frac{n}{10+k}-\frac{n}{10-k})\geq\frac{1}{2}(\frac{k}{10+k}+1),$$

სადაც უკანასკნელი უტოლობა მიიღება იმ ფაქტიდან, რომ

$$\frac{n}{10+k}-\frac{n}{10-k}\leq 0.$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ თანაფარდობით $\max\limits_{1\leq k\leq 9}\frac{k}{10+k}=\frac{9}{19}$, მაშინ დავინახავთ, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში $P(A)$ ალბათობის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება

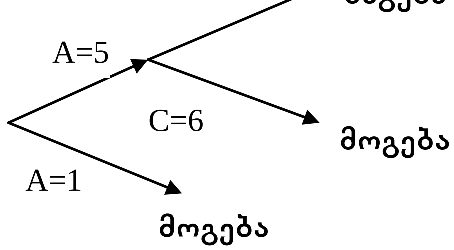
$$\frac{1}{2}\times(\frac{9}{19}+1)=\frac{14}{19}.$$

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ვასკვნით, რომ საძიებელი ალბათობა მაქსიმალური იქნება, როცა ერთ ყუთში მოვათავსებთ 19 ბურთს, რომელთა შორის 9 არის თეთრი, ხოლო მეორეში კი შესაბამისად მხოლოდ ერთ თეთრ ბურთს.

შევნიშნოთ, რომ ეს ალბათობა მინიმალური იქნება, როცა ოცივე ბურთს მოვათავსებთ ერთ ყუთში.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ ერთ მარტივ მაგალითს სათამაშო კამათლებზე, რომელშიც ერთი შეხედვით თქვენ არ უნდა გქონდეთ უპირატესობა, მაგრამ სინამდვილეში ეს ასეა.

ხისებრი დიაგრამა წარმოადგენს სრული ალბათობის ფორმულის ილუსტრირების საუკეთესო საშუალებას. აქ ყოველი განსხვავებული შემთხვევა წარმოიდგინება ხის ტოტის სახით და გრძელდება მანამ სანამ არ დადგება ჩვენთვის საინტერესო დადებითი ან უარყოფითი პასუხი. თითოეულ განშტოების ალბათობა გამოითვლება მისი ტოტების შესაბამისი ალბათობების გადამრავლებით, ხოლო საძიებელი ალბათობა მიიღება განშტოებების ალბათობების შეკრებით. ქვემოთ მოყვანილია ა) შემთხვევის შესაბამისი ხისებრი დიაგრამა (დენდროგრამა):



მაგალითი 5. ორ ერთნაირი ყუთიდან ერთში მოთავსებულია a თეთრი და b შავი ბურთი, ხოლო მეორეში კი c თეთრი და d

შავი ბურთი. თითოეული ყუთიდან შემთხვევით იღებენ თითო ბურთს და ათავსებენ მესამე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მესამე ყუთიდან ამოღებული ერთი ბურთი იქნება თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: A_i $(i=1,2)$ − i-ური ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია; B − მესამე ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია. მესამე ყუთში შესაძლებელია აღმოჩნდეს: ორი თეთრი ბურთი – ხდომილება $A_1 \cap A_2$; ერთი თეთრი და ერთი შავი ბურთი – ხდომილება $(A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$ ან ორი შავი ბურთი – ხდომილება $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. გასაგებია, რომ ხდომილებები $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \overline{A_2}$, $\overline{A_1} \cap A_2$ და $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ ქმნის ხდომილებათა სრულ სისტემას. აღვნიშნოთ ეს ხდომილებები შესაბამისად H_1, H_2, H_3 და H_4-ით. ცხადია, რომ ხდომილებათა წყვილები A_1, A_2; $A_1, \overline{A_2}$; $\overline{A_1}, A_2$ და $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ დამოუკიდებელია. ამიტომ გვაქვს:

$$P(H_1) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d};$$

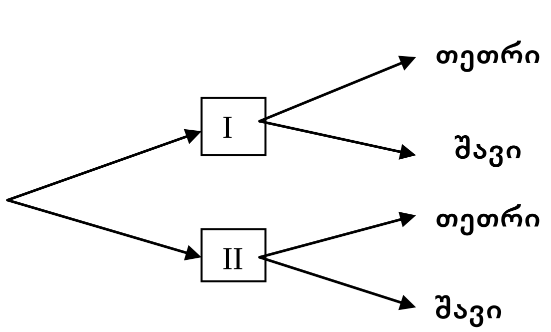
$$P(H_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d}; \; P(H_3) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d}; \; P(H_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d}.$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ: $P(B|H_1)=1$; $P(B|H_2)=P(B|H_3)=1/2$; $P(B|H_4)=0$. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, ვღებულობთ:

$$P(B) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot 1 + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d} \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}.$$

შენიშვნა. იგივე იქნება ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი თეთრია. მართლაც, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ხდომილებათა სრული სისტემა იქნება: შეირჩა I ყუთი (ავღნიშნოთ ის C_1-ით) ან შეირჩა II ყუთი (ავღნიშნოთ ის C_2-ით, ცხადია, რომ $P(C_1)=P(C_2)=1/2$), ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა გვაძლევს:

$$P(B) = P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) = \frac{1}{2} \cdot [\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}] = \frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}.$$



ზოგჯერ ჩვენ გვჭირდება მრავალჯერადი პირობითობა. მაგალითად, $P(A|B)$ პირობითი ალბათობის გამოსათვლელად შეიძლება მომავალში საჭირო გახდეს გარკვეული C ხდომილების პირობაში მუშაობა. ვინაიდან პირობითი ალბათობა აგრეთვე ალბათობაა, აქ ახალი არაფერია, მაგრამ შესაბამისი სრული ალბათობის ფორმულა უფრო რთულად გამოიყურება. კერძოდ, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap \overline{C})P(\overline{C}|B).$$

ახლა განვიხილოთ სიტუაცია, როცა ცნობილია პირობითი ალბათობები ერთი მიმართულებით და გამოსათვლელია „შებრუნებული" პირობითი ალბათობები. შესაბამის შედეგს წარმოადგენს ბაიესის ფორმულა, რომელიც მიიღება ნამრავლის ალბათობისა და სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით და რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს სახე:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}.$$

მაგალითი 7. სიცრუის დეტექტორი (პოლიგრაფი) 95 % შემთხვევაში იძლევა ზუსტ პასუხს. ცნობილია, რომ საშუალოდ ყოველი ათასი ადამიანიდან ერთი ცრუობს. განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული ადამიანი, რომელიც გადის ტესტირებას დეტექტორზე და რომელსაც გადაწყვეტილი აქვს იცრუოს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დეტექტორი აღმოაჩენს, რომ ის ცრუობს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: L={ადამიანი ცრუობს}, L_P={დეტექტორმა დაადგინა რომ ადამიანი ცრუობს}. ამოცანის პირობის თანახმად $P(L) = 1/1000 = 0.001$ და $P(L_P|L) = P(\overline{L_P}|\overline{L}) = = 95/100 = 0.95$. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P(L|L_P)$, რომელიც ბაიესის ფორმულის თანახმად იქნება:

$$P(L|L_P) = \frac{P(L)P(L_P|L)}{P(L)P(L_P|L) + P(\overline{L})P(L_P|\overline{L})} = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999} \approx 0.02.$$

ალბათობის თეორია განსაკუთრებით ხშირად გამოიყენება სამართალწარმოებაში, როცა მტკიცებეულებებში ფიგურირებს ადამიანის „დნმ". განვიხილოთ ე. წ. კუნძულის ამოცანა.

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა მიდგომამ შეიძლება სხვადასხვა პასუხამდე მიგვიყვანოს.

მაგალითი 9. *თქვენ იცით რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს ორი შვილი. ერთ ღამეს თქვენ ფანჯარას ესროლეს ქვა და დაინახეთ ბავშვი, რომელმაც თქვენი ბაღიდან შეირბინა მეზობლის სახლში. სიბნელე იყო და თქვენ მხოლოდ ის გაარჩიეთ, რომ ბავშვი ბიჭი იყო. მეორე დღეს დარეკეთ მეზობლის კარებზე და კარი გაგიღოთ ბიჭმა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბიჭი დამნაშავეა?*

ამოხსნა. ამოვხსნათ ეს ამოცანა ორი გზით. **პირველი მიდგომა:** თუ მეზობლის მეორე შვილი გოგოა, მაშინ თქვენ იცით, რომ დამნაშავე ბიჭია, ხოლო თუ მეზობლის მეორე შვილიც ბიჭია, მაშინ ბიჭი რომელმაც კარი გაგიღოთ თანაბარი ალბათობებით შეიძლება იყოს დამნაშავეც და უდანაშაულოც. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ ხდომილებას C={ბავშვი, რომელმაც გააღო კარი, დამნაშავეა}, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად მივიღებთ, რომ:

$$P(C)=P(\text{ბიჭი})P(C\,|\,\text{ბიჭი})+P(\text{გოგო})P(C\,|\,\text{გოგო})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}.$$

მეორე მიდგომა: შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა ანალოგიურია ე. წ. კუნძულის ამოცანის, სადაც გენოტიპი შეცვლილია სქესით, ხოლო ბატონი ზეზვა კი ბავშვით, რომელმაც კარი გააღო. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს: $n=2$ და $p=1/2$ და, შესაბამისად,

$$P(C)=\frac{1}{1+(n-1)p}=\frac{1}{1+(2-1)\times(1/2)}=\frac{2}{3}.$$

განსხვავებულმა მიდგომებმა მოგვცა განსხვავებული შედეგები! როგორც წესი, საჭიროა ძალიან დიდი სიფრთხილე პირობაში მდგომი ხდომილებების შერჩევისას. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი ბავშვი ერთნაირი ალბათობით წყვიტავს გავიდეს თავისი ეზოდან და ქვა ესროლოს თქვენს ფანჯარას და ნებისმიერი ბავშვი ერთნაირი ალბათობით აღებს კარს. ორი ბავშვის სქესის ნებისმიერი კომბინაციისათვის, ჩვენ შეგვიძლია შემთხვევით ისე შევარჩიოთ ვინ დამნაშავეა და ვინ აღებს კარს, რომ სქესის ნებისმიერი კომბინაცია დაიყოს ოთხ ერთნაირად შესაძლებელ შემთხვევად. ბიჭი და გოგო აღვნიშნოთ შესაბამისად b და g ასოებით, ბავშვი რომელმაც გააღო კარი აღვნიშნოთ ქვედა ინდექსით d, ხოლო ბავშვი რომელიც დამნაშავეა – ზედა ინდექსით c. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 16 ერთნაირად შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega=\{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b_d g^c, b^c g_d, bg_d^c, g_d^c b, g_d b^c, g^c b_d, gb_d^c, g_d^c g, g_d g^c, g^c g_d, gg_d^c\}$$

და ხდომილება – ბავშვი, რომელმაც კარი გააღო დამნაშავე არის:

$$C=\{b_d^c b, bb_d^c, b_d^c g, bg_d^c, g_d^c b, gb_d^c, g_d^c g, gg_d^c\}.$$

რომელი ხდომილება უნდა განვიხილოთ პირობაში? ჩვენ ვიცით ორი რამ: დამნაშავე ბავშვი ბიჭია და ბიჭმა გააღო კარი. ეს ხდომილებებია შესაბამისად:

$$A=\{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b^c g_d, g_d b^c, gb_d^c\},$$

$$B=\{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b_d g^c, g^c b_d, gb_d^c\}$$

და პირობაში ჩვენ უნდა განვიხილოთ მათი თანაკვეთა:

$$A\cap B=\{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, gb_d^c\}.$$

ვინაიდან ოთხი ამ 6 ელემენტარული ხდომილებიდან არის C-ში და Ω-ს ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად მოსალოდნელია, ამიტომ:

$P\{$ბავშვი, რომელმაც გააღო კარი, დამნაშავეა$\}=\mathrm{P(C|A\cap B)}=2/3,$

რაც შესაბამისობაშია ე. წ. კუნძულის ამოცანასთან.

გამოდის, რომ პირველი მიდგომა გვაძლევს მცდარ ამოხსნას. ისმის კითხვა – რატომ? როცა ჩვენ ვითვლიდით ალბათობებს P(ბიჭი) და P(გოგო), ჩვენ არაცხადად ვიხილავდით პირობაში B ხდომილებას, მაგრამ დაგვავიწყდა A პირობა. ალბათობა P(ბიჭი) უნდა გამოგვეთვალა როგორც

$$P(\text{მეორე ბავშვი ბიჭია}\mid \mathrm{A\cap B})=\frac{2}{3}$$

და არა 1/2. როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბავშვი ბიჭია უფრო მაღალია ახლა, როცა ვიცით, რომ დამნაშავე ბავშვი ბიჭია. *პირობის დადგენა საკმაოდ ფაქიზი საკითხია და საჭიროა, რომ პირობა იყოს არსებული ინფორმაციის სრულიად ადეკვატური, არც მეტი და არც ნაკლები.* ახლა ჩამოვაყალიბებთ პირველი ამოხსნის კორექტულ ვერსიას – ყველაფერი უნდა გამოითვალოს $\mathrm{A\cap B}$ ხდომილების პირობაში და გვექნება:

$$P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}.$$

მაგალითი 11. მაღაზიაში შემოსული ტელევიზორების შესაბამისად 2, 5 და 3 ნაწილი დამზადებულია I, II და III ფირმის მიერ. საგარანტიო დროის განმავლობაში I, II და III ფირმის მიერ შემოტანილი ტელევიზორი მოითხოვს რემონტს შესაბამისად 15%, 8% და 6% შემთხვევებში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მაღაზიის მიერ გაყიდული ტელევიზორი საგარანტიო დროის განმავლობაში მოითხოვს რემონტს (ხდომილება B).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებათა სრული სისტემა: A_i – გაყიდული ტელევიზორი დამზადებულია i-ური ფირმის მიერ $(i = 1, 2, 3)$. პირობის თანახმად მაღაზიაში არსებული ტელევიზორებიდან I, II და III ფირმის მიერ დამზადებულია შესაბამისად $2x$, $5x$ და $3x$ ტელევიზორი. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

$$P(A_1) = 2x/10x = 1/5,\ P(A_2) = 5x/10x = 1/2,$$
$$P(A_3) = 3x/10x = 3/10.$$

გარდა ამისა, ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს:

$$P(B \mid A_1) = 15/100 = 0.15,\ P(B \mid A_2) = 8/100 = 0.08,$$
$$P(B \mid A_3) = 6/100 = 0.06.$$

საბოლოოდ, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, ვღებულობთ:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{1}{5} \cdot 0.15 + \frac{1}{2} \cdot 0.08 + \frac{3}{10} \cdot 0.06 = 0.088.$$

მაგალითი 13. კლუბის წევრებმა უნდა აირჩიონ კლუბის პრეზიდენტი. ალბათობა იმისა, რომ არჩეული იქნება ბექა, ნიკა ან ლუკა შესაბამისად არის 0.3, 0.5 და 0.2. თუ აირჩევენ ბექას, ნიკას ან ლუკას, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ გაიზრდება კლუბის საწევრო გადასახადი შესაბამისად არის 0.8, 0.1 და 0.4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კლუბის პრეზიდენტად არჩეულ იქნა ლუკა, თუ ცნობილია, რომ საწევრო გადასახადი გაიზარდა.

ამოხსნა. განვიხილოთ ხდომილებები: A_1, A_2, A_3 – კლუბის პრეზიდენტად არჩეულ იქნა ბექა, ნიკა, ლუკა; B – საწევრო გადასახადი გაიზარდა. ცხადია, რომ A_1, A_2, A_3 ხდომილებები ქმნის ხდომილებათა სრულ სისტემას და ბაიესის ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3)}.$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$P(A_1)=0.3,\ P(A_2)=0.5,\ P(A_3)=0.2;$$
$$P(B\,|\,A_1)=0.8,\ P(B\,|\,A_2)=0.1,\ P(B\,|\,A_3)=0.4.$$

ამიტომ

$$P(A_3\,|\,B)=\frac{0.2\cdot 0.4}{0.3\cdot 0.8+0.5\cdot 0.1+0.2\cdot 0.4}=\frac{0.08}{0.24+0.05+0.08}=\frac{8}{37}.$$

მაგალითი 15. მოქალაქემ იპოვა სხვისი საკრედიტო ბარათი, რომლის კოდი ოთხციფრიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოქალაქეს ეყოფა ორი მცდელობა კოდის გამოსაცნობად (მეტ შესაძლებლობას ბანკომატი არ იძლევა).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i $(i=1,2)$ − მოქალაქემ პირველად კოდი გამოიცნო i-ური მცდელობისას. მაშინ საძიებელი ხდომილება იქნება $A=A_1\cup(\overline{A_1}\cap A_2)$. ვინაიდან A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებები არათავსებადია, მითუმეტეს არათავსებადი იქნება ხდომილებები A_1 და $\overline{A_1}\cap A_2$. ამიტომ ხდომილებათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობების ფორმულების თანახმად გვაქვს:

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1}\cap A_2)=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\,|\,\overline{A_1}),$$

სადაც

$$P(A_1)=1/10^4,\ P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-1/10^4,\ P(A_2\,|\,\overline{A_1})=1/(10^4-1).$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(A)=1/10^4+(1-1/10^4)\cdot[1/(10^4-1)]=2/10^4.$$

დავალება. დავუშვათ, რომ შესამოწმებელი ჯგუფის 1% ავადმყოფია, ხოლო დანარჩენი 99% კი ჯანმრთელი. ადამიანების შერჩევა ხდება შემთხვევით და ამიტომ

$$P(\text{ავადმყოფი})=1\%=0.01 \text{ და } P(\text{ჯანმრთელი})=99\%=0.99.$$

ვიგულისხმოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ადამიანს, რომელსაც არა აქვს ავადმყოფობა, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივიღოთ მცდარი დადებითი შედეგი, ე.ი.

$$P(\text{დადებითი}\,|\,\text{ჯანმრთელი})=1\% \text{ და}$$
$$P(\text{უარყოფითი}\,|\,\text{ჯანმრთელი})=99\%.$$

დაბოლოს, დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ავადმყოფ ადამიანს, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივიღოთ მცდარი უარყოფითი შედეგი, ე.ი.

$$P(\text{უარყოფითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 1\% \text{ და}$$
$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 99\%.$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი; ბ) ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; გ) ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; დ) ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი.

განვიხილოთ რეალური სიტუაცია, რომელიც გვიჩვენებს ერთი შეხედვით მოულოდნელ განსხვავებას $P(A \mid B)$ ***და*** $P(B \mid A)$ ***პირობით ალბათობებს შორის.*** *იმისათვის, რომ გამოვავლინოთ სერიოზული ავადმყოფობის მქონე ადამიანები ადრეულ სტადიაზე, ხდება ადამიანების დიდი ჯგუფის ტესტირება. მიუხედავად წინასწარი შემოწმების სარგებლობისა, ამ მიდგომას გააჩნია უარყოფითი მხარე: თუ ადამიანს სინამდვილეში არ გააჩნია ავადმყოფობა და საწყისმა ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი (დაუდგინა ავადმყოფობა), ის იქნება სტრესულ მდგომარეობაში (რაც, თავის მხრივ, უარყოფითად მოქმედებს მის ცხოვრებაზე) სანამ უფრო წარმატებული ტესტი არ აჩვენებს, რომ ის ჯანმრთელია. ამ პრობლემის მნიშვნელობა შესაძლებელია კარგად გავიგოთ პირობითი ალბათობების ტერმინებში.*

წინა დავალების მონაცემებში გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ტესტი აჩვენებს დადებით შედეგს. სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P(\text{დადებითი}) = P(\text{ჯანმრთელი})P(\text{დადებითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) +$$
$$+P(\text{ავადმყოფი})P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198.$$

როგორც ცნობილია, მაგალითის პირობებში

$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 99\%.$$

გამოვთვალოთ ახლა შებრუნებული პირობითი ალბათობა, რისთვისაც ვისარგებლოთ პირობითი ალბათობის განმარტებითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულებით. მაშინ ზემოთ მიღებული

$$P(\text{დადებითი}) = 0.0198 = 1.98\%$$

შედეგის თანახმად:

$$P(\text{ავადმყოფი} | \text{დადებითი}) = \frac{P(\text{ავადმყოფი} \cap \text{დადებითი})}{P(\text{დადებითი})} =$$

$$= \frac{P(\text{ავადმყოფი})\ P(\text{დადებითი} | \text{ავადმყოფი})}{1.98\%} = \frac{1\% \cdot 99\%}{1.98\%} = 50\% .$$

როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა რომ ტესტი მოგვცემს დადებით შედეგს, პირობაში რომ ადამიანი ავადმყოფია ტოლია 99%-ის, მაშინ როდესაც პირობითი ალბათობა იმისა რომ ადამიანი ავადმყოფია, პირობაში რომ ტესტმა მოგვცა დადებითი შედეგი არის მხოლოდ 50%. აქ შერჩეული მონაცემების შემთხვევაში უკანასკნელი შედეგი შეიძლება ჩაითვალოს მიუღებელად: ადამიანების ნახევარი, რომელთა ტესტირებამ აჩვენა დადებითი შედეგი, ფაქტობრივად, არის ჯანმრთელი.

მაგალითი 17. ყუთში მოთავსებულია ორი მონეტა: A_1 – სიმეტრიული მონეტა გერბის მოსვლის ალბათობით 1/2, და A_2 – არასიმეტრიული მონეტა გერბის მოსვლის ალბათობით 1/3. შემთხვევით ვიღებთ ერთ მონეტას და ვაგდებთ. დავუშვათ, რომ მოვიდა გერბი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული მონეტა იყო სიმეტრიული?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega = \{(A_1, \text{გ}), (A_1, \text{ს}), (A_2, \text{გ}), (A_2, \text{ს})\},$$

სადაც მაგალითად, $(A_1, \text{გ})$ – ნიშნავს, რომ ამოვიღეთ A_1 მონეტა და მისი აგდების შედეგად მოვიდა გერბი. ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A_1) = P(A_2) = 1/2\,,\ P(\text{გ} | A_1) = 1/2 \text{ და } P(\text{გ} | A_2) = 1/3\,.$$

შესაბამისად, ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით გამოვითვლით:

$$P\{(A_1, \text{გ})\} = 1/4\,,\ P\{(A_1, \text{ს})\} = 1/4\,,\ P\{(A_2, \text{გ})\} = 1/6 \text{ და } P\{(A_2, \text{ს})\} = 1/3.$$

ამიტომ ბაიესის ფორმულის თანახმად

$$P(A_1 | \text{გ}) = \frac{P(A_1)P(\text{გ} | A_1)}{P(A_1)P(\text{გ} | A_1) + P(A_2)P(\text{გ} | A_2)} = \frac{3}{5}\,.$$

ცხადია, რომ $P(A_2 | \text{გ}) = 2/5$.

მაგალითი 19 *(კეთილ გამომცდელზე II).* დავუშვათ, რომ გამომცდელთან, რომელთანაც წარმატებით ჩაიარა გამოცდამ (იხ.

მაგალითი 18) გამოსაცდელად რიგრიგობით მივიდა კიდევ ორი მოსწავლე. ჯერ გამოცდა ვერ ჩააბარა მეორე მოსწავლემ, შემდეგ მივიდა მესამე და მანაც ვერ ჩააბარა გამოცდა. ამ ფაქტის შემდეგ რომელი ჰიპოთეზაა უფრო დასაჯერებელი: ეს გამომცდელი „კეთილია“ თუ „ავი“?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $P_i(A)$ (შესაბამისად, $P_i(\overline{A})$) სიმბოლოთი აპოსტერიორული ალბათობა იმისა, რომ ეს გამომცდელი „კეთილია“ (შესაბამისად, „ავია“) მას შემდეგ, რაც გამოცდილ იქნა i-ური სტუდენტი, $i=1,2,3$. ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ $P_1(A)=2/3$. შესაბამისად,

$$P_1(\overline{A})=1-P_1(A)=1/3.$$

მეორე მოსწავლის თვალსაზრისით ეს ალბათობები წარმოადგენს ორი შესაძლო ჰიპოთეზის აპრიორულ ალბათობებს. ამიტომ, ბაიესის ფორმულის თანახმად, მეორე სტუდენტის ჩაჭრის შემდეგ აპოსტერიორული ალბათობები იქნება:

$$P_2(A)=\frac{P(\overline{B}\,|\,A)P_1(A)}{P(\overline{B}\,|\,A)P_1(A)+P(\overline{B}\,|\,\overline{A})P_1(\overline{A})}=\frac{4}{7} \text{ და } P_2(\overline{A})=1-P_2(A)=\frac{3}{7}.$$

ანალოგიურად, ახლა მიღებული ალბათობები უკვე იქნება აპრიორული ალბათობები მესამე მოსწავლისათვის და ამიტომ საძიებელი აპოსტერიორული ალბათობები, მას შემდეგ რაც მესამე მოსწავლემ ვერ ჩააბარა გამოცდა, გამოითვლება ისევ ბაიესის ფორმულით:

$$P_3(A)=\frac{P(\overline{B}\,|\,A)P_2(A)}{P(\overline{B}\,|\,A)P_2(A)+P(\overline{B}\,|\,\overline{A})P_2(\overline{A})}=\frac{8}{17} \text{ და}$$

$$P_3(\overline{A})=1-P_3(A)=\frac{9}{17}>P_3(A).$$

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტის (გამოცდის) დაწყების წინ აპრიორული ალბათობა იმისა, რომ არჩეული გამომცდელი „კეთილია“ ტოლი იყო 1/3-ის. ექსპერიმენტების შემდეგ ამ ხდომილების აპოსტერიორული ალბათობა გაიზარდა და გახდა 8/17. მიუხედავად ამისა, თუ სამი ექსპერიმენტის შემდეგ მისაღებია გადაწყვეტილება ამ გამომცდელის შესახებ, მაშინ უფრო სარწმუნოა ჩავთვალოთ იგი „ავად“ (ვინაიდან, $P_3(\overline{A})>P_3(A)$).

დამოუკიდებელი ცდები.

მაგალითი 21. ერთი გასროლით მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 1/8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 12 გასროლიდან არც ერთი მოხვდება მიზანს?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გვაქვს: $n = 12$, $k = 0$, $p = 1/8$ და $q = 7/8$. ამიტომ ბერნულის ფორმულის თანახმად:

$$P_{12}(0) = C_{12}^{0}(\frac{1}{8})^{0} \cdot (\frac{7}{8})^{12} = (\frac{7}{8})^{12} \approx 0.25 .$$

მაგალითი 23. დავუშვათ, ვამოწმებთ დეფექტურობაზე საქონლის პარტიას, რომელიც შედგება 30 ნაწარმისაგან. ცნობილია, რომ დეფექტური პროდუქციის წილი შეადგენს 5%-ს. როგორია საქონლის ამ პარტიაში დეფექტური პროდუქციის ამა თუ იმ რიცხვის აღმოჩენის ალბათობები?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ექსპერიმენტების რიცხვია $n = 30$, ხოლო ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $p = 5/100 = 0.05$ (შესაბამისად, $q = 0.95$). შესაბამისად, გვაქვს:

$$P_{30}(0) = C_{30}^{0} 0.05^{0} 0.95^{30-0} = 0.95^{30} = 0.2146 ,$$

გარდა ამისა,

$$P_{30}(k+1) = \frac{30-k}{k+1}\frac{p}{q}P_{30}(k) = \frac{30-k}{k+1}\frac{0.05}{0.95}P_{30}(k) = \frac{30-k}{19(k+1)}P_{30}(k) ,$$

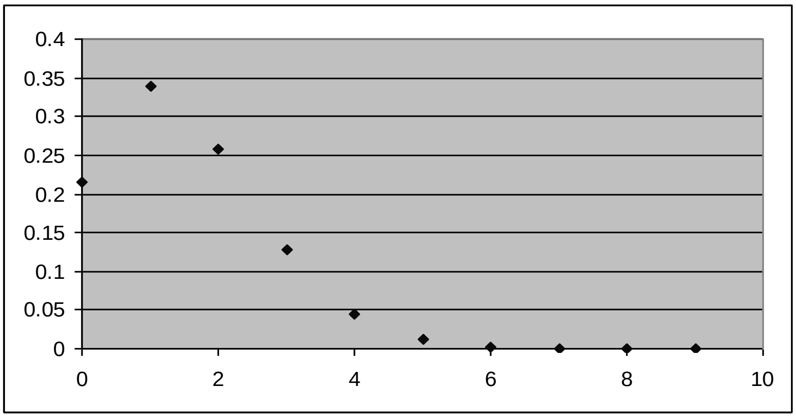
საიდანაც, როცა $k = 0$: $P_{30}(0+1) = \frac{30-0}{19 \cdot (0+1)} \cdot 0.2146 = 0.3389$;

როცა $k = 1$: $P_{30}(1+1) = \frac{30-1}{19 \cdot (1+1)} \cdot 0.3389 = 0.2586$ და ა. შ. საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ცხრილი:

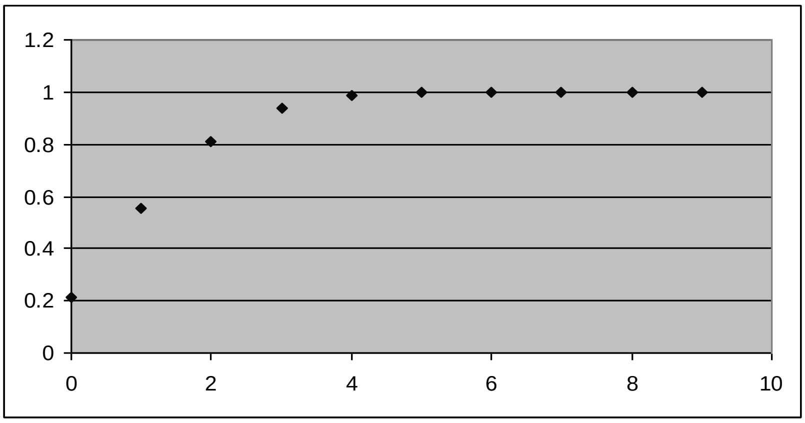
დეფექტური ნაწარმის რიცხვი k	**ალბათობა** $P_n(k)$	**კუმულატიური ალბათობა** $\overline{P}_n(k)$
0	0.2146	0.2146
1	0.3389	0.5535
2	0.2586	0.8122
3	0.1270	0.9392
4	0.0451	0.9844
5	0.0124	0.9967
6	0.0027	0.9994
7	0.0005	0.9999
8	0.0001	0.999998

9	0.000001	0.999999

ამ ცხრილის შესაბამისი ალბათობების განაწილების გრაფიკი იქნება:



კუმულატიური ალბათობების შესაბამისი განაწილების გრაფიკი იქნება:



სავარჯიშო 1. ექსპერიმენტი მდგომარეობს სამი სათამაშო კამათლის გაგორებაში. იპოვეთ ალაბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის 10-ჯერ გამეორებისას ზუსტად 4 ექსპერიმენტში მოვა ზუსტად ორ-ორი „6“?

მაგალითი 25. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 500 ადამიანიდან 2 დაიბადა 1 თებერვალს?

ამოხსნა. ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ უცნობი ადამიანის დაბადების დღე ტოლი ალბათობით შეიძლება იყოს წლის ნებისმიერი დღე, ანუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ადამიანი დაბადებულია 1 თებერვალს იქნება 1/365. ვინაიდან ეს რიცხვი ახლოსაა 0-თან, ამიტომ უნდა ვისარგებლოთ პუ-

ასონის მიახლოებითი ფორმულით, სადაც $n = 500, k = 2, p = 1/365$, $\lambda = 500/365 \approx 1.3699$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P_{500}(2) =\approx \frac{1.3699^2}{2!} \cdot e^{-1.3699} \approx 0.2385 .$$

ამოცანები

1. განვითარებულ ქვეყნებში საზოგადოდ ახალშობილის გადარჩენის შანსი შეადგენს 99.3%-ს. ახალშობილთა 15% იბადება საკეისრო კვეთის გამოყენებით და მათი გადარჩენის შანსია 98.7%. რას უდრის ახალშობილის გადარჩენის შანსი, თუ ცნობილია, რომ ის არ დაბადებულა საკეისრო კვეთის გამოყენებით.
3. აშშ-ს მოსახლეობა სისხლის ჯგუფების მიხედვით განაწილებულია შემდეგნაირად: **O** – 45%, **A** – 40%, **B** – 11%, **AB** – 4%. **O** ჯგუფის სისხლი შეიძლება გადავუსხათ ნებისმიერი ჯგუფის სისიხლის მქონე ადამიანს, ხოლო **AB** ჯგუფის სისხლის მქონე ადამიანს შეიძლება გადაესხას ნებისმიერი ჯგუფის სისხლი. შემთხვევით შეარჩიეს ორი აშშ-ს მცხოვრები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) არც ერთს არ შეიძლება გადაესხას მეორის სისხლი; ბ) ერთს შეიძლება გადაესხას მეორის სისხლი, მაგრამ არა პირიქით; გ) სულ ცოტა ერთს შეიძლება გადაესხას მეორის სისხლი: დ) ნებისმიერს შეიძლება გადაესხას მეორის სისხლი.
5. თქვენ იცით, რომ თქვენ ახალ მეზობელს ჰყავს 2 შვილი. ერთ დღეს დაინახეთ, რომ მეზობელი სეირნობდა თავის გოგონასთან ერთად. იპოვეთ პირობითი ალბათობა იმისა, რომ მეზობლის მეორე შვილიც გოგონაა, თუ ცნობილია, რომ: ა) მეზობელი სასეირნოდ ირჩევს უფროს შვილს ალბათობით p; ბ) თუ ბავშვები სხვადასხვა სქესისაა, მაშინ მეზობელი სასეირნოდ ირჩევს გოგონას ალბათობით p.
7. ნახმარი ავტომობილების დაახლოებით 5% ადრე დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო და სპეციალისტების შეფასებით ასეთი ავტომობილების 80%-ს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები, ხოლო თუ ნახმარი ავტომობილები ადრე არ იყო დაზიანებული წყალდიდობის გამო, მაშინ ამ ავტომობილების მხოლოდ 10%-ს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. თუ თქვენს ავტომობილს შეექმნა ძრავის პრობლემები, მაშინ რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ შეიძინეთ ავტომობილი, რომელიც დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო.

9. ყუთში დევს ორი ჩვეულებრივი მონეტა მხარეებზე გერბისა და ნომინალის გამოსახულებებით და ერთი მონეტა ორივე მხარეზე გერბის გამოსახულებით. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული მონეტა ორგერბიანია; ბ) შემთხვევით ამოიღეს ერთი მონეტა და დაუხედავად აგდების შემდეგ მასზე მოვიდა გერბი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ის ორგერბიანია.
11. გადამცემი მოწყობილება გადასცემს ციფრებს 0 და 1. მიმღები მოწყობილობა თითოეულ ციფრს კორექტულად ღებულობს ალბათობით 0.9. ციფრები მიიღება კორექტულად ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და საშუალოდ ორჯერ მეტი 0 იგზავნება ვიდრე 1. ა) თუ გადაცემულია მიმდევრობა 1 0, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიიღება 1 0; ბ) თუ მიღებულია მიმდევრობა 1 0, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გაგზავნილი იყო 1 0.
13. გარკვეული დაავადება გვხვდება ადამიანთა პოპულაციის 0.1%-ში. დიაგნოსტიკის მეთოდი კორექტულ პასუხს იძლევა ალბათობით 0.99. პაციენტმა გაიარა შემოწმება და გამოკვლევამ აჩვენა დადებითი შედეგი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პაციენტი დაავადებულია?
15. განვიხილოთ ორკომპონენტიანი პარალელური სისტემა. I კომპონენტი ფუნქციონირებს ალბათობით p და როცა ის ფუნქციონირებს II კომპონენტი აგრეთვე ფუნქციონირებს იმავე p ალბათობით. თუ I კომპონენტი გამოვა მწყობრიდან, მაშინ II ფუნქციონირებს ალბათობით r $(r < p)$. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ II კომპონენტი ფუნქციონირებს; ბ) რას უდრის სისტემის საიმედოობა; გ) თუ II კომპონენტი არ ფუნქციონირებს, მაშინ რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ I ფუნქციონირებს.
17. I ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%-ს, რომელთა შორის 1% წუნდებულია. II ბრიგადა აწარმოებს იმავე დეტალების 20%-ს, რომელთა შორის 3% წუნდებულია. III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 50%-ს, რომელთა შორის 2% წუნდებულია. ერთ საწყობში მოგროვილი ამ დეტალებიდან შემთხვევით აიღეს ერთი დეტალი და ის აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დაამზადა: ა) I ბრიგადამ; ბ) II ბრიგადამ; გ) III ბრიგადამ?
19. მე-17 ამოცანის პირობებში საწყობში იყო 1000 დეტალი, შემთხვევით ამოიღეს სამი დეტალი და სამივე აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალები დაამზადა: ა) I ბრიგადამ; ბ) II ბრიგადამ; გ) III ბრიგადამ?

21. მე-20 ამოცანის პირობებში ანალიზი ჩატარდა ორჯერ და ორივე შემთხვევაში მოგვცა უარყოფითი რეაქცია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს შედეგები განპირობებულია: ა) A_1 ავადმყოფობით; ბ) A_2 ავადმყოფობით?
23. ერთ ჩანთაში დევს 4 თეთრი და 3 შავი ბურთი, მეორე ჩანთაში კი 3 თეთრი და 5 შავი ბურთი. პირველი ჩანთიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთს და დებენ მეორეში. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ჩანთიდან ამოღებული ბურთი იქნება შავი. ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ჩანთიდან მეორეში გადატანილი ბურთი იყო თეთრი, თუ ცნობილია, რომ გადატანის შემდეგ მეორე ჩანთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია.
25. ყუთიდან, რომელშიც დევს 5 შავი და 3 წითელი ბურთი მიმდევრობით იღებენ 3 ბურთს დაბრუნებით (აფიქსირებენ ამოღებული ბურთის ფერს, აბრუნებენ ყუთში და შემდეგ იღებენ მომდევნო ბურთს). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) სამივე ბურთი თეთრია; ბ) სამივე ბურთი ერთი და იგივე ფერისაა; გ) ერთი თეთრია და 2 შავი; დ) ორივე ფერი იქნება წარმოდგენილი.
27. სამ ერთნაირ ყუთში ფერადი ბურთები განაწილებულია შემდეგნაირად:

	I ყუთი	II ყუთი	III ყუთი
წითელი	2	4	3
ყვითელი	3	1	4
ლურჯი	5	3	3

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი იქნება წითელი; ბ) შერჩეულ იქნა III ყუთი, თუ ცნობილია, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი აღმოჩნდა წითელი.
29. ცნობილია, რომ სიმართლის დეტექტორი როცა ადამიანი დამნაშავეა საიმედოა 90%-ით, ხოლო როცა უდანაშაულოა, მაშინ – 99%-ით (სხვა სიტყვებით, დამნაშავეთა 10%-ს სიმართლის დეტექტორი ამართლებს, ხოლო უდანაშაულოთა 1%-ს კი ამტყუნებს). ა) თუ ეჭვმიტანილი შერჩეულ იქნა ეჭვმიტანილთა იმ ჯგუფისაგან, რომელთა 5%-ს ადრე ჩადენილი აქვს დანაშაული, მაშინ იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის დამნაშავეა; ბ) თუ ეჭვმიტანილი შერჩეულ იქნა ეჭვმიტანილთა იმ ჯგუფისაგან, რომელთა 5%-ს ადრე ჩადენილი

აქვს დანაშაული და სიმართლის დეტექტორმა უჩვენა, რომ ის დამნაშავეა, მაშინ რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ის უდანაშაულოა.

31. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა არა უმეტეს ორჯერ?
33. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა არანაკლებ სამჯერ?
35. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ორჯერ მოვა წახნაგი კენტი ქულით?
37. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას არანაკლებ სამჯერ მოვა წახნაგი ლუწი ქულით?
39. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას არა უმეტეს ორჯერ მოვა წახნაგი 3-ის არა ჯერადი ქულით?
41. მე-40 ამოცანაში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კვირის განმავლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯი არ გავა ნორმიდან არანაკლებ ხუთი დღის განმავლობაში?
43. ალბათობა იმისა, რომ ნათურა არ გადაიწვება 1000 საათის მუშაობის შედეგად, ტოლია 0.95-ის. რისი ტოლია 500 ნათურაში იმ ნათურების უალბათესი რიცხვი, რომლებიც არ გადაიწვა 1000 საათის მუშაობის შედეგად? აჩვენეთ, რომ თუ $p=q=1/2$ და n – ლუწია, მაშინ წარმატების უალბათესი რიცხვი ტოლია მათემატიკური ლოდინის.
45. თესლის მოცემული პარტიიდან დათესეს 10000 თესლი და ნახეს, რომ აღმოცენდა 8498 თესლი. ამის შედეგად გაკეთდა დასკვნა, რომ თესლის მოცემული პარტიის აღმოცენებადობა შეადგენს 85%-ს ($p=0.85$). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული პარტიიდან დათესილი 100 თესლიდან აღმოცენდება: ა) ზუსტად 85 თესლი? ბ) 60-დან 80 თესლამდე? გ) 70-დან 90 თესლამდე? დ) არანაკლებ 80 თესლი? ე) არანაკლებ 85 თესლი? ვ) არანაკლებ 90 თესლი? ზ) არანაკლებ 92 თესლი?
47. დავუშვათ, რომ გარკვეული ეპიდემიის დროს დაავადების ალბათობაა $p=0.005$. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 1000 ადამიანიდან დაავადდება: ა) არა უმეტეს 2 ადამიანი? ბ) არა უმეტეს 5 ადამიანი? გ) არა უმეტეს 10 ადამიანი? დ) არანაკლებ 3 ადამიანი?
49. წუნდებული პროდუქციის გამოშვების ალაბათობაა $p=0.04$. რამდენჯერ უნდა შევამციროთ წუნდებული პროდუქციის პროცენტი იმისათვის, რომ 20-ჯერ გაიზარდოს ალბათობა

იმისა, რომ 1000 ერთეულ პროდუქციაში არ აღმოჩნდეს არც ერთი წუნდებული?

51. მონეტა ისეა დამზადებული, რომ გერბის მოსვლის ალბათობა ორჯერ მეტია საფასურის მოსვლის ალბათობაზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 3-ჯერ აგდებისას საფასური მოვა 2-ჯერ?

53. ტელევიზორი შედგება 10 ელემენტისაგან. თითოეული ელემენტი წლის განმავლობაში მუშაობს ალბათობით p. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წლის განმავლობაში მწყობრიდან გამოვა: ა) ერთი ელემენტი მაინც; ბ) ზუსტად ერთი ელემენტი; გ) ორი ელემენტი.

55. სხვადასხვა პოზიციიდან სამიზნეს ესვრიან 4-ჯერ. მიზანში მოხვედრის ალბათობებია შესაბამისად 0.1, 0.2, 0.3 და 0.4. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყველა გასროლა დასრულდება მარცხით?

57. ორი ერთნაირი სიძლიერის მოჭადრაკის შეხვედრისას რა უფრო მოსალოდნელია: 4 პარტიიდან 3-ის მოგება, თუ 8 პარტიიდან 5-ის მოგება?

59. სამიზნე შედგება ე. წ. „ხარის თვალისა“ და I და II კონცენტრული რგოლისაგან, რომლებშიც ერთი გასროლით მოხვედრის ალბათობებია შესაბამისად 1/10, 1/5 და 2/5. სამიზნეს ესვრიან 5-ჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 2-ჯერ მოხვდება „ხარის თვალს“ და ერთჯერ II რგოლს?

61. ექსპერიმენტის ჩატარებისას გარკვეული შედეგის დადგომის ალბათობაა 0.01. რამდენჯერ უნდა ჩავატაროთ ექსპერიმენტი, რომ ალბათობით 0.5 აღნიშნული შედეგი დადგეს ერთხელ მაინც?

63. განყოფილებაში 10 თანამშრომელია, რომლებიც ერთდროულად სადილობენ უნივერსიტეტის ორი სასადილოდან ერთ-ერთში. რამდენი ადგილი უნდა იქნეს შენახული თითოეულ სასადილოში ამ განყოფილების თანამშრომლებისათვის, რომ სასადილოს გამგეები 95%-იანი გარანტიით დარწმუნებული იყვნენ იმაში, რომ მათ სასადილოებში სადილის პერიოდში აღნიშნული განყოფილების თანამშრომლებისათვის საკმარისი ადგილები იქნება.

65. რამდენჯერ უნდა გავაგოროთ წესიერი სათამაშო კამათელი, რომ ექვსიანის მოსვლის უალბათესი რიცხვი იყოს 32?

67. სამკერვალო ფაბრიკის მიერ გამოშვებული ბავშვის ქურთუკის 31% უმაღლესი ხარისხისაა. ამ ფაბრიკაში დამზადებული 75 ბავშვის ქურთუკიდან რამდენს უნდა ველოდოთ რომ უმაღლესი ხარისხისაა?

69. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 500 ადამიანიდან: ა) 8 დაიბადა 7 აპრილს; ბ) 3 დაიბადა 15 მაისს; გ) არც ერთი არ დაბადებულა 7 იანვარს?

71. სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.001. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 5000 გასროლიდან მოხდება არანაკლებ 2 დაზიანება?

73. უვარგისი თერმომეტრების რაოდენობა შეადგენს მთელი პროდუქციის 2%-ს. თერმომეტრები ყუთებში ჩალაგებულია ას-ას ცალად. როგორია ალბათობა იმისა, რომ: ა) ყუთში არ აღმოჩნდება უვარგისი თერმომეტრი; ბ) ყუთში აღმოჩნდება არა უმეტეს 3 უვარგისი თერმომეტრი. რამდენი თერმომეტრი უნდა ჩავალაგოთ ყუთში, რომ არანაკლებ 0.9-ის ტოლი ალბათობით ყუთში იყოს 100 ვარგისი თერმომეტრი?

75. $P(A)=0.75$, $P(B|A)=0.8$, $P(B|\overline{A})=0.6$. იპოვეთ $P(B)$ და $P(A|B)$.

77. ალბათობა იმისა, რომ მომავალი წლის ივნისის პირველი დღე იქნება მშრალი არის 0.4. თუ ივნისის რომელიმე კონკრეტული დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.6. სხვა შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ივნისის პირველი ორი დღე იქნება მშრალი; ბ) ივნისის მეორე დღე იქნება მშრალი გ) ივნისის პირველი სამი დღიდან, სულ ცოტა, ერთი იქნება მშრალი.

79. 30 სტუდენტს დაუსვეს კითხვები: უჭერს ის მხარს არგენტინას, ბრაზილიას, თუ არც ერთს და ის ცაციაა თუ არა. 12 სტუდენტმა უპასუხა, რომ ის არის ცაცია და მათგან 4 უჭერს მხარს არგენტინას, ხოლო 7 კი ბრაზილიას. არა ცაცია სტუდენტებიდან 1 უჭერს მხარს არგენტინას, ხოლო 10 კი ბრაზილიას. ჯგუფიდან შემთხვევით აარჩიეს 1 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) სტუდენტი ცაციაა; ბ) სტუდენტი არც ერთ გუნდს არ უჭერს მხარს; გ) სტუდენტი ცაციაა, თუ ცნობილია, რომ სტუდენტი არც ერთ გუნდს არ უჭერს მხარს.

81. ისვრიან წითელ და ლურჯ კამათელს, შემდეგ მათზე მოსული ქულები იკრიბება. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ქულათა ჯამი იქნება არანაკლებ 10-ისა, თუ წითელ კამათელზე მოვიდა 6 ქულა; ბ) ქულათა ჯამი იქნება არანაკლებ 10-ისა, თუ ერთ კამათელზე მაინც მოვიდა 6 ქულა.

83. $P(D|C)=1/5$, $P(C|D)=1/4$, $P(C\bigcap D)=p$. იპოვეთ: ა) $P(C)$; ბ) $P(D)$.

85. სტადიონის 40 ბილეთიდან 10 არის ჩრდილოეთის მხარე, 14 აღმოსავლეთის და 16 კი დასავლეთის მხარე. შემთხვევით

იღებენ ერთ ბილეთს და აძლევენ X-ს (ადამიანს სახელად X). შემდგომ, შემთხვევით იღებენ მეორე ბილეთს და აძლევენ Y-ს და ანალოგიურად მესამე ბილეთს აძლევენ Z-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) X-ს შეხვდება ჩრდილოეთის მხარე; ბ) X-ს და Y-ს შეხვდება ჩრდილოეთის მხარე; გ) სამივეს შეხვდება ერთი და იგივე მხარე; დ) ორს შეხვდება ერთი მხარე, ხოლო მესამეს სხვა მხარე.

87. $\overline{(A \cup B)} = \varnothing$, $P(\overline{A} \mid B) = 1/3$, $P(A) = 6/7$. იპოვეთ $P(B)$.

89. დედამიწის გარკვეულ ნაწილში მშრალი დღეები უფრო მეტია, ვიდრე სველი. თუ რომელიმე დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება ისევ მშრალი არის 0.8. თუ რომელიმე დღე სველია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება ისევ სველი არის 0.6. ცნობილია, რომ ორშაბათი სველი დღე იყო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იმავე კვირის: ა) სამშაბათი და ოთხშაბათი ორივე იქნება მშრალი; ბ) ოთხშაბათი იქნება მშრალი.

91. კაზინოში დგას ორი A და A' სათამაშო მაგიდა, რომლებიც სრულიად ერთნაირად გამოიყურება. A მაგიდაზე მოგების ალბათობა არის 1/3, ხოლო A' მაგიდაზე – 1/4. ა) იპოვეთ შემთხვევით არჩეულ მაგიდაზე მოგების ალბათობა; ბ) თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და მოიგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A მაგიდა; გ) თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და წააგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A' მაგიდა.

93. ალბათობა იმისა, რომ გვანცა ადრე გაიღვიძებს არის 1/3. თუ გვანცა ადრე გაიღვიძებს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ სკოლაში დროულად მივა არის 3/4. თუ გვანცა გვიან გაიღვიძებს, მაშინ სკოლაში დროულად მისვლის ალბათობა არის 1/5. ერთ შემთხვევით არჩეულ დღეს გვანცა დროულად მივიდა სკოლაში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მან გვიან გაიღვიძა.

95. ოჯახში არის ორი ბიჭი და ორი გოგო, რომელთაგან ერთს ჰქვია ეკა. შემთხვევით არჩევენ ორ ბავშვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე ბავშვი გოგოა, თუ ერთი მათგანი გოგოა; ბ) ორივე გოგია, თუ ერთი მათგანი ეკაა.

97. კვირის სამუშაო დღეებში ჯუანშერი სამსახურში დადის მატარებლით. ალბათობა იმისა, რომ ის მიუსწრებს 8 საათიან მატარებელს ორშაბათს არის 0.66, ხოლო სხვა სამუშაო დღეებში კი ეს ალბათობა 0.75-ია. შემთხვევით ვირჩევთ კვირის ერთ სამუშაო დღეს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა)

ამ დღეს ჯუანშერი მიუსწრებს 8 საათიან მატარებელს; ბ) არჩეული დღე იყო ორშაბათი, თუ ცნობილია, რომ ამ დღეს ჯუანშერმა მიუსწრო 8 საათიან მატარებელს.

99. საკარნავალო თამაშში მონაწილე ჯერ აგდებს მონეტას, ხოლო შემდეგ ისვრის კამათელს. ის იგებს პრიზს იმ შემთხვევაში, თუ მონეტაზე მოვიდა გერბი, ხოლო კამათელზე – სამზე ნაკლები ქულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ის მოიგებს პრიზს.

101. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის ოთხჯერ აგდებისას სამჯერ მოვა ოთხი ქულა.

103. აგდებენ ერთ წესიერ კამათელს და მეორე ისეთ კამათელს, რომელზეც 6 ქულის მოსვლის ალბათობაა 1/4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) წესიერ კამათელზე მოვა 6 ქულა და არაწესიერზე არ მოვა 6 ქულა; ბ) სულ ცოტა ერთ კამათელზე მაინც მოვა 6 ქულა; გ) ზუსტად ერთ კამათელზე მოვა 6 ქულა, თუ ცნობილია, რომ სულ ცოტა ერთ კამათელზე მაინც მოვიდა 6 ქულა.

105. A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. $P(A)=0.4$, $P(A\bigcup B)=0.88$. იპოვეთ: ა) $P(B)$; b) ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე A და B ხდომილებებიდან მოხდება, მაგრამ არა ორივე.

107. ალბათობა იმისა, რომ ოთხ დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილება ერთხელ მაინც მოხდება არის 15/16. იპოვეთ ცალკეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობა.

109. ერთ ყუთში არის 3 თეთრი და 2 ლურჯი ბურთი, მეორეში კი 4 თეთრი და 4 ლურჯი ბურთი. I ყუთიდან შემთხვევით გადაიტანეს 2 ბურთი მეორეში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ II ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი.

თავი V
შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებლები

როგორც უკვე ვნახეთ, ბევრი შემთხვევითი მოვლენა და ექსპერიმენტი სრულდება ამა თუ იმ რიცხვითი შედეგით. მაშინაც კი, როცა შედეგი (ელემენტარული ხდომილება) არ არის რიცხვი, ჩვენ ხშირად ვიხილავთ ხდომილებებს, რომელთა აღწერა შესაძლებელია რიცხვების ტერმინებში (მაგალითად, მონეტის ორჯერ აგდებისას – მოსულ გერბთა რიცხვია 1). შესაბამისად, ძალიან მოხერხებული იქნებოდა გვქონოდა გარკვეული მათემატიკური ცნება, რომელიც თავიდან აგვაცილებდა ხდომილებების სიტყვებით გამოსახვის აუცილებლობას. მაგალითად, ნაცვლად იმისა, რომ დაგვეწერა {გერბთა რიცხვია 1} და {გერბთა რიცხვია 2}, ჩვენ შეგვიძლია გერბების რიცხვი აღვნიშნოთ ξ ასოთი და განვიხილოთ ხდომილებები $\{\xi=1\}$ და $\{\xi=2\}$. ξ არის სიდიდე, რომლის მნიშვნელობა უცნობია ექსპერიმენტის ჩატარებამდე, მაგრამ ცნობილი ხდება ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას **შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული ტიპის** სიდიდე თუ ის ღებულობს ცალკეულ, იზოლირებულ შესაძლო მნიშვნელობებს. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის** სიდიდე თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე მთლიანად ავსებს რაიმე რიცხვით შუალედს.

ცხრილს, რომელშიც ჩამოთვლილია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები და მათი შესაბამისი ალბათობები, **განაწილების კანონი (ან მწკრივი)** ეწოდება:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

აქ $\sum_i p_i = 1$. ალბათობის სტატისტიკური განმარტებიდან გამომდინარე:

თეორიული სიხშირე** ≈ **ერთობლივი სიხშირე** × **ალბათობა.

$P(\xi \in \langle a,b\rangle) = \sum_{x\in\langle a,b\rangle} P(\xi = x)$. თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე ξ და რაიმე რიცხვითი g ფუნქცია, მაშინ $g(\xi)$ ისევ იქნება დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონით:

$g(x_i)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. დავუშვათ, რომ ყუთში N ბურთია და მათ შორის M თეთრია. შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე ყუთიდან ვიღებთ n ბურთს. ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ n ბურთს შორის ზუსტად m ცალი იქნება თეთრი გამოითვლება ფორმულით:

$$P(N;M;n;m) := P(\mu_n = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m = 0,1,...,\min(M,n).$$

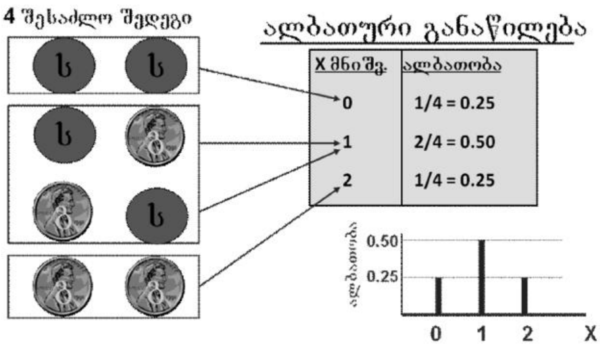
რიცხვთა ამ მიმდევრობას **ჰიპერგეომეტრიული განაწილება** ეწოდება და გამოიყენება აღნიშვნა ***HG*(*N*,*M*,*n*)**.

გეომეტრიული განაწილება (*Geo*(*p*)): $P(\xi = k) = pq^{k-1}$ $(q = 1-p)$, $k = 1,2,\ldots$.

პუასონის განაწილება პარამეტრით λ (*Po*(λ)):

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \ k = 0,1,2,\ldots.$$

სიმეტრიული მონეტის ორჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების კანონი



შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x) := P(\xi < x)\ \text{(შესაბამისად, } F(x) := P(\xi \le x))$$

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)\ \text{(შესაბამისად,}$$

$$P(a \le \xi < b) = F(b-0) - F(a-0)\text{)}.$$

განაწლების ფუნქციის თვისებები:

1) ნებისმიერი x-სათვის $0 \le F(x) \le 1$;

2) განაწილების ფუნქცია არაკლებადია;

3) განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან (თუ განაწილების ფუნქციას განვმარტავთ როგორც: $F(x) := P(\xi \le x)$, მაშინ ის იქნება მარჯვნიდან უწყვეტი);

4) $F(x) = \sum_{x_k < x} P\{\xi = x_k\}$ (შესაბამისად, $F(x) = \sum_{x_k \le x} P\{\xi = x_k\}$);

5) $P\{\xi = x_k\} = F(x_k + 0) - F(x_k)$ (შესაბამისად,

$P\{\xi = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0)$, როცა $F(x) := P(\xi \le x)$).

შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს უწყვეტი განაწილების ფუნქცია, უწოდებენ **უწყვეტ შემთხვევით** სიდიდეს. თუ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)$ წარმოებადია, მაშინ მის წარმოებულს შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე** ეწოდება და აღინიშნება $f(x)$-ით: $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) \ge 0;\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;\ P(\xi \in \langle a,b \rangle) = \int_a^b f(x)dx;\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

უწყვეტი განაწილების ფუნქციის p **რიგის კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომლისთვისაც $F(x_p) = p$. საზოგადოდ, $x_p = \min\{x : F(x) \ge p\}$. დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში, თუ

$p_1 + p_2 + \cdots + p_i < p \le p_1 + p_2 + \cdots + p_i + p_{i+1}$, მაშინ $x_p = x_{i+1}$. $p = 1/2$ რიგის კვანტილს შემთხვევითი სიდიდის ან მისი განაწილების ფუნქციის **მედიანა** ეწოდება და აღინიშნება Mo, ე. ი. $Mo = x_{1/2}$. **მოდა** ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის იმ მნიშვნელობას (ან მნიშვნელობებს), რომელიც შეესაბამება განაწილების სიმკვრივის ლოკალურ მაქსიმუმს უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში ან ალბათობის ლოკალურ მაქსიმუმს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში და აღინიშნება სიმბოლოთი Me.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე

დისკრეტული ორგანზომილებიანი (ξ, η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონს (ანუ** *ξ და η* შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლივ განაწილების კანონს)** აქვს ორგანზომილებიანი ცხრილის სახე, რომელიც გვაძლევს შესაძლო მნიშვნელობე-

ბის ცალკეული კომპონენტების ჩამონათვალს და იმ $p(x_i, y_j)$ ალ-ბათობებს, რა ალბათობებითაც მიიღება მნიშვნელობა (x_i, y_j):

η	ξ					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
...	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

$$\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1;\; P(\xi = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j);\; P(\eta = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j).$$

ორგანზომილებიანი (ξ, η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილე-ბის ფუნქცია (**ან ξ *და* η შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლი-ვი განაწილების ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას: $F(x, y) = P(\xi \le x,\ \eta \le y)$.

1) $0 \le F(x, y) \le 1$;

2) $F(x, y)$ არის თითოეული არგუმენტის მიმართ არაკლება-დი, მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია;

3) ადგილი აქვს ზღვრულ თანაფარდობებს:

$F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$; $F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$;

4) $F(x, \infty) = F_1(x) := P(\xi \le x)$; $F(\infty, y) = F_2(y) := P(\eta \le y)$.

შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **დამოუკიდებელი,** თუ

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მა-შინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j),\ \forall i, j.$$

უწყვეტი ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის **ერ-თობლივი განაწილების სიმკვრივე (ანუ ორგანზომილებიანი სიმკვრივე)** ეწოდება ერთობლივი განაწილების ფუნქციის შე-რეულ მეორე რიგის კერძო წარმოებულს:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

1) $f(x, y) \ge 0$;   2) $F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, du dv$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$; 4) $p((X,Y)\in D) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

5) $f_1(x) = \dfrac{dF_1(x)}{dx} = \dfrac{dF(x,\infty)}{dx} = \dfrac{d\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u,y)dydu\right)}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$,

ანალოგიურად, $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$

6) უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x, y)= f_1(x)\, f_2(y)$.

დისკრეტული ξ **შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი** აღინიშნება $E\xi$ სიმბოლოთი და ეწოდება რიცხვს:

$$E\xi = \sum\nolimits_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega)\text{ , ანუ } E\xi = \sum\nolimits_i x_i P\{\xi = x_i\} \equiv \sum\nolimits_i x_i p_i\ .$$

უწყვეტი ტიპის ξ **შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი** ეწოდება რიცხვს

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\text{ , (თუ } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\,x\,|\ f(x)dx < \infty\text{).}$$

ა) $Ec = c \equiv const$; ბ) $E(\xi \pm \eta) = E\xi \pm E\eta$;

გ) $E(c\xi) = cE\xi$; დ) $E(\xi - E\xi) = 0$;

ე) $E(\xi - c)^2 = E(\xi - E\xi)^2 + (c - E\xi)^2$;

ვ) $\min\limits_{c\in(-\infty,+\infty)} E(\xi - c)^2 = E(\xi - E\xi)^2$;

ზ) თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდებია, მაშინ $E(\xi\eta) = E\xi\cdot E\eta$ (შებრუნებული დებულება მცდარია).

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი:

$$Eg(\xi) = \sum\nolimits_i g(x_i)P\{\xi = x_i\} = \sum\nolimits_i g(x_i)p_i\ . \qquad (1)$$

თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1, x_2,\ \ldots, x_n$, ხოლო B რაიმე ხდომილებაა ($P(B) > 0$), მაშინ ξ **შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი** B **ხდომილების მიმართ** აღინიშნება $E(\xi\,|\,B)$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E(\xi\,|\,B) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i\,|\,B)\ .$$

ცხადია, რომ $E(\xi\,|\,\Omega)=E\xi$ და $E(\xi\,|\,B)=\dfrac{1}{P(B)}E(I_B\xi)$.

ξ შემთხვევითი სიდიდის η შემთხვევით სიდიდეზე **რეგრესიის მრუდი (ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას $R(y)=E(\xi\,|\,\eta=y)$.

შემთხვევითი სიდიდეს $R(\eta)$ (რეგრესიის ფუნქციაში ჩასმულია η შემთხვევითი სიდიდე) ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობით მათემატიკურ ლოდინს** უწოდებენ η პირობით და $E(\xi\,|\,\eta)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია $D\xi$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$DX=E(\xi-E\xi)^2\equiv E\xi^2-(E\xi)^2.$$

$E\xi$ -ს ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის **მეორე რიგის მომენტი** (თვითონ დისპერსიას უწოდებენ აგრეთვე – **მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს).**

თუ დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

მაშინ $DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\sum_{j=1}^{n}x_jp_j)^2p_i$, ანუ $DX=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(\sum_{j=1}^{n}x_jp_j)^2$.

I. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია – $Dc=0$;

II. $D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

III. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta.$$

ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი დისპერსია** B ხდომილების მიმართ:

$$D(\xi\,|\,B):=E\{[\xi-E(\xi\,|\,B)]^2\,|\,B\}=E(\xi^2\,|\,B)-[E(\xi\,|\,B)]^2.$$

ბერნულის განაწილება (ანუ ბერნულის შემთხვევით სიდიდე) აღინიშნება სიმბოლოთი $Bern(P)$ და აქვს სახე:

ξ	1	0
P	p	$1-p$

აქ $E\xi=p$ და $D\xi=p(1-p)$.

ბინომიალური განაწილების შემთხვევაში: $E\xi = np$, $D\xi = np(1-p)$, $Mo = [(n+1)p]$, $Me = [np]$.

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში:

$E\xi = \frac{n \cdot M}{N}$, $D\xi = \frac{n \cdot M \cdot (N-M) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}$ და $Mo\xi = \left[\frac{(M+1)(n+1)}{N+2} \right]$.

პუასონის განაწილების შემთხვევაში: $E\xi = D\xi = \lambda$, $Mo = [\lambda] - 1$, $Me = \left[\lambda + \frac{1}{3} - \frac{0.02}{\lambda} \right]$.

გეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში: $E\xi = 1/p$, $D\xi = (1-p)/p^2$, $Mo\xi = 1$, $Me\xi = \left[\frac{-1}{\log_2(1-p)} \right]$.

ექსპონენციალური განაწილება. ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ექსპონენციალურად განაწილებული პარამეტრით** λ ($\lambda > 0$) და აღინიშნება სიმბოლოთი $Exp(\lambda)$, თუ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში: $E\xi = 1/\lambda$, $D\xi = 1/\lambda^2$, $Mo\xi = 0$, $Me\xi = \frac{\ln 2}{\lambda}$ და $x_p = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$.

სტანდარტული გადახრა. მომენტები.

ξ შემთხვევითი სიდიდის **საშუალო კვადრატული გადახრა (ან სტანდარტული გადახრა):** $\sigma\xi = +\sqrt{D\xi}$.

შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია: $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma\xi}$ ($E\eta = 0$, $D\eta = 1$).

მომენტები, ასიმეტრია და ექსცესი.

ξ შემთხვევითი სიდიდის n **რიგის საწყისი მომენტი** ეწოდება სიდიდეს $\mu_n := E\xi^n$ ($a := \mu_1 = E\xi$).

ξ შემთხვევითი სიდიდის n **რიგის ცენტრალური მომენტი** ეწოდება სიდიდეს $\nu_n := E(\xi - a)^n$ ($\sigma^2 := \nu_2 = D\xi$).

ექსცესის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$e = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(\xi - E\xi)^4}{[+\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\,]^4} - 3.$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\alpha = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = \frac{E(\xi - E\xi)^3}{[+\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\,]^3}.$$

კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი.

კოვარიაციის კოეფიციენტი ან უბრალოდ **კოვარიაცია** ეწოდება სიდიდეს:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] \equiv E(\xi\eta) - E\xi E\eta .$$

1) თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$ (შებრუნებული დებულება არაა სამართლიანი);
2) $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = D\xi$;
3) $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\eta,\xi)$;
4) $\operatorname{cov}(c\cdot\xi,\eta) = c\cdot\operatorname{cov}(\xi,\eta)$;
5) $\operatorname{cov}(\xi \pm \eta, \varsigma) = \operatorname{cov}(\xi,\varsigma) \pm \operatorname{cov}(\eta,\varsigma)$;
6) $D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) + D\eta$;
7) $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$.

კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\rho(\xi,\eta) := \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \equiv E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma\xi}\cdot\frac{\eta - E\eta}{\sigma\eta}\right).$$

ა) $-1 \le \rho(\xi,\eta) \le 1$.

ბ) თუ $\rho(\xi,\eta)=1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b – მუდმივებია, $k>0$.

გ) თუ $\rho(\xi,\eta)= -1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b – მუდმივებია, $k<0$.

დ) თუ $\eta=k_1\xi+b_1$, ($k_1\neq0$) ან $\xi=k_2\eta+b_2$ ($k_2\neq0$), მაშინ $\rho(\xi,\eta)=1$ როცა $k_i>0$; $\rho(\xi,\eta)= -1$ როცა $k_i<0$ (i = 1,2).

მაგალითი 1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მონეტის სამჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რიცხვი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე რვა ელემენტიანი სიმრავლეა:

$$\Omega = \{\text{გგგ}, \text{გგს}, \text{გსგ}, \text{სგგ}, \text{გსს}, \text{სგს}, \text{სსგ}, \text{სსს}\}$$

და, შესაბამისად, საძიებელი შემთხვევითი სიდიდე იქნება Ω-ზე განსაზღრული შემდეგი რიცხვითი ფუნქცია:

$$\xi(\text{გგგ}) = 3\,;\ \xi(\text{გგს}) = \xi(\text{გსგ}) = \xi(\text{სგგ}) = 2\,;$$
$$\xi(\text{გსს}) = \xi(\text{სგს}) = \xi(\text{სსგ}) = 1 \quad \text{და} \quad \xi(\text{სსს}) = 0\,.$$

ცხადია ეს შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტული ტიპისაა, ის ღებულობს იზოლირებულ მნიშვნელობებს, მაგალითად, 1-სა და 2-ს შორის ის არ ღებულობს არც ერთ მნიშვნელობას.

მაგალითი 3. ორი მსროლელი თითოჯერ ესვრის სამიზნეს. მათ მიერ სამიზნის დაზიანების (მიზანში მოხვედრის) ალბათობებია შესაბამისად 0.6 და 0.7. შემთხვევითი სიდიდე ξ იყოს სამიზნის დაზიანებათა რაოდენობა. შევადგინოთ მისი განაწილების მწკრივი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ ξ შემთხვევითმა სიდიდემ შეიძლება მიიღოს შემდეგი მნიშვნელობები: 0 (ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე), 1 (მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე) და 2 (ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე). ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

შეგვძლია ვიგულისხმოთ რომ პირველი და მეორე მსროლელის სროლის შედეგები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – პირველმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე და B – მეორე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე. მოცემულია, რომ $P(A)=0.6$ და $P(B)=0.7$. შესაბამისად, $P(\overline{A})=0.4$ და $P(\overline{B})=0.3$. გარდა ამისა, A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. დამოუკიდებელი ხდომილებებია აგრეთვე: $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და $\overline{B}$.

ადვილი დასანახია, რომ ხდომილება – ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე იქნება $\overline{A}\cap\overline{B}$, ხდომილება – მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ და ხდომილება – ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $A\cap B$. გასაგებია, რომ $(A\cap\overline{B})$ და $(\overline{A}\cap B)$ უთავსებადი ხდომილებებია $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)=\varnothing$.

ამიტომ, დამოუკიდებელ ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობისა და უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$P(\xi=0)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.4\cdot 0.3=0.12;$$

$$P(\xi=1)=P\{(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\}=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=$$

$$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.7=0.46;$$

$$P(\xi=2)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.7=0.42$$

შესაბამისად, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i	0	1	2
p_i	0.12	0.46	0.42

მაგალითი 5. ვიპოვოთ წესიერი მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ ვნახეთ აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2	3	4
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

შესაბამისად, განმარტების თანახმად ($F_\xi(x)=\sum_{x\le x_k} p_k$) გვაქვს:

$$F_\xi(0)=p_0=1/16,$$

$$F_\xi(1)=p_0+p_1=5/16,$$

$$F_\xi(2)=p_0+p_1+p_2=11/16,$$

$$F_\xi(3)=p_0+p_1+p_2+p_3=15/16,$$

$$F_\xi(4)=p_0+p_1+p_2+p_3+p_4=1.$$

ამიტომ საბოლოოდ ვწერთ:

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x<0, \\ 1/16, & \text{თუ} \quad 0\le x<1, \\ 5/16, & \text{თუ} \quad 1\le x<2, \\ 11/16, & \text{თუ} \quad 2\le x<3, \\ 15/16, & \text{თუ} \quad 3\le x<4, \\ 1, & \text{თუ} \quad x\ge 4. \end{cases}$$

მაგალითი 7. მოცემულია ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები:

ξ	-1	0
P	0.5	0.5

η	0	1
P	0.5	0.5

შეადარეთ ერთმანეთს $F_\xi(F_\eta(0.5))$ და $F_\eta(F_\xi(0.5))$.

ამოხსნა. განაწილების ფუნქციის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$F_\eta(0.5)=P\{\eta\le 0.5\}=P\{\eta=0\}=0.5,$$

შესაბამისად,

$$F_\xi(F_\eta(0.5)) = P\{\xi \le 0.5\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} = 1.$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $F_\eta(F_\xi(0.5)) = 1$.

მაგალითი 9. A კომპანია ინვესტორებს პირდება წლიურ 40%-ს, მაგრამ შესაძლებელია გაკოტრდეს ალბათობით 0.3, ხოლო B კომპანია ინვესტორებს პირდება წლიურ 30%-ს, მაგრამ შესაძლებელია გაკოტრდეს ალბათობით 0.2. იგულისხმება, რომ კომპანიების გაკოტრება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. ინვესტორმა A კომპანიაში ჩადო 20 მილიონი ლარი, ხოლო B კომპანიაში კი 18 მილიონი ლარი. შეადგინეთ ორივე კომპანიიდან ინვესტორის ერთობლივი შემოსავლების ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, გამოთვალეთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ამოხსნა. ცხადია, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია:

$x_1 = 0$, თუ ორივე კომპანია გაკოტრდა;

$x_2 = 20 + 0.4 \cdot 20 = 28$, თუ გაკოტრდა მხოლოდ B კომპანია;

$x_3 = 18 + 0.3 \cdot 18 = 23.4$, თუ გაკოტრდა მხოლოდ A კომპანია;

$x_4 = 28 + 23.4 = 51.4$, თუ არცერთი კომპანია არ გაკოტრდა.

ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის ასაგებად საჭიროა გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{\xi = x_i\},\ i = 1,2,3,4$. ამ მიზნით შემოვიღოთ ხდომილობები: C={A კომპანია გაკოტრდება}, D={B კომპანია გაკოტრდება}. მაშინ ცხადია, რომ $P\{\xi = x_1\} = P\{CD\}$ და ვინაიდან ამოცანის პირობებში ეს ხდომილობები დამოუკიდებელია, ამიტომ დამოუკიდებლობის განმარტების თანახმად: $P\{\xi = x_1\} = P\{CD\} = P\{C\}P\{D\} = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$.

გარდა ამისა, გასაგებია, რომ $P\{\xi = x_2\} = P\{\overline{C}D\}$, $P\{\xi = x_3\} = P\{C\overline{D}\}$ და $P\{\xi = x_4\} = P\{\overline{C}\,\overline{D}\}$. როგორც ცნობილია, როცა ორი ხდომილოება დამოუკიდებელია, მაშინ აგრეთვე დამოუკიდებელია ერთ-ერთი მეორის საწინააღმდეგოსგან . საიდანაც ვღებულობთ, რომ დამოუკიდებლებია $\overline{C}$ და D, C და $\overline{D}$, $\overline{C}$ და $\overline{D}$. ამიტომ გვაქვს:

$$P\{\xi = x_2\} = P\{\overline{C}D\} = P\{\overline{C}\}P\{D\} = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14;$$

$$P\{\xi = x_3\} = P\{C\overline{D}\} = P\{C\}P\{\overline{D}\} = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24;$$

$$P\{\xi = x_4\} = P\{\overline{C}\,\overline{D}\} = P\{\overline{C}\}P\{\overline{D}\} = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56.$$

შესაბამისად, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება:

ξ	0	23.4	28	51.4
P	0.06	0.24	0.14	0.56

განმარტების თანახმად:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 38.32 ;$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{4} (x_i - E\xi)^2 p_i = 252.25 .$$

თამაშის მათემატიკური ლოდინი. მოთამაშე დებს 1 ლარს, ასახელებს რაიმე რიცხვს 1-დან 6-მდე, აგორებენ წესიერ კამათელს და თუ მოვა მოთამაშის მიერ დასახელებული რიცხვი, ის იგებს 4 ლარს და, ამასთანავე, უკან უბრუნებენ 1 ლარს. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოთამაშე კარგავს 1 ლარს. ვიპოვოთ მოგების მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. თუ მოგებას აღვნიშნავთ ξ სიმბოლოთი, მისი განაწილების კანონი იქნება:

ξ	4	-1
P	1/6	5/6

შესაბამისად, $E\xi = 4\cdot(1/6)+(-1)\cdot(5/6) = -1/6 \approx -0.1667$. ეს იმას ნიშნავს, რომ თამაში არ არის სამართლიანი – თამაში ისეთია, რომ მოთამაშე საშუალოდ აგებს. ადვილი დასანახია, რომ თუ ამოცანის პირობაში 4 ლარს შევცვლით 5 ლარით, მაშინ თამაში გახდება „სამართლიანი" – $E\xi = 0$. *თამაშს ეწოდება სამართლიანი, თუ მოგების მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, ანუ გრძელ სერიაში მოთამაშე არც იგებს და არც აგებს.*

მათემატიკური ლოდინი და დაზღვევა. დავუშვათ, რომ თქვენ გსურთ დააზღვიოთ თქვენი 2000 ლარის ღირებულების ვიდეოსისტემა მოპარვისაგან. სადაზღვევო კომპანია წელიწადში თქვენგან ითხოვს პრემიას (შენატანს) 225 ლარს. კომპანიამ ემპირიულად დაადგინა, რომ წლის განმავლობაში ვიდეოსისტემის მოპარვის ალბათობაა 0.1. რა იქნება თქვენი მოსალოდნელი დანაკარგი დაზღვევის შემთხვევაში?

ამოხსნა. ეს ფაქტობრივად არის თამაში, სადაც თქვენ დებთ 225 ლარს და 0.1-ის ტოლი ალბათობით იგებთ $2000-225=1775$ ლარს, ხოლო 0.9-ის ტოლი ალბათობით აგებთ 225 ლარს. ამ

„თამაშის“ მათემატიკური ლოდინი წინა მაგალითის მიხედვით იქნება:

$$E\xi = 1775 \cdot 0.1 + (-225) \cdot 0.9 = -25 .$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ თქვენ მარავალი წლის განმავლობაში დააზღვევთ თქვენს ვიდეოსისტემას ერთი და იგივე პირობებში, მაშინ საშუალოდ წელიწადში თქვენ დაკარგავთ 25 ლარს სადაზღვევო კომპანიის სასარგებლოდ.

შევხედოთ ამ ამოცანას სადაზღვევო კომპანიის თვალთახედვით: კომპანია იგებს 225 ლარს 0.9 ალბათობით და აგებს 1775 ლარს 0.1 ალბათობით. შესაბამისად, მისი „თამაშის“ მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$E\eta = 225 \cdot 0.9 + (-1775) \cdot 0.1 = 25 .$$

ე. ი. თუ კომპანიაში თქვენნაირ პირობებში რეგულარულად დაეზღვევა ბევრი კლიენტი, კომპანია წელიწადში თითოეულისგან საშუალოდ მოიგებს 25 ლარს.

მათემატიკური ლოდინი და გადაწყვეტილების მიღება. კულტურის დეპარტამენტს სურს პოპულარული მუსიკალური ჯგუფის კონცერტი ჩაატაროს ღია სტადიონზე და შიშობს, რომ შესაძლებელია იყოს წვიმა. სინოპტიკოების პროგნოზით წვიმის ალბათობა შეადგენს 0.24-ს. დეპარტამენტის შეფასებით, თუ არ იწვიმებს კონცერტისაგან შემოვა 100000 ლარი, ხოლო წვიმის შემთხვევაში მხოლოდ 10000 ლარი. სადაზღვევო კომპანია თანახმაა ეს კონცერტი დააზღვიოს წვიმისაგან 100000 ლარით 20000 ლარიანი პრემიის სანაცვლოდ. უნდა იყიდოს თუ არა დეპარტამენტმა ასეთი დაზღვევა?

ამოხსნა. კულტურის დეპარტამენტს აქვს ორი არჩევანი: A – დააზღვიოს კონცერტი ან B – არ დააზღვიოს კონცერტი. სანამ დეპარტამენტი გადაწყვეტილებას მიიღებს მან უნდა გამოთვალოს ორივე ქმედების შედეგად მოსალოდნელი საშუალო. ξ და η ასოებით ალვნიშნოთ, შესაბამისად, თუ რას მიიღებს დეპარტანენტი თითოეულ შემთხვევში. მაშინ გასაგებია, რომ მათ ექნებათ შემდეგი განაწილებები:

ქმედება		იწვიმა	არ იწვიმა
A	ξ	90000	80000
B	η	10000	100000
	P	0.24	0.76

შევნიშნოთ, რომ აქ 90000 მიღებულია შემდეგნაირად: დეპარტამენტმა დააზღვია კონცერტი (რაშიც გადაიხადა 20000 ლარი) და მოვიდა წვიმა – კონცერტიდან შემოვიდა 10000 ლარი, ხოლო სადაზღვევო კომპანიამ დეპარტმენტს გადაუხადა 100000 ლარი ($-20000+10000+100000=90000$). თითოეული ქმედებისაგან მოსალოდნელი საშუალოები იქნება:

$$E\xi = 90000\cdot 0.24 + 80000\cdot 0.76 = 82400\,,$$

$$E\eta = 10000\cdot 0.24 + 100000\cdot 0.76 = 78400\,.$$

აქედან გამომდინარე, დეპარტამენტმა კონცერტი უნდა დააზღვიოს.

მაგალითი 11. აუდიტორიაში მყოფი 15 სტუდენტიდან 5 ვაჟია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 6 სტუდენტს შორის 3 ვაჟია?

ამოხსნა. თუ მივუსადაგებთ ჰიპერგეომეტრიულ განაწილებას, გასაგებია, რომ: $N=15,\quad M=5,\quad n=6$ და $k=3$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(15;5;6;3) = \frac{C_{10}^{3}C_{15-10}^{6-3}}{C_{15}^{6}} = \frac{C_{10}^{3}C_{5}^{3}}{C_{15}^{6}} = \frac{120\cdot 10}{5005} \approx 0.239\,.$$

მაგალითი 13. მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

(სადაც a და b ($a<b$) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია). ვიპოვოთ შესაბამისი განაწილების სიმკვრივე. ცხადია, რომ განმარტების თანახმად:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

რაც შეეხება $x=a$ და $x=b$ წერტილებს, აქ $F(x)$ ფუნქციას წარმოებული არა აქვს და იქ შეგვიძლია $f(x)$ განვმარტოთ ნებისმიერად, ვთქვათ, $f(a)=f(b)=0$. შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს აღნიშნული განაწილების სიმკვრივე, ეწოდება **თანაბა-**

რად განაწილებული $[a,b]$ **მონაკვეთზე და აღინიშნება სიმ-ბოლოთი** $U([a,b])$ **.**

$$EU([a,b]) = MeU([a,b]) = \frac{a+b}{2} \quad \text{და} \quad DU([a,b]) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

მაგალითი 15. ვიპოვოთ p რიგის x_p კვანტილი თანაბარი განაწილების ფუნქციისათვის.

p $(0<p<1)$ რიგის x_p კვანტილი უნდა ვეძებოთ როგორც $F(x)=p$ განტოლების ამონახსნი. თანაბარი განაწილების ფუნქციის შემთხვევაში ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{x-a}{b-a} = p\ ,$$

საიდანაც ცხადია, რომ:

$$x_p = a + p(b-a) = a(1-p) + bp\ .$$

როცა $p=0$, მაშინ ნებისმიერი $x \le a$ წარმოადგენს $p=0$ რიგის კვანტილს, ხოლო $p=1$ რიგის კვანტილი იქნება ნებისმიერი $x \ge b$ რიცხვი.

მაგალითი 17. მოცემულია ξ *და* η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონი:

ξ	**-2**	**3**	**6**
p	**0.2**	**0.5**	**0.3**

η	**-0.8**	**-0.5**
p	**0.4**	**0.6**

ვიპოვოთ $Z=\max\{\xi,\eta\}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. Z შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: -0.8; -0.5; 3 და 6. გამოვთვალოთ შესაბამისი ალბათობები. გვაქვს:

$$P(Z=-0.8) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.8)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.8) = 0.2\cdot 0.4 = 0.08\ ;$$

$$P(Z=-0.5) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.5)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.5) = 0.2\cdot 0.6 = 0.12\ ;$$

$$P(Z=3) = P\{[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$

$$= P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)] = 0.5\cdot 0.4 + 0.5\cdot 0.6 = 0.5\ ;$$

$$P(Z=6) = P\{[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$

$$= P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)] = 0.3\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.6 = 0.3\ .$$

მაგალითი 19. დავუშვათ, $g(x)=x^3-4x$ და მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

-2	-1	0	2
0.1	0.3	0.4	0.2

დავადგინოთ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი.

ცხადია, რომ $g(-2) = g(0) = g(2) = 0$ და $g(-1) = 3$. ამიტომ η შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ მისი განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{\eta = 0\}$ და $P\{\eta = 3\}$. რადგან ხდომილებები $\{\xi = -2\}$, $\{\xi = 0\}$ და $\{\xi = 2\}$ უთავსებადია, ამიტომ ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{\eta = 0\} = P\{\{\xi = -2\} \cup \{\xi = 0\} \cup \{\xi = 2\}\} =$$
$$= P\{\xi = -2\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 2\} = 0.1 + 0.4 + 0.2 = 0.7\,.$$

გარდა ამისა, $P\{\eta = 3\} = P\{\xi = -1\} = 0.3$. ამიტომ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

0	3
0.7	0.3

გარდა ამისა, $E\eta = 0 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.3 = 0.9$.

ახლა გამოვთვალოთ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (1) თანაფარდობის საშუალებით. გვექნება:

$$E\eta = g(-2) \cdot 0.1 + g(-1) \cdot 0.3 + g(0) \cdot 0.4 + g(2) \cdot 0.2 =$$
$$= 0 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.2 = 0.9\,.$$

მაგალითი 21. დავუშვათ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სამი ტოლალბათური ელემენტარული ხდომილებისაგან $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/3$. განვმარტოთ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად: $\xi(\omega_1) = 1,\ \xi(\omega_2) = 0,\ \xi(\omega_3) = -1$;

$$\eta(\omega_1) = 1,\ \eta(\omega_2) = 0,\ \eta(\omega_3) = 1\,.$$

მაშინ გასაგებია, რომ $\xi\eta = \xi$, $E(\xi\eta) = E\xi = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 0$.

შესაბამისად, $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$. მეორეს მხრივ,

$$P\{\xi = 0\} = P\{\eta = 0\} = P\{\xi = 0, \eta = 0\} = P(\omega_2) = 1/3\,,$$

მაშინ როდესაც ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელი რომ იყოს $\{\xi=0,\eta=0\}$ ხდომილების ალბათობა უნდა ყოფილიყო $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, ე. ი ξ და η არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 23. დავუშვათ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ, ე. ი. $E\xi=0$. ვთქვათ, $\eta=\xi^2$. მაშინ $E(\xi\eta)=E(\xi^3)=0$, ვინაიდან ξ^3 აგრეთვე, სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ. მეორეს მხრივ, $E\xi E\eta=0$, ვინაიდან $E\xi=0$. ამიტომ:

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{E(\xi\eta)-E\xi E\eta}{\sigma\xi\sigma\eta}=0.$$

ე. ი. კორელაცია (და, მაშასადამე, კოვარიაცია) შეიძლება იყოს ნული, მაშინაც კი როცა შემთხვევითი სიდიდეები დამოკიდებულია.

მაგალითი 25. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ქვემოთ მოყვანილი ერთობლივი განაწილების კანონის მიხედვით გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი ρ(ξ,η).

η / ξ	1	2	3	
10	1/36	0	0	1/36
20	2/36	1/36	0	3/36
30	2/36	2/36	2/36	6/36
40	1/36	9/36	16/36	26/36
	6/36	12/36	18/36	

$E\xi=10\cdot1/36+20\cdot3/36+30\cdot6/36+40\cdot26/36\approx35.83$;

$E\eta=1\cdot6/36+2\cdot12/36+3\cdot18/36\approx2.3$;

$D\xi=(10-35,83)^2\cdot1/36+(20-35.83)^2\cdot3/36+(30-35.83)^2\cdot6/36+$
$+(40-35,83)^2\cdot26/36\approx57.64$; $\sigma\xi\approx7.6$;

$D\eta=(1-2,3)^2\cdot6/36+(2-2.3)^2\cdot12/36+(3-2.3)1^2\cdot18/36\approx0.556$;

$\sigma\eta\equiv0.746$;

$E(\xi\eta)=10\cdot1\cdot1/36+20\cdot1\cdot2/36+20\cdot2\cdot1/36+30\cdot1\cdot2/36+30\cdot2\cdot2/36+$
$+30\cdot3\cdot2/36+40\cdot1\cdot1/36+40\cdot2\cdot9/36+40\cdot3\cdot16/36=86.94$;

$\rho(\xi,\eta)=(6.94-2.3\cdot35.83)/(7.6\cdot0.746)\approx0.8$.

ამოცანები

1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი კამათლის აგდებისას მოსულ ქულათა: ა) ჯამი; ბ) ნამრავლი; გ) განაყოფი; დ) სხვაობა; ე) სხვაობის მოდული. ააგეთ განაწილების კანონი.
3. ჩანთაში დევს 2 წითელი და 3 ლურჯი ფანქარი. ჩანთიდან შემთხვევით იღებენ ორ ფანქარს დაბრუნების გარეშე. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მათში ლურჯი ფანქრების რიცხვი. ააგეთ განაწილების კანონი.
5. წესიერ მონეტას აგდებენ ორჯერ. ააგეთ მოსულ გერბთა რიცხვის განაწილების კანონი.
7. წესიერ კამათელს აგდებენ ერთხელ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსული ქულის ნახევარი, როცა ქულა ლუწია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – მისი გაორმაგებული. ააგეთ განაწილების კანონი.
9. წესიერ კამათელს აგდებენ ერთხელ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსული ქულის ნახევარი, როცა ქულა ლუწია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – მისი გასამმაგებული. ააგეთ განაწილების კანონი.
11. ერთდროულად აგდებენ ორ წესიერ ოთხწახნაგას, ტეტრაედრს (წახნაგები სამკუთხედებია და გადანომრილია ციფრებით 1, 2, 3, 4). ააგეთ ქვედა წახნაგზე მოსულ ქულათა: ა) ნამრავლის; ბ) ჯამის; გ) სხვაობის; დ) განაყოფის; ე) გაორკეცებული ნამრავლის განაწილების კანონები.
13. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 3 მწვანე კალკულატორი. ჩანთიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 3 კალკულატორს. ააგეთ მათში წითელ კალკულატორთა რიცხვის განაწილების კანონი.
15. შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს 36 კარტიდან. თუ ამოღებული კარტი აგურისაა, მაშინ ჩერდებიან. წინააღმდეგ შემთხვევაში აგრძელებენ კარტის ამოღებას დაბრუნების გარეშე სანამ ან აგური არ ამოვა, ან 4 კარტი არ იქნება ამოღებული. ააგეთ ამოღებულ კარტთა რაოდენობის განაწილების კანონი.
17. კომპიუტერი დაპროგრამებულია 0-დან 9-ის ჩათვლით ერთნიშნა რიცხვების მისაღებად (ξ შემთხვევითი სიდიდე) ისე, რომ კენტი ციფრების (1, 3, 5, 7, 9) მიღების ალბათობა არის ლუწი ციფრების (0, 2, 4, 6, 8) მიღების ალბათობის ნახევარი. იპოვეთ განაწილების კანონი.
19. იპოვეთ p თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	-1	1	2	3	5
P	p	0.2	0.15	0.2	$2p$

21. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე კენტი ქულის მოსვლის ალბათობა 3-ჯერ მეტია ლუწი ქულის მოსვლის ალბათობაზე. ააგეთ ქულათა განაწილების კანონი.
23. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე ნებისმიერი ქულის მოსვლის ალბათობა ამ ქულის უკუპროპორციულია. ააგეთ ქულათა განაწილების კანონი.
25. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს დაბრუნებით 520-ჯერ. გამოთვალეთ მოსალოდნელი რიცხვი (სიხშირე) იმისა, რომ მოვა: ა) აგური; ბ) ტუზი; გ) სურათიანი კარტი (K,Q,J); დ) ან ტუზი, ან აგური, ან ორივე ერთად; ე) არც ტუზი და არც აგური.
27. ქვემოთ მოყვანილია ξ შემთხვევითი სიდიდის დაგროვილი ალბათური განაწილების კანონი (ანუ $P\{\xi \le k\}$ ნაცვლად $P\{\xi = k\}$-სი):

ξ	0	1	2	3	4	5
$P\{\xi \le k\}$	0.116	0.428	0.765	0.946	0.995	1.000

გაკეთდა 100 დაკვირვება ξ შემთხვევით სიდიდეზე. გამოთვალეთ უახლოეს მთელ რიცხვამდე დამრგვალებული ყველა შედეგის მოსალოდნელი სიხშირე.
29. ყუთში ძევს 49 ერთნაირი ბურთი, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 49-მდე. შემთხვევით ირჩევენ 6 ბურთს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აქედან ოთხზე იქნება ლუწი ქულა.
31. გამოთვალეთ ზემოთ მოყვანილი შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინები.
33. ცნობილია, რომ არც ერთი სოკო არ ცოცხლობს მომავალ წლამდე. ნებისმიერი სოკო მომდევნო წელს იძლევა ξ რაოდენობის ახალ სოკოს. დავუშვათ, რომ მიმდინარე წელს ხარობს ორი სოკო. ვიპოვოთ მომავალ წელს სოკოთა η რაოდენობის განაწილების კანონი, გამოვთვალოთ η-ს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

მ ი თ ი თ ე ბ ა: შეადგინეთ დამოუკიდებელი ξ, ξ წყვილის ერთობლივი განაწილების კანონი – $\eta=\xi+\xi$.

35. წესიერი სათამაშო კამათლის წახნაგებზე დაწერილია ციფრები 1, 2, 2, 3, 3 და 3. ავღნიშნოთ ξ ასოთი კამათლის ერთხელ გაგორებისას მოსული ქულა. ვიპოვოთ ξ-ს მათემატიკური ლოდინი და სტანდარტული გადახრა.

37. სამშენებლო კომპანიას სთავაზობენ ორ A და B პროექტს და ფინანსურმა დირექტორმა უნდა ურჩიოს კომპანიას ამ პროექტებიდან რომელი უნდა აირჩიოს. მისი შეფასებით A პროექტი იძლევა 150000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.5, 250000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.2 და 100000 ლარიან წაგებას ალბათობით 0.3. B პროექტი იძლევა 100000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.6, 200000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.3 და 50000 ლარიან წაგებას ალბათობით 0.1. დაადგინეთ რომელ პროექტს უნდა დაუჭიროს მხარი ფინანსურმა დირექტორმა. მითითება: შეადარეთ ერთმანეთს $E(A)$ და $E(B)$.

39. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	1	2	3	4	5
P	a	0.3	0.2	0.1	0.2

იპოვეთ: a და ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და სტანდარტული გადახრა.

41. წესიერ სათამაშო კამათელს აგდებენ მანამ სანამ არ გამოჩნდება 6 ქულა ან არ ჩატარდება 4 აგდება. ξ იყოს ჩატარებულ აგდებათა რაოდენობა, ხოლო η – კი მოსული 6 ქულების რაოდენობა ამ თამაშში. იპოვეთ: ა) ξ-ს განაწილების კანონი; ბ) ξ-ს სტანდარტული გადახრა; გ) $E\eta$.

43. კომიტეტი, რომლის შემადგენლობაში შედის 6 მამაკაცი და 4 ქალი, ირჩევს თავის 2 წარმომადგენელს. ვიგულისხმოთ, რომ კომიტეტის ნებისმიერი წევრის არჩევა თანაბარად შესაძლებელია და ავაგოთ არჩეული ქალების რაოდენობის განაწილების კანონი. ვიპოვოთ არჩეული ქალების მოსალოდნელი რიცხვი.

45. მონეტას აგდებენ 5-ჯერ. ξ შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსულ გერბთა რიცხვი, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდე კი ბოლო ორ აგდებაში მოსულ გერბთა რიცხვი. ავაგოთ ამ

შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი და ვიპოვოთ კოვარიაცია.

47. მონადირეს აქვს 4 ტყვია. ის ესვრის კურდღელს მანამ სანამ არ მოარტყამს ან ტყვია არ გაუთავდება. გამოთვალეთ სროლათა რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი, თუ ცნობილია, რომ მოხვედრის ალბათობაა 0.25.

49. საშუალოდ რამდენჯერ შეიძლება მოვიდეს გერბი წესიერი მონეტის 7-ჯერ აგდებისას?

51. სასტუმროს მენეჯერს ჯიბეში უდევს 8 ოთახის გასაღები, რომლებიც ვიზუალურად ერთმანეთისაგან არ განსხვავდება. მენეჯერი შემთხვევით იღებს გასაღებს და ცდილობს გააღოს უახლოესი ოთახის კარი. საშუალოდ რამდენჯერ მოუწევს მენეჯერს იმის გასინჯვა ეს გასაღები აღებს თუ არა ამ ოთახს (არის თუ არა ამ ოთახის), თუ იგი შემოწმებულ გასაღებს: ა) ჯიბეში აბრუნებს; ბ) ჯიბეში არ აბრუნებს.

53. მძღოლმა უნდა გაიაროს 4 შუქნიშანი. თითოეული შუქნიშანი მას გაატარებს 0.5 ალბათობით. იპოვეთ შუქნიშანთა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი მძღოლს პირველ გაჩერებამდე.

55. კალათბურთელს საჯარიმოს ჩაგდება შეუძლია ალბათობით 0.5. ზედიზედ საშუალოდ რამდენი საჯარიმოს ჩაგდება შეუძლია კალათბურთელს.

57. მოცემულია ξ, η და ζ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები:

ξ	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0.1	0.1	0.1	0.09	0.3	0.009	0.3	0.001

η	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.001	0.2	0.001	0.3	0.008	0	0.09	0.4

ζ	20	10	5	2	1	-2	-5	-10
P	0.001	0.2	0.009	0.29	0.001	0.009	0.2	0.29

გამოთვალეთ: ა) $E(\xi^2)$; ბ) $E(2\eta)$; გ) $E(\zeta/2)$ ბ) $D(\xi+\eta-\zeta)$, თუ ცნობილია, რომ ξ, η და ζ დამოუკიდებელია.

59. სამიზნეს ესვრიან 3-ჯერ. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.4. იპოვეთ მიზანში მოხვედრათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

61. იპოვეთ დისპერსია ξ შემთხვევითი სიდიდის, რომელიც წარმოადგენს A ხდომილების მოხდენათა რაოდენობას ორ დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში თუ ცნობილია, რომ A ხდომი-

ლების მოხდენის ალბათობები ამ ექსპერიმენტებში ერთი და იგივეა და $E\xi = 1.2$.

63. ბავშვი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში. ის აგდებს წესიერ მონეტას. გერბის მოსვლის შემთხვევაში ის დგამს ერთ ნაბიჯს მარჯვნივ, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მარცხნივ. ξ იყოს ბავშვის მდებარეობის აბცისა მონეტის n-ჯერ აგდების შემდეგ. როგორი სახე ექნება ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას? იპოვეთ $E\xi$ და $D\xi$.

65. მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

ξ	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

იპოვეთ 2^{ξ} შემთხვევითი სიდიდის ლოდინი და დისპერსია.

67. ცნობილია, რომ $E\xi = a$ და $D\xi = b$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი სიდიდეების: ა) $\eta = -\xi$; ბ) $\theta = \xi + 2\eta - 1$; გ) $\delta = 3\xi - \eta + 2\theta - 3$.

69. A იყოს ხდომილება: 3 წესიერი მონეტის აგდებისას ორი გერბის მოსვლა. 3 მონეტას აგდებენ n-ჯერ. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი სიდიდეების ξ და η, სადაც ξ არის n ცდაში A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი, ხოლო $\eta = \xi / n$ კი A ხდომილების სიხშირე.

71. ყუთში a თეთრი და b შავი ბურთია. შემთხვევით იღებენ k ბურთს, $k \le a + b$. იპოვეთ ამოღებული თეთრი ბურთების რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

73. ნავთობმომპოვებელი კომპანია განიხილავს ორი მიმართულებით ბურღვის შესაძლებლობას. შეფასების მიხედვით I მიმართულებით წარმატების ალბათობაა 0.2 და ეს იძლევა 30 მილიონიან მოგებას, ხოლო მარცხის ალბათობა შეადგენს 0.8-ს და ეს იწვევს 3 მილიონიან დანაკარგს. II მიმართულების შემთხვევაში კი 0.1 ალბათობით მიიღებს 70 მილიონიან მოგებას და 0.9 ალბათობით დაკარგავს 4 მილიონს. რომელ მიმართულებაზე უნდა გააკეთოს არჩევანი კომპანიამ?

75. ცნობილია, რომ ვაჟის და ქალის გაჩენა არაა ერთნაირად მოსალოდნელი. სამშვილიან ოჯახებზე დაკვირვებების მიხედვით შედგენილია ვაჟების დაბადების რიცხვის განაწილების შემდეგი ცხრილი:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.12	0.36	0.38	0.14

როგორია ვაჟების მოსალოდნელი რიცხვი სამშვილიან ოჯა-ხში?

77. იპოვეთ $E(\delta+\theta)$ და $D(\delta-\theta)$, სადაც $\delta = 2\xi - 3\eta$, $\theta = \frac{1}{4}\varsigma - 13$, თუ ცნობილია, რომ: $E\xi = -2$, $D\xi = 0.5$, $E\eta = 3$, $D\eta = 2$, $E\varsigma = 4$, $D\varsigma = 1$, $E(\xi\eta) = -1$, $\mathrm{cov}(\xi,\varsigma) = 5$, $\rho(\eta,\varsigma) = 0.5$.

თავი VI

დისკრეტულ განაწილებათა გამოყენებები

ბინომიალური განაწილება

- თუ ყოველ კონკრეტულ ცდას გააჩნია ორი შესაძლო შედეგი (წარმატება და მარცხი) და ისინი ურთიერთგამომრიცხავია;
- ტარდება ცდათა სასრული რაოდენობა – n;
- ყოველი ცდის შედეგი დამოუკიდებელია ყველა დანარჩენი ცდის შედეგისაგან;
- ცალკეულ ცდაში წარმატების p ალბათობა მუდმივია;

მაშინ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს წარმატებათა რაოდენობას n ცდაში უწოდებენ ბინომიალურ შემთხვევით სიდიდეს, აღნიშნავენ $Bi(n,p)$ სიმბოლოთი და მას აქვს შემდეგი განაწილების კანონი:

$$P\{Bi(n,p)=k\}\equiv P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\dots,n.$$

ამასთანავე, $E[Bi(n,p)]=np$; $D[Bi(n,p)]=np(1-p)$.

პუასონის განაწილება

$$P\{Po(\lambda)=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\dots;\ E[Po(\lambda)]=\lambda;\ D[Po(\lambda)]=\lambda.$$

პუასონის განაწილება ადეკვატური მოდელია იმ ხდომილებებისათვის, რომლებიც:

- ხდებიან შემთხვევით სივრცეში ან დროში;
- ხდებიან ცალ-ცალკე (ერთდროულად მოხდენა არ შეიძლება);
- ხდებიან დამოუკიდებლად, და
- ხდებიან მუდმივი ინტენსივობით (ხდომილებათა რაოდენობა მოცემულ დროის ინტერვალში ამ ინტერვალის სიგრძის პროპორციულია).

მაგალითი 1. მოცემულია $\xi\cong Bi(8,\frac{1}{4})$. იპოვეთ: ა) $P\{\xi=6\}$; ბ) $P\{\xi\le 2\}$; გ) $P\{\xi>0\}$.

ამოხსნა.

ა) ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით, სადაც $n=8$ და $p=\frac{1}{4}$.

გვაქვს: $P\{\xi=6\}=C_8^6\cdot(\frac{1}{4})^6\cdot(\frac{3}{4})^2=28\cdot(\frac{1}{4})^6\cdot(\frac{3}{4})^2=0.00385\approx0.004$;

ბ) $P\{\xi\le2\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}=C_8^0\cdot(\frac{1}{4})^0\cdot(\frac{3}{4})^8+C_8^1\cdot(\frac{1}{4})^1\cdot(\frac{3}{4})^7+$

$+C_8^2\cdot(\frac{1}{4})^2\cdot(\frac{3}{4})^6=0.1001+0.2669+0.3114=0.6785\approx0.679$;

გ) გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$P\{\xi>0\}=1-P\{\xi=0\}=1-C_8^0\cdot(\frac{1}{4})^0\cdot(\frac{3}{4})^8=1-0.1001=0.8998\approx0.9$.

მაგალითი 3. მოცემულია $\xi\cong Bi(10,0.3)$. იპოვეთ:

ა) $E\xi$ და $D\xi$; ბ) $P\{E\xi-\sigma\xi<\xi<E\xi+\sigma\xi\}$.

ამოხსნა.

ა) $E\xi=np=10\cdot0.3=3$, $D\xi=np(1-p)=10\cdot0.3\cdot0.7=2.1$;

ბ) $P\{E\xi-\sigma\xi<\xi<E\xi+\sigma\xi\}=P\{3-\sqrt{2.1}<\xi<3+\sqrt{2.1}\}=$
$=P\{3-1.44<\xi<3+1.44\}=P\{1.55<\xi<4.44\}=$
$=\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}+P\{\xi=4\}=P\{\xi\le4\}-P\{\xi\le1\}=$
$=0.8497-0.1493=0.7004\approx0.7.$

მაგალითი 5. ცნობილია, რომ $\xi\cong Bi(n,p)$, $E\xi=24$ და $D\xi=8$. იპოვეთ n და p.

ამოხსნა. ვინაიდან $E[Bi(n,p)]=np$ და $D[Bi(n,p)]=np(1-p)$, ამიტომ $24=np$ და $8=np(1-p)=24(1-p)$. საიდანაც $1-p=1/3$ ანუ $p=2/3$. შესაბამისად, $n=24/p=24\cdot3/2=36$.

მაგალითი 7 (ბანახის ამოცანა). ორი ყუთიდან თითოეულში მოთავსებულია n ასანთი. აგდებენ წესიერ მონეტას და მასზე გერბის მოსვლის შემთხვევაში ერთ ასანთს იღებენ I ყუთიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი II ყუთიდან. როგორია ალბათობა იმისა, რომ I ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში II ყუთში დარჩება m ასანთი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A = {I ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში II ყუთში დარჩება m ასანთი}, B_i = {ასანთი ამოღებულია i-ური ყუთიდან}, $i=1,2$.

მონეტის სიმეტრიულობის გამო $P(B_1)=P(B_2)=1/2$. თუ I ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში II ყუთში დარჩა m ასანთი, ეს

იმას ნიშნავს, რომ მონეტის $2n-m$ აგდებისას n-ჯერ მოვიდა გერბი, ხოლო $(n-m)$-ჯერ კი საფასური, ანუ ცდის $(2n-m)$-ჯერ ჩატარებისას ხდომილება B_1 მოხდა n-ჯერ. შესაბამისად, ბერნულის ფორმულის თანახმად:

$$P(A)=C_{2n-m}^{n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^{n-m}}=C_{2n-m}^{n}\cdot\frac{1}{2^{2n-m}}.$$

მაგალითი 9. რადიოაქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას საშუალოთი 5. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წამში გამოსხივებული იქნება: ა) 0; ბ) 1; გ) 2; დ) 3 ან მეტი ნაწილაკი.

ამოხსნა. ξ იყოს შემთხვევითი სიდიდე: „რადიაქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა“, მაშინ პირობის თანახმად $\xi\cong Po(5)$. ვისარგებლოთ პუასონის განაწილების კანონითა და შესაბამისი ცხრილებით, მაშინ:

ა) $P\{\xi=0\}=\frac{5^0}{0!}e^{-5}=0.0067$;

ბ) $P\{\xi=1\}=\frac{5^1}{1!}e^{-5}=0.0337$;

გ) $P\{\xi=2\}=\frac{5^2}{2!}e^{-5}=0.0842$;

დ) გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$P\{\xi\ge 3\}=1-P\{\xi<3\}=1-P\{\xi=0\}-P\{\xi=1\}-P\{\xi=2\}=$

$=1-0.0067-0.0337-0.0842=0.875$.

მაგალითი 11. V მლ ტბის წყალში ორგანული ნაწილაკების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილების კანონს საშუალოთი $0.2V$. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) 50 მლ ტბის წყალი შეიცავს 8-ზე ნაკლებ ორგანულ ნაწილაკს; ბ) 30 მლ ტბის წყალი შეიცავს 2-ზე მეტ ორგანულ ნაწილაკს; გ) 10 მლ ტბის წყალი შეიცავს ზუსტად 3 ორგანულ ნაწილაკს.

ამოხსნა. ა) $V=50$, $\lambda=0.2\cdot 50=10$, ე. ი. $\xi\cong Po(10)$. ვისარგებლოთ პუასონის დაგროვილი (კუმულატიური) ალბათობების ცხრილით:

$$P\{\xi<8\}=P\{\xi\le 7\}=0.2202;$$

ბ) $V=30$, $\lambda=0.2\cdot 30=6$, ე. ი. $\xi\cong Po(6)$. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\le 2\}=1-0.0619=0.938;$$

გ) $V=10$, $\lambda=0.2\cdot 10=2$, ანუ $\xi\cong Po(2)$. ამიტომ

$$P\{\xi=3\}=0.1804.$$

მაგალითი 13. აეროპორტში წუთში საშუალოდ ჯდება 3 თვითმფრინავი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 2 წუთში აეროპორტში დაჯდება არანაკლებ 4 თვითმფრინავი?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად 2 წუთში აეროპორტში საშუალოდ დაჯდება 6 თვითმფრინავი. შესაბამისად, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს პუასონის განაწილებასთან პარამეტრით 6. შემოვიღოთ ხდომილებები: A ={დაჯდა არანაკლებ 4}; $A_i=\{\text{დაჯდა } i\}$, $i=0,1,2,3$. ცხადია, რომ A_i ხდომილებები უთავსებადებია და $\overline{A}=\bigcup_{i=0}^{3}A_i$. ამიტომ $P(\overline{A})=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)$. თითოეული $P(A_i)$ ალბათობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ პუასონის ფორმულით:

$$P(A_i)=P\{Po(6)=i\}=\frac{6^i}{i!}\cdot e^{-6},\ i=0,1,2,3.$$

პუასონის განაწილების ცხრილის გამოყენებით ადვილად დავინახავთ, რომ: $P(A_0)=0.0025$, $P(A_1)=0.0149$, $P(A_2)=0.0446$ და $P(A_3)=0.0892$. შესაბამისად, $P(\overline{A})=0.1512$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება $P(A)=1-P(\overline{A})=0.8488$.

ამოცანები

1. წესიერ სათამაშო კამათელს აგდებენ 10-ჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) 3 ქულა მოვა 4-ჯერ; ბ) 4 ქულა მოვა 5-ჯერ; გ) 3 ქულა მოვა 6-ჯერ.
3. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ბინომური განაწილება პარამეტრებით $n=6$ და $p=0.2$. გამოთვალეთ: ა) $P\{\xi=3\}$; ბ) $P\{\xi=4\}$; გ) $P\{\xi=6\}$; დ) $E\xi$.
5. ცნობილია, რომ $\xi\cong Bi(9,0.45)$. იპოვეთ:
   ა) $P\{\xi=3\}$; ბ) $P\{\xi=4 \text{ ან } 5\}$; გ) $P\{\xi\geq 7\}$; დ) $E\xi$.
7. ცნობილია, რომ $\xi\cong Bi(10,0.5)$. გამოთვალეთ:
   ა) $P\{2\leq\xi\leq 5\}$; ბ) $P\{\xi\leq 1 \text{ ან } \xi>5\}$.
9. უნივერსიტეტის სტუდენტთა 30%-ის ასაკი მერყეობს 16-წლიდან 19 წლამდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვე-

ვით შერჩეული 10 სტუდენტიდან 4-ზე ნაკლების ასაკი იქნება 16-დან 19 წლამდე.

11. მეფრინველეობის ფაბრიკაში წარმოებული 6 – 6 კვერცხი ჩალაგებულია ყუთებში. თითეული კვერცხის გატეხვის ალბათობა სხვა კვერცხებისაგან დამოუკიდებლად არის 0.1. ყუთს დავარქვათ ცუდი, თუ მასში დევს სულ ცოტა 2 გატეხილი კვერცხი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთი ცუდია.
13. ცნობილია, რომ დღის გარკვეულ მონაკვეთში ქვეყნის ზრდასრული მოსახლეობის 35% ატარებს ჯინსებს. ა) დღის ამ მონაკვეთში შეირჩა 12 ზრდასრული ადამიანი. გამოიყენეთ ბინომიალური განაწილება და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მათგან ზუსტად ხუთს აცვია ჯინსი; ბ) თუ ალბათობა იმისა, რომ ერთ ადამიანს მაინც აცვია ჯინსი არის 0.95, მაშინ რამდენი ადამიანია შერჩეული?
15. ბანკმა გასცა კრედიტი 10 ადამიანზე, რომელთაგან თითოეულის მიერ კრედიტის დაუბრუნებლობის ალბათობა არის 0.15. იპოვეთ ვალის არდამბრუნებელ კრედიტორთა: ა) განაწილების კანონი; ბ) მათემატიკური ლოდინი; გ) უალბათესი რიცხვი.
17. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით საშუალოთი 3. იპოვეთ: ა) $P\{\xi=2\}$; ბ) $P\{\xi\le 1\}$; გ) $P\{\xi\ge 3\}$.
19. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით საშუალოთი 2.4. იპოვეთ: ა) $P\{\xi\le 3\}$; ბ) $P\{\xi\ge 2\}$; გ) $P\{\xi=3\}$.
21. წუთში საშუალოდ 15 მომხმარებელი გაივლის სუპერმარკეტის სალარო-აპარატთან შემოწმებას. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს მიახლოებით პუასონის განაწილება და გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) 10 წუთიან ინტერვალში არც ერთი მომხმარებელი არ გაივლის სალაროაპარატთან შემოწმებას; ბ) 15 წუთიან ინტერვალში 3-ზე მეტი მომხმარებელი გაივლის სალარო-აპარატთან შემოწმებას.
23. ტექნიკური მომსახურების სადგურში 1 საათში შემოდის 100 ავტომობილი. შემოსულ ავტომობილთა რაოდენობა განაწილებულია პუასონის კანონით. იპოვეთ: ა) ალბათობა იმისა, რომ ტექნიკური მომსახურების სადგურში 3 წუთის განმავლობაში არ შემოვა ავტომობილი; ბ) დროის ინტერვალი, რომელშიც სულ ცოტა 0.25-ის ტოლი ალბათობით ტექნიკური მომსახურების სადგურში არ შემოვა ავტომობილი.
25. ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში მიუთითეთ როდისაა პუასონის განაწილება ადეკვატური მოდელი: ა) წვიმის წვეთების რაოდენობა, რომელიც ჩვარდება ლიმონათის ბოთლში 1 წუ-

თის განმავლობაში; ბ) სატვირთო ავტომობილების რაოდენობა, რომლებიც გადაკვეთენ კონკრეტულ ადგილს გადატვირთულ ავტომაგისტრალზე; გ) თვის განმავლობაში სადაზღვევო კომპანიაში შემოსულ პრეტენზიათა რაოდენობა.

27. მარტის თვეში შემოსული სატელეფონო ზარების რაოდენობის განაწილების კანონია

დღეში შემოსული ზარების რაოდენობა (x)	0	1	2	3	4
დღეების რაოდენობა	9	12	5	4	1

ა) გამოთვალეთ ფარდობითი სიხშირეები; ბ) გამოთვალეთ განაწილების საშუალო და დისპერსია. ახსენით ესადაგება თუ არა პუასონის განაწილება; გ) გამოიყენეთ პუასონის განაწილება და წინა პუნქტში გამოთვლილი საშუალოს მიხედვით გამოთვალეთ $P\{\xi = x\}$, $x = 0,1,2,3,4$; დ) შეადარეთ თეორიული ალბათობები და ფარდობითი სიხშირეები. ეთანხმებით თუ არა ბ) პუნქტის დასკვნას?

29. ავტომაგისტრალის მე-100 კილომეტრზე შუადღის 10-წამიან ინტერვალში გავლილი მანქანების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას $\xi \cong Po(0.8)$. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნულ ადგილს გადაკვეთს 3, 4 ან 5 ავტომობილი; ბ) ცნობილია, რომ აღნიშნული ადგილი გადაკვეთა 3, 4 ან 5 ავტომობილმა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ავტომობილების რაოდენობა იყო ზუსტად 4.

31. ავტოქარხნის ყოველკვირეული მოცდენების რაოდენობა ξ განაწილებულია შემდეგნაირად:

x	0	1	2	3	4	5	6
$P\{\xi = x\}$	0.04	0.24	0.28	0.16	0.16	0.08	0.04

ა) იპოვეთ ξ-ს საშუალო; ბ) რა იქნება მოცდენების ერთობლივი მოსალოდნელი რაოდენობა მომავალი 48 კვირის განმავლობაში?

33. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ სამ კარტს დაბრუნების გარეშე. შეადგინეთ ამოღებული ტუზების რიცხვის განაწილების კანონი.

35. დამწყები მეისრე მიზანში ახვედრებს ალბათობით 0.3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში 6-ჯერ სროლისას მეისრე მიზანს მოარტყამს 2-ჯერ მაინც.

37. აგდებენ 10 წესიერ სათამაშო კამათელს. თქვენ გითხრეს, რომ ერთ-ერთი აგდების შედეგი არის 6 ქულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სულ ცოტა ორჯერ მოვიდა 6 ქულა.
39. პატარა ქალაქის სახანძრო სადგურში ღამის გამოძახებათა რიცხვი მოდელირდება პუასონის განაწილებით საშუალოთი 4.2 ღამის განმავლობაში. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტულ ღამეს სახანძრო სადგურში შემოვა 3 ან მეტი გამოძახება. ბ) რას უნდა აკმაყოფილებდეს სახანძრო სადგურში შემოსული გამოძახებები, რომ ის იყოს პუასონის მოდელის ადეკვატური?
41. სახლის მეპატრონეს სურს ბაღში დათესოს ბალახი. თესლის მობნევა ხდება შემთხვევით და ბაღის კონკრეტულ 1 კვ. სანტიმეტრი ფართობის მქონე ნაწილში დავარდნილი თესლის რაოდენობა ξ წარმოადგენს პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, რომლის საშუალო ბაღის ნაწილის ფართობის პროპორციულია. ბაღის ფართობია 50 კვ. მეტრი და ითესება 10^6 ბალახის თესლი. გამოთვალეთ: ა) ξ-ს საშუალო; ბ) ალბათობა იმისა, რომ 1 კვ. სმ. ფართობის მქონე ნაწილში არ დაეცემა არც ერთი თესლი; გ) $P\{\xi = 0 \text{ ან } \xi > 4\}$.
43. უმაღლესი ლიგის ფეხბურთის მატჩებში გატანილი ბურთების რაოდენობის ანალიზმა აჩვენა, რომ შემთხვევით შერჩეულ მატჩში გატანილი გოლების რაოდენობის მოდელად შეიძლება განვიხილოთ პუასონის განაწილება პარამეტრით 2.7. სხვადასხვა მატჩებში გატანილი გოლების რაოდენობა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) მატჩი დასრულდება გოლის გარეშე; ბ) მატჩში გატანილი იქნება 4 ან მეტი გოლი.
45. ფეიქარი ემსახურება კონვეირს, სადაც ერთდროულად 800 ძაფი იხვევა. თითოეული ძაფის ერთ წუთის განმავლობაში გაწყვეტის ალბათობაა 0.0005. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 10 წუთის განმავლობაში გაწყდება არა უმეტეს 2 ძაფი.

ამოცანები გამოცდისათვის

47. აგდებენ წესიერ სათამაშო კამათელს, რომელზეც აღნიშნულია ციფრები 1, 1, 2, 3, 4, 5. იპოვეთ მოსული ქულის საშუალო და დისპერსია.
49. ყოველი თამაშისას ბიჭი იგებს პრიზს ალბათობით 0.25. ის თამაშობს 10-ჯერ. ვიგულისხმოთ, რომ თამაშები ურთიერთდამოუკიდებელია. ξ იყოს მოგებულ პრიზთა რაოდენობა. იპოვეთ: ა) $E\xi$; ბ) $P\{\xi \le 2\}$.

51. ნიკა და რეზო აგდებენ ორ-ორ წესიერ სათამაშო კამათელს ერთდროულად. თითეულ კამათელზე მოსული ქულები იკრიბება. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ნიკა მოაგროვებს 9 ქულას; ბ) ნიკა და რეზო ორივე მოაგროვებს 9 – 9 ქულას; გ) ნიკა და რეზო მოაგროვებენ ერთსა და იმავე ქულას; დ) ნიკას მიერ მოგროვილი ქულა აღემატება რეზოს მიერ მოგროვილ ქულას.
53. ორი ტელეგრაფისტი გადასცემს გარკვეულ ტექსტს. ჯუანშერი ტექსტის გადაცემისას საშუალოდ უშვებს 2.7 შეცდომას, ხოლო ღვთისავარი 2.5 შეცდომას. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული ტელეგრაფისტის მიერ დაშვებული შეცდომების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ტექსტის გადაცემისას: ა) ჯუანშერი დაუშვებს 2 შეცდომას; ბ) ღვთისავარი დაუშვებს 3 შეცდომას; გ) ჯუანშერი დაუშვებს 2 შეცდომას და ღვთისავარი დაუშვებს 3 შეცდომას.
55. წარსული დაკვირვებებიდან იაგომ იცის, რომ ფოსტალიონის მიერ დღის განმავლობაში მის სახლში მოტანილი წერილების რაოდენობა განაწილებულია პუასონის კანონით საშუალოთი 3. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ დღეს ფოსტალიონი იაგოს სახლში მოიტანს ორ წერილს; ბ) ერთ დღეს იაგომ დაინახა, რომ ფოსტალიონი უახლოვდება მის სახლს და, შესაბამისად, მან იცის, რომ ფოსტალიონს მოაქვს წერილი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ დღეს ფოსტალიონი მოიტანს ორ წერილს.
57. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით λ და აკმაყოფილებს თანაფარდობას: $P\{\xi=3\}=P\{\xi=0\}+\ +P\{\xi=1\}$. ა) გამოთვალეთ λ-ს მნიშვნელობა; ბ) გამოთვალეთ $P\{2\le\xi\le 4\}$.
59. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

x	0	1	2	3
$P\{\xi=x\}$	0.2	a	b	0.25

ცნობილია, რომ $E\xi=1.55$. ა) იპოვეთ a და b; ბ) იპოვეთ $D\xi$.
61. მოთამაშეს შეაქვს n ლარი, ირჩევს 1, 2, 3, 4, 5 და 6 რიცხვებიდან ერთ რიცხვს და აგდებს სამ წესიერ სათამაშო კამათელს. თუ არჩეული რიცხვი მოვა სამივე კამათელზე, მაშინ ის იგებს შეტანილი თანხის გაოთხმაგებულს. თუ არჩეული რიცხვი მოვა ზუსტად ორ კამათელზე, მაშინ ის იგებს შეტანილი თანხის გასამმაგებულს. თუ არჩეული რიცხვი მოვა ზუსტად ერთ კამათელზე, მაშინ ის იგებს შეტანილი თანხის

გაორმაგებულს. თუ არჩეული რიცხვი არ მოვა არც ერთ კამათელზე, მაშინ ის არაფერს იგებს:

ა) გადაწერეთ და დაასრულეთ მოგებული თანხის რაოდენობის განაწილების კანონი:

მოგება	$-n$	n	$2n$	$3n$
ალბათობა		75/216		

ბ) აჩვენეთ, რომ მოთამაშის მოსალოდნელი მოგება არის $-\frac{17}{216}n$ ლარი;

გ) რა თანხა უნდა შეიტანოს მოთამაშემ, რომ მისი მოსალოდნელი დანაკარგი იყოს 34 თეთრი?

63. დისკრეტულ ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს შემდეგი განაწილების კანონი:

$$P\{\xi = x\} = \begin{cases} \frac{k}{x}, & \text{როცა } x = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

გამოთვალეთ: ა) k მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $E\xi$.

თავი VII

უწყვეტი ტიპის განაწილებები

ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის,** თუ მისი განაწილების ფუნქცია – $F_\xi(x) := P\{\xi \le x\}$ უწყვეტია. თუ განაწილების ფუნქცია წარმოიდგინება $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$ სახით, მაშინ $f_\xi(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე.** სიმკვრივეს აქვს შემდეგი თვისებები:

ა) $f(x) \ge 0$ ყოველი x-სათვის;

ბ) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;

გ) $P\{\xi \in \langle a,b\rangle\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx$, სადაც $\langle a,b\rangle$ არის ნებისმიერი (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ ინტერვალებიდან.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა** Me არის ის მნიშვნელობა, რომელიც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებულ ფართობს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად. მათემატიკურად ის ასე განიმარტება:

$$P\{\xi \le Me\} = F_\xi(Me) = \int_{-\infty}^{Me} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის p**-კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p მნიშვნელობას, რომელ მნიშვნელობამდეც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებული ფართობი p-ს ტოლია:

$$P\{\xi \le x_p\} = F_\xi(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f_\xi(x)dx = p.$$

გასაგებია, რომ $x_{0.5} = Me$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **ქვედა კვარტილი** Q_1 (შესაბამისად, **ზედა კვარტილი,** Q_3) ეწოდება $\frac{1}{4}$-კვანტილს (შესაბამისად, $\frac{3}{4}$-კვანტილს).

სხვაობას $Q_3 - Q_1$ **კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი** ეწოდება.

განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილს **ზედა** α**-კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** Mo ეწოდება არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, სადაც სიმკვრივე აღწევს მაქსიმუმს: $f_\xi(Mo) = \max\limits_x f_\xi(x)$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი (ანუ საშუალო)** განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E\xi = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx .$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** გამოითვლება ფორმულით:

$$D\xi = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \mu^2 .$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი a გამოითვლება ფორმულით:

$$a = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f_\xi(x)dx .$$

ექსცესის კოეფიციენტი e ტოლია:

$$e = \frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 f_\xi(x)dx - 3 .$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & \text{თუ } 1\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) შეამოწმეთ, რომ $f_\xi(x)$ აკმაყოფილებს სიმკვრივის *ა* და *ბ* თვისებას;

ბ) გამოთვალეთ $P\{1.5\le\xi\le 2\}$.

ამოხსნა. ა) $f(x)\ge 0$ ყოველი x-სათვის, ვინაიდან $\frac{2}{3}x>0$, როცა $x>0$; გარდა ამისა,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx=\int_1^2\frac{2}{3}xdx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\cdot(2^2-1^2)=1.$$

ბ) $P\{1.5\le\xi\le 2\}=\int_{1.5}^{2} f_\xi(x)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1.5}^{2}=$

$$=\frac{1}{3}\cdot(2^2-1.5^2)=\frac{1}{3}\cdot 1.75=0.583.$$

მაგალითი 3. სავაჭრო ცენტრის გამყიდველთა წლიური ხელფასი ξ, გაზომილი 1000 ლარებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}cx^{-7/2}, & \text{თუ } x\ge 16;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c-ს მნიშვნელობა; ბ) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული გამყიდველის წლიური ხელფასი მოთავსებულია 20 000 ლარსა და 30 000 ლარს შორის.

ამოხსნა.

ა) $1=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx=\int_{16}^{\infty} cx^{-7/2}dx=-\frac{2}{5}\cdot cx^{-5/2}\Big|_{16}^{\infty}=(-0)-(-\frac{2}{5}\cdot c\cdot 16^{-5/2})=\frac{c}{2560}$,

საიდანაც $c=2560$;

ბ) $P\{20\le\xi\le 30\}=\int_{20}^{30}2560x^{-7/2}dx=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot x^{-5/2}\Big|_{20}^{30}=$

$$=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 30^{-5/2}-2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 20^{-5/2}=0.365.$$

მაგალითი 5. მე-3 მაგალითში გამოთვალეთ წლიური ხელფასის: ა) მედიანა; ბ) ქვედა და ზედა კვარტილები; გ) მოდა; დ) მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. ა) გვაქვს:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M} f_{\xi}(x)dx=\int_{16}^{M}2560x^{-7/2}dx=2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\big|_{16}^{M}=-1024M^{-5/2}+1.$$

ამიტომ მედიანისათვის ვღებულობთ განტოლებას:

$$-1024M^{-5/2}+1=1/2.$$

საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ $M^{5/2}=2048$, ანუ $Me=21.1$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მედიანა იქნება $21.1\cdot 1000=21100$ ლარი;

ბ) განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{4}=\int_{-\infty}^{Q_1} f_{\xi}(x)dx=\int_{16}^{Q_1}2560x^{-7/2}dx=2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\big|_{16}^{Q_1}=-1024Q_1^{-5/2}+1.$$

შესაბამისად, ქვედა კვარტილისათვის გვაქვს განტოლება: $-1024Q_1^{-5/2}+1=1/4$, საიდანაც გვაქვს: $Q_1=(1024\cdot\frac{4}{3})^{2/5}=18$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ ზედა კვარტილი $Q_3=27.9$;

გ) ვინაიდან სიმკვრივე კლებადი ფუნქციაა ინტერვალზე $[16,+\infty)$, ამიტომ მოდა იქნება $Mo=16$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მოდაა $16\cdot 1000=16000$ ლარი.

დ) განმარტების თანახმად:

$$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf_{\xi}(x)dx=\int_{16}^{\infty}x\cdot 2560x^{-7/2}dx=\int_{16}^{\infty}2560x^{-5/2}dx=$$

$$=2560\cdot(-\frac{2}{3})\cdot x^{-3/2}\big|_{16}^{\infty}=0-2560\cdot(-\frac{2}{3})\cdot 16^{-3/2}\big|_{16}^{\infty}=26\frac{2}{3}.$$

ე. ი. გამყიდველთა ხელფასის საშუალოა $26\frac{2}{3}\cdot 1000=26700$ ლარი.

შევნიშნავთ, რომ საშუალო მეტია მედიანაზე, ვინაიდან განაწილება დადებითად ასიმეტრიულია.

მაგალითი 7. ბენზინგასამართი სადგურის ყოველკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე ξ გაზომილი 1000 ლიტრებში მოდელირდება სიმკვრივის ფუნქციით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}120x^2(1-x), & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

გამოთვალეთ საშუალოკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე.

ამოხსნა. განმარტების თანახმად:

$$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx=\int_0^1 x\cdot 120x^2(1-x)dx=120\cdot\int_0^1(x^3-x^4)dx=$$

$$=(30x^4-24x^5)\big|_0^1=30-24=6\,.$$

შესაბამისად, ბენზინგასამართი სადგურის საშუალო მოთხოვნა ბენზინზე კვირაში შეადგენს: $6\cdot 1000=6000$ ლიტრს.

მაგალითი 9. მოცემულია განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ფორმულით: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$.

თუ $x\le 0$, მაშინ $f(x)=0$. შესაბამისად, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0du=0$;

თუ $0<x\le\pi/2$, მაშინ $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0du+\int_0^x\cos udu=\sin x$;

თუ $x>\pi/2$, მაშინ $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0du+\int_0^{\pi/2}\cos udu+\int_{\pi/2}^{x}0du=\sin x\big|_0^{\pi/2}=1$.

საბოლოოდ გვაქვს: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

ამოცანები

1. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}c(1-\dfrac{1}{8}x), & \text{თუ } 0\le x\le 8;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $P\{\xi\ge 6\}$;

გ) $P\{4 \le \xi \le 6\}$.

3. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c(x^2+2), & \text{თუ } 0 \le x \le 3; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $P\{\xi \le 1.5\}$.

5. კომპიუტერის „კარტრიჯის“ მუშაობის ხანგრძლივობაა ξ საათი. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx^{-2}, & \text{თუ } x \ge 400; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

გამოთვალეთ c მუდმივის მნიშვნელობა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) „კარტრიჯი“ იმუშავებს სულ ცოტა 500 საათი; ბ) „კარტრიჯი“ შესაცვლელი გახდება მანამ სანამ ის იმუშავებს 600 საათი; გ) ორი „კარტრიჯი“ შესაცვლელი იქნება მანამ სანამ თითოეული იმუშავებს 600-600 საათი; დ) ოთხი „კარტრიჯიდან“ ორი იმუშავებს 600 საათზე მეტს, ხოლო ორი 600 საათზე ნაკლებს.

7. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{თუ } 0 \le x \le 3; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა) მედიანა; ბ) ქვედა და ზედა კვარტილები.

9. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{თუ } 2 \le x \le 3; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და მოდა; გ) იპოვეთ კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

11. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x), & \text{თუ } 0 \le x \le 2; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდალური მნიშვნელობა.

13. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

15. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{8}x), & \text{თუ } 0\le x\le 8;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

17. ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}3000x^{-4}, & \text{თუ } x\ge 10;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობის საშუალო და დისპერსია.

19. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0.5x-1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც: ა) ნაკლებია 0.2-ზე; ბ) ნაკლებია 3-ზე; გ) არ არის ნაკლები 3-ზე; დ) არ არის ნაკლები 5-ზე.

21. იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე, თუ განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

23. იპოვეთ განაწილების ფუნქცია, თუ განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

25. იპოვეთ [2, 8] მონაკვეთზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და სტანდარტული გადახრა.

27. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x<-\pi/2,\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1), & \text{თუ} \quad -\pi/2\le x<\pi/2,\\ 1, & \text{თუ} \quad x\ge \pi/2.\end{cases}$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $(0,\pi/4]$ ინტერვალიდან.

29. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{თუ} \quad 0\le x<\pi,\\ 0, & \text{თუ} \quad x\ge \pi.\end{cases}$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $[\pi/4,\pi/2]$ ინტერვალიდან.

31. ელექტრომოწყობილობის გამართული მუშაობის დრო განაწილებულია კანონით $f(x)=0.03e^{-0.03x}$, სადაც x არის დრო საათებში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ელექტრომოწყობილობა გამართულად იმუშავებს არანაკლებ 100 საათს.

თავი VIII

ნორმალური განაწილება

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ნორმალური** და აღინიშნება სიმბოლოთი $N(a,\sigma^2)$, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს (შესაბამისად, განაწილების ფუნქციას) აქვს სახე:

$$f_{N(a,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ (შესაბამისად, } F_{N(a,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \text{).}$$

$$EN(\alpha,\sigma^2) = MoN(\alpha,\sigma^2) = MeN(\alpha,\sigma^2) = a \text{ და } DN(\alpha,\sigma^2) = \sigma^2 .$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ($N(0,1)$) სიმკვრივე (შესაბამისად, განაწილების ფუნქცია) აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\varphi(x) := f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (შესაბამისად, } \Phi(x) := F_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ ;}$$

გარდა ამისა, იხმარება აღნიშვნა: $\Phi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$).

ცხადია, რომ: $\varphi(-x) = \varphi(x)$; $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x)$, $x > 0$; $\frac{N(a,\sigma^2) - a}{\sigma} = N(0,1)$; $P\{N(0,1) \in \langle c,d \rangle\} = \Phi(d) - \Phi(c)$;

$$P\{N(a,\sigma^2) \in \langle c,d \rangle\} = \Phi(\frac{d-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{c-a}{\sigma}) ; \quad x_p^{a,\sigma^2} = \sigma \cdot x_p^{0.1} + a ;$$

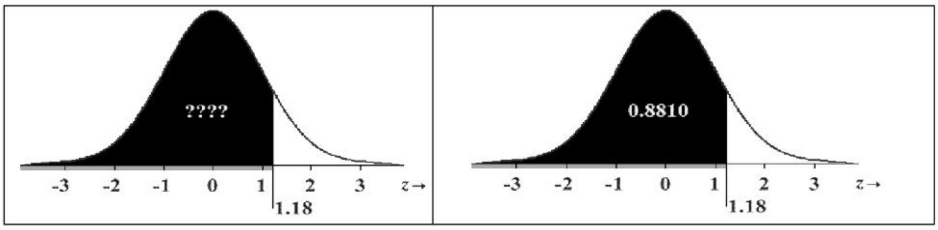
$x_p^{0.1} = \frac{x_p^{a,\sigma^2} - a}{\sigma}$, სადაც x_p^{a,σ^2} **არის** $N(a,\sigma^2)$**-ის** p **-კვანტილი;**

Z მნიშვნელობა: $Z = (N(a,\sigma^2) - a) / \sigma$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია 1.18-ზე, $P(N(0,1) < 1.18)$?

ამოხსნა. დავხაზოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილე-ბის სიმკვრივის წირი და აბსცისთა ღერძზე ავღნიშნოთ 1.18-ის შესაბამისი წერტილი (ამ შემთხვევაში $z = 1.18$).



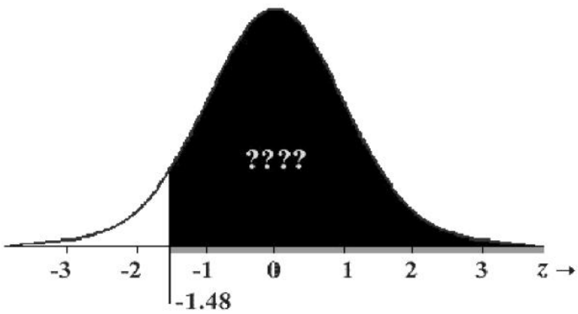
ნორმალური განაწილების ცხრილის პირველ სვეტში მოვ-ძებნოთ რიცხვი 1.1, ხოლო პირველ სტრიქონში კი – რიცხვი .08.

1.1-ის შესაბამისი სტრიქონისა და .08-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე ვპოულობთ რიცხვს – 0.8810. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$P(N(0,1) < 1.18) = 0.8810$ ანუ 88.10%.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტუ-ლი ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მეტია -1.48-ზე, $P(N(0,1) > -1.48)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z = -1.48$ და გამოსათვლელია ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ -1.48-ის მარჯვნივ მო-თავსებული არის ფართობი.

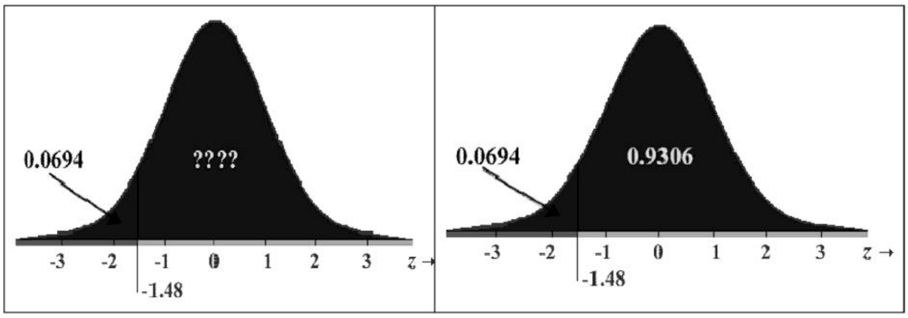


თუ ვისარგებლებთ ნორმალური განაწილების სიმეტრიუ-ლობითა და $\Phi(z)$ ფუნქციის ცხრილებით, მივიღებთ:

$$P(N(0,1) > -1.48) = P(N(0,1) < 1.48) = \Phi(1.48) = 0.9306\,.$$

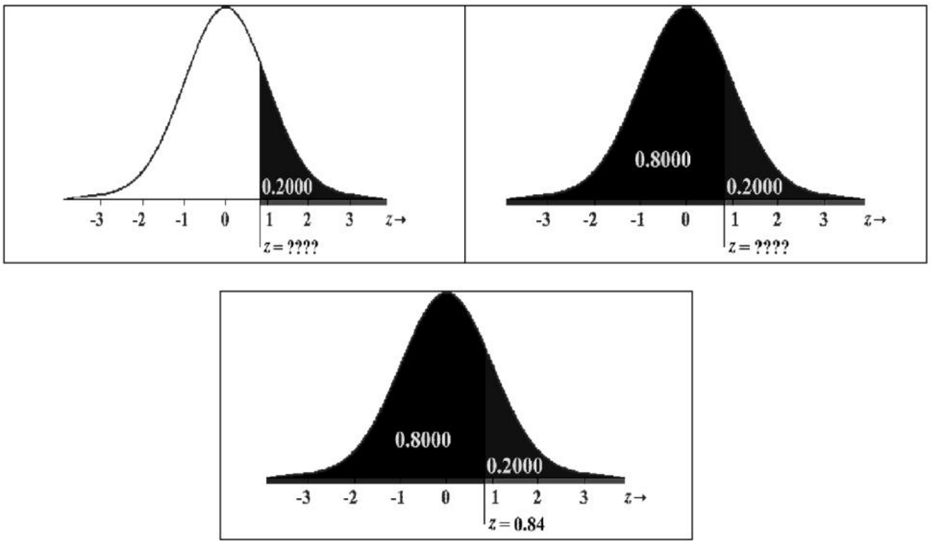
შენიშვნა. შეგვიძლია ვისარგებლოთ საწინააღმდეგო ხდო-მილების ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით და მაშინ მა-გალითი დაიყვნება წინა მაგალითზე:

$$P(N(0,1) > -1.48) = 1 - P(N(0,1) \le -1.48) = 1 - P(N(0,1) < -1.48) =$$
$$= 1 - 0.0694 = 0.9306.$$



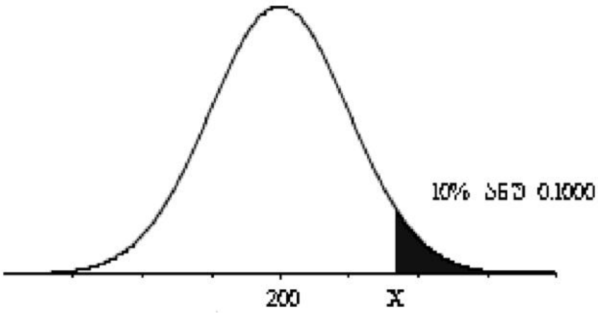
მაგალითი 5. ვიპოვოთ z-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის მარჯვნივ სტანდარტული ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 0.2000-ის?

ამოხსნა. ცხადია, რომ ეს ამოცანა ტოლფასია z-ის ისეთი მნიშვნელობის მოძებნის, რომლის მარცხნივ ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 1-0.2000=0.8000-ის. ნორმალური განაწილების ცხრილში ვპოულობთ 0.8000-სთან ყველაზე ახლოს მდგომ რიცხვს – 0.7995-ს. ეს რიცხვი დგას 0.8-ის შესაბამისი სტრიქონისა და 0.4-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე. ამიტომ გასაგებია, რომ z-ის საძიებელი მნიშვნელობაა $z = 0.84$.



მაგალითი 7. ცნობილია, რომ აბიტურიენტების მხოლოდ 10% შეიძლება გახდეს სტუდენტი. ჩავთვალოთ, რომ აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 200 და სტანდარტული გადახრით 20. ვიპოვოთ ის მინიმალური ქულა, რომელიც საჭიროა რათა აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი.

ამოხსნა. ვინაიდან აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული, ამიტომ იმ ქულის მნიშვნელობა (X), რომლის ზევითაც აბიტურიენტი გახდება სტუდენტი, არის ისეთი რიცხვი, რომლის მარჯვნივ ნორმალური წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 10%-ის ანუ 0.1000-ის:



ნაბიჯი 1. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 200-სა და X-ს შორის მდებარე არის ფართობი 0.5000-ს გამოვაკლოთ 0.1000, მივიღებთ 0.4000-ს.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.4000-ს. იმ შემთხვევაში, როცა ცხრილში არ იძებნება ზუსტად ეს მნიშვნელობა ვიღებთ მასთან ყველაზე ახლოს მყოფს, ამ შემთხვევაში 0.3997-ს. შესაბამისი $z = 1.28$.

ნაბიჯი 3. შევიტანოთ 1.28 z მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულაში $z = (X - \mu)/\sigma$ და ამოვხსნათ X.

$$1.28 = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$1.28 \times 20 + 200 = X$$

$$X = 25.60 + 200 = 225.60$$

$$X = 226.$$

ე.ი. იმისათვის, რომ აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი, მან უნდა მოაგროვოს 226 ქულა.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, როცა ფართობის მნიშვნელობა ვარდება ცხრილის ორი მნიშვნელობის ზუსტად შუაში, მაშინ ვიღებთ მათი შესაბამისი $\mathbf{z}$ მნიშვნელობებიდან უფრო დიდს. მაგალითად, თუ ფართობის მნიშვნელობაა 0.4500, ის იმყოფება 0.4495-ისა და 0.4505-ის შუაში და $\mathbf{z}$ მნიშვნელობად ვიღებთ 1.65-ს და არა 1.64-ს.

საწყისი მნიშვნელობის გამოთვლა z მნიშვნელობის მიხედვით:

$$X = z \cdot \sigma + \mu .$$

მაგალითი 9. მოცემულია $\xi \cong N(23,\sigma^2)$ და $P\{\xi < 27\} = 0.83$. იპოვეთ σ.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $Z = \frac{\xi - 23}{\sigma} \cong N(0,1)$. გარდა ამისა, ხდომილებები $\{\xi < 27\}$ და $\{\frac{\xi - 23}{\sigma} < \frac{27-23}{\sigma}\}$ ეკვივალენტურია. ამიტომ

$$P\{\xi < 27\} = P\{\frac{\xi - 23}{\sigma} < \frac{27-23}{\sigma}\} = P\{Z < \frac{4}{\sigma}\} = 0.83,$$

ანუ $\Phi(\frac{4}{\sigma}) = 0.83$. საიდანაც, მაგალითი 5-ის ანალოგიურად:

$\frac{4}{\sigma} = 0.9542$ და, შესაბამისად, $\sigma = \frac{4}{0.9542} = 4.19$.

მაგალითი 11. ბიოლოგი აგროვებს მონაცემებს კონკრეტული სახეობის კაქტუსის სიმაღლის შესახებ. მისი დაკვირვებით კაქტუსების 34.25%-ის სიგრძე 12 სმ-ზე ნაკლებია, ხოლო 18.4%-ის სიგრძე 16 სმ-ზე მეტია. ბიოლოგმა დაუშვა, რომ სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად. ვიპოვოთ ამ განაწილების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა. კაქტუსის სიმაღლე ავღნიშნოთ H-ით, $H \approx N(a,\sigma^2)$. მოსაძებნია a და σ. ბიოლოგის დაკვირვების თანახმად: $P\{H < 12\} = 0.342$ და $P\{H > 16\} = 0.184$. შესაბამისად,

$$\Phi(\frac{12-a}{\sigma}) = 0.342 \text{ და } \Phi(\frac{16-a}{\sigma}) = 1 - 0.184 = 0.816.$$

ამიტომ $\frac{12-a}{\sigma} = -0.407$ და $\frac{16-a}{\sigma} = 0.900$. საიდანაც ვასკვნით, რომ: $a = 13.2$ და $\sigma = 3.06$.

ამოცანები

1. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილის გამოყენებით იპოვეთ ალბათობები:
   ა) $P\{Z < 1.23\}$; ბ) $P\{Z \le 2.47\}$; გ) $P\{Z < 0.16\}$; დ) $P\{Z \ge 1.24\}$;

ე) $P\{Z > 2.38\}$; ვ) $P\{Z \ge 0.59\}$; ზ) $P\{Z > -1.83\}$; თ) $P\{Z \le -2.06\}$;
ი) $P\{Z > -0.07\}$; კ) $P\{Z \le -1.83\}$; ლ) $P\{Z < -2.76\}$; მ) $P\{Z \le -0.21\}$.

3. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ:
ა) $P\{Z < s\} = 0.67$; ბ) $P\{Z < t\} = 0.88$; გ) $P\{Z < u\} = 0.98$;
დ) $P\{Z < v\} = 0.85$; ე) $P\{Z > s\} = 0.41$; ვ) $P\{Z > t\} = 0.12$;
ზ) $P\{Z > u\} = 0.01$; თ) $P\{Z > v\} = 0.22$; ი) $P\{Z > s\} = 0.99$;
კ) $P\{Z > t\} = 0.97$; ლ) $P\{Z > u\} = 0.85$; მ) $P\{Z > v\} = 0.5$.

5. მოცემულია $\xi \cong N(24,9)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები:
ა) $P\{\xi \le 29\}$; ბ) $P\{\xi > 31\}$; გ) $P\{\xi \ge 22\}$; დ) $P\{\xi < 16\}$.

7. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 3 და დისპერსიით 4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობას.

9. მოცემულია $\xi \cong N(44,25)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ:
ა) $P\{\xi \le s\} = 0.98$; ბ) $P\{\xi \ge t\} = 0.77$;
გ) $P\{\xi \ge u\} = 0.05$; დ) $P\{\xi \le v\} = 0.33$.

11. მოცემულია $\xi \cong N(35.4,12.5)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ:
ა) $P\{\xi < s\} = 0.96$; ბ) $P\{\xi > t\} = 0.94$;
გ) $P\{\xi > u\} = 0.29$; დ) $P\{\xi < v\} = 0.15$.

13. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად დისპერსიით 18 და $P\{\xi > 73\} = 0.03$. იპოვეთ საშუალო.

15. მოცემულია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $P\{\xi \ge 9.81\} = 0.16$ და $P\{\xi \le 8.82\} = 0.01$. იპოვეთ a და σ.

17. ჯგუფში 16 წლის გოგონების სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 161.2 სმ და სტანდარტული გადახრით 4.7 სმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ჯგუფიდან ერთი გოგონას სიმაღლე: ა) 165 სმ-ზე მეტია; ბ) 150 სმ-ზე ნაკლებია; გ) მოთავსებულია 165 სმ-სა და 170 სმ-ს შორის; დ) მოთავსებულია 150 სმ-სა და 163 სმ-ს შორის. 16 წლის 500 შერჩეული გოგონასათვის შეაფასეთ რაოდენობა იმ გოგონების, რომელთა სიმაღლე გავა ზემოთ მოყვანილი 4 დიაპაზონიდან.

19. ავტომობილის გაცვეთილი სამუხრუჭე ხუნდის შეცვლის დრო განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 90 წუთი და სტანდარტული გადახრით 5.8 წუთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხუნდის შეცვლას დასჭირდება: ა) 105 წუთზე მეტი; ბ) 85 წუთზე ნაკლები. დაადგინეთ საშუალოს მიმართ სი-

მეტრიული (a,b) ინტერვალი, რომელშიც მოხვდება ხუნდის შეცვლის დრო 90%-იანი საიმედოობით.

21. ყვავილის ფოთოლის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 18.2 სმ და სტანდარტული გადახრით 2.3 სმ: ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყვავილის ფოთლის სიგრძე მოთავსებულია 16 სმ-სა და 20 სმ-ს შორის; ბ) ყვავილის ფოთლების 12% h სმ-ზე გრძელია, ხოლო 20% l სმ-ზე მოკლეა. იპოვეთ h და l; გ) შეაფასეთ ყვავილის 500 ფოთლიდან რამდენი იქნება 14 სმ-ზე მოკლე.

23. ფუთას, რომელშიც იყიდება შაქარი, აქვს წარწერა – 1 კგ. შაქარი. ფაქტობრივად, ფუთაში მოთავსებული შაქრის წონა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 1.08 კგ. ფუთების შემოწმებამ აჩვენა, რომ ფუთების 2.5% ნაკლულია (შეიცავს მითითებულ 1 კგ-ზე ნაკლებ შაქარს). ა) იპოვეთ ამ განაწილების სტანდარტული გადახრა; ბ) თუ მოცემული ფუთა ნაკლულია, მაშინ გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მისი წონა საშუალოზე 3 სტანდარტული გადახრით ნაკლებია.

25. ალბათობის გამოცდაზე სტუდენტების 15% ღებულობს 63 ქულაზე მეტს, ხოლო 10% – 32 ქულაზე ნაკლებს. ვიგულისხმოთ, რომ ქულები განაწილებულია ნორმალურად და ვიპოვოთ ქულების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

ამოცანები გამეორებისათვის

27. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}k(4-x), \text{ თუ } 0\le x\le 4,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

გამოთვალეთ: ა) k; ბ) $P\{\xi>2.5\}$; გ) $E\xi$.

29. უწყვეტი U შემთხვევითი სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული [0.5, 2.5] სეგმენტზე. იპოვეთ ამ შემთხვევითი სიდიდის: ა) განაწილების სიმკვრივე; ბ) მათემატიკური ლოდინი; გ) დისპერსია.

31. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}kx^3, \text{ თუ } 0\le x\le 2,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) k; ბ) $E\xi$; გ) $D\xi$; დ) განაწილების მედიანა; ე) ალბათობა იმისა, რომ დაკვირვება მოთავსებული იქნება სა-

შუალოდან ერთი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში; ვ) ალბათობა იმისა, რომ 4 დაკვირვებიდან 2 იქნება საშუალოზე მეტი და 2 – საშუალოზე ნაკლები.

33. ცნობილია, რომ $\xi \cong N(10,8)$. იპოვეთ $P\{\xi > 6\}$.

35. გარკვეული მოდელის ავტომობილი 56 მილი/სთ სიჩქარით მოძრაობისას ერთი გალონი ბენზინით გადის მანძილს, რომლის საშუალო მნიშვნელობაა 32.4 მილი და სტანდარტული გადახრა 1.4 მილი. ჩავთვალეთ, რომ საქმე გვაქვს ნორმალურ განაწილებასთან და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ავტომობილი 56 მილი/სთ სიჩქარით მოძრაობისას ერთი გალონი ბენზინით გაივლის 30 მილზე მეტს.

37. ფართობი, რომლის შეღებვაც შეიძლება 1 ლიტრი ბუნებრივი საღებავით განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 13.2 კვ. მეტრი და სტანდარტული გადახრით 0.197 კვ. მეტრი. ფართობი, რომლის შეღებვაც შეიძლება 1 ლიტრი ხელოვნური საღებავით განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 13.4 კვ. მეტრი და სტანდარტული გადახრით 0.343 კვ. მეტრი. შესაღებია 12.9 კვ. მეტრი ფართობი. განსაზღვრეთ, რომელი საღებავის 1 ლიტრი იქნება საკმარისი უფრო მეტი ალბათობით ამ ფართობის შესაღებად.

39. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით a. ცნობილია, რომ $P\{\xi < 3\} = 0.2$. იპოვეთ a.

41. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით σ^2. მოცემულია, რომ $P\{\xi > 81.89\} = 0.01$ და $P\{\xi < 27.77\} = 0.1$. იპოვეთ a და σ^2.

43. დანადგარი ჭრის გრძელ მილებს პატარ-პატარა მილებად. პატარა მილის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a სმ და სტანდარტული გადახრით 0.25 სმ. a-ს მნიშვნელობის შეცვლა შესაძლებელია დანადგარის რეგულირების ხარჯზე. ა) იპოვეთ a, რომლისთვისაც ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული პატარა მილის სიგრძე ნაკლებია 6.5 სმ-ზე არის 0.1; ბ) დანადგარი დარეგულირდა ისე, რომ $a = 6.4$, ხოლო სტანდარტული გადახრა არ შეცვლილა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული პატარა მილის სიგრძე მოთავსებულია 6.3 სმ-სა და 6.6 სმ-ს შორის.

45. გარკვეული სახეობის ჩიტის წონა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 0.8 კგ და სტანდარტული გადახრით 0.12 კგ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ამ სახეობის ჩიტის წონა მოთავსებული იქნება 0.74 კგ-სა და 0.95 კგ-ს შორის.

47. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} kx^2, \text{ თუ } 0 \le x \le 2, \\ 0, \quad \text{სხვაგან}. \end{cases}$$

ა) აჩვენეთ, რომ $k = 3/8$; ბ) გამოთვალეთ $E\xi$; გ) იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა.

49. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(4-x^2), \text{ თუ } 0 \le x \le 2, \\ 0, \quad \text{სხვაგან}. \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა.

51. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ თუ } x \le 0, \\ \sin x, \text{ თუ } 0 \le x \le \pi/2, \\ 1, \text{ თუ } x \ge \pi/2. \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა) განაწილების სიმკვრივე: ბ) მედიანა.

53. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით σ^2. ცნობილია, რომ $P\{\xi > 6.2\} = 0.9474$ და $P\{\xi < 9.8\} = 0.6368$. იპოვეთ a და σ^2.

55. ბირთვის სროლის შეჯიბრებაში მონაწილეობს ორი ათლეტი, ივანე და ერეკლე. თითოეული ათლეტისათვის ბირთვის სროლის მანძილი განაწილებულია ნორმალურად. ივანესათვის გასულ წელს ბირვთის სროლის მანძილის საშუალო იყო 60.33 მ, ხოლო სტანდარტული გადახრა 1.95 მ. ა) გასულ წელს ივანესათვის ბირვთის სროლის მანძილის 80% მეტი იყო ვიდრე x მეტრი, იპოვეთ x;

ბ) გასულ წელს ერეკლესათვის ბირვთის სროლის მანძილის 80% მეტი იყო ვიდრე 59.5 მეტრი. ცნობილია, რომ გასულ

წელს ერეკლესათვის ბირვთის სროლის მანძილის საშუალო იყო 59.39 მ. იპოვეთ მისი სტანდარტული გადახრა; მიმდინარე წელს ერეკლესათვის ბირვთის სროლის მანძილის საშუალოა 59.5 მ, ხოლო სტანდარტული გადახრა 3 მ. ივანესათვის შესაბამისი პარამეტრებია 60.33 მ და 1.95 მ. შეჯიბრების დროს, შემდეგ ტურში გასასვლელად, ათლეტმა ბირთვი უნდა ისროლოს სულ ცოტა 65 მეტრზე. პირველ ტურში თითოეული ათლეტი ბირთვს ისვრის 3-ჯერ; გ) განსაზღვრეთ რომელი ათლეტის გასვლაა უფრო მოსალოდნელი შემდეგ ტურში პირველი სროლის შედეგის მიხედვით; დ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ათლეტი გავა შემდეგ ტურში.

57. საწარმო ყიდულობს ჭანჭიკების 44%-ს A ფირმიდან, ხოლო დანარჩენს B ფირმიდან. თითოეული ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების დიამეტრი განაწილებულია ნორმალურად სტანდარტული გადახრით 0.16 მმ. A ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების დიამეტრის საშუალოა 1.56 მმ. B ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების 24.2%-ის დიამეტრი ნაკლებია 1.52 მმ-ზე. ა) იპოვეთ B ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების დიამეტრის საშუალო; ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საწარმოს საწყობიდან შემთხვევით შერჩეული ჭანჭიკის დიამეტრი ნაკლები იქნება 1.52 მმ-ზე; გ) შემთხვევით შერჩეული ჭანჭიკის დიამეტრი ნაკლებია 1.52 მმ-ზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ჭანჭიკი დამზადებულია B ფირმაში; დ) B ფირმა დღეში ამზადებს 8000 ჭანჭიკს. თითეული ჭანჭიკი იძლევა 1.5 ლარიან მოგებას, თუ მისი დიამეტრი მოთავსებულია 1.52 მმ-სა და 1.83 მმ-ს შორის. ჭანჭიკი, რომლის დიამეტრი ნაკლებია 1.52 მმ-ზე უნდა გადააგდონ და იძლევა 0.85 ლარიან დანაკარგს. დაბოლოს, ჭანჭიკი, რომლის დიამეტრი მეტია 1.83 მმ-ზე იყიდება, მაგრამ მოგებას ამცირებს 0.5 ლარამდე. გამოთვალეთ B ფირმის მოსალოდნელი მოგება.

59. მშენებლობაზე მუშაობს 10 კაციანი ჯგუფი, რომელთა შორის 3 ელექტრიკოსია და 2 სანტექნიკოსი. არქიტექტორმა დაიბარა სათათბიროდ 5 მუშა და მოვიდა შემთხვევით შერჩეული 5 მათგანი. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ხუთში მოხვდება 2 ელექტრიკოსი და 1 სანტექნიკოსი; ბ) მშენებლობაზე კვირაში მუშაობის საათების რაოდენობა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 42 სთ. ჯგუფის 10% მუშაობს კვირაში 48 ან მეტ საათს. იპოვეთ ალბათობა იმისა,

რომ ორივე სანტექნიკოსი კონკრეტულ კვირაში იმაუშავებს 40 საათზე მეტს.

61. **1.** დაწერეთ ნორმალური განაწილების სიმკვრივე, რომლის რიცხვითი მახასიათებლები ემთხვევა $U([-2,3])$-ის შესაბამის რიცხვით მახასიათებლებს. **2.** იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 1 პუნქტში აღნიშნული $N(a,\sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდის 5 დაკვირვებული მნიშვნელობიდან 2 მოთავსებული იქნება შუალედში $(a-0.5\sigma, a+\sigma]$.

თავი IX

ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები

ჩებიშევის უტოლობა

ჩებიშევის უტოლობა აფასებს შემთხვევითი სიდიდის გადახრას თავისი მათემატიკური ლოდინიდან. თუ ξ რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - D\xi / \varepsilon^2 .$$

დიდ რიცხვთა კანონი.

ჩებიშევის თეორემა. ვთქვათ, შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1, \xi_2, \ldots$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია ($E\xi_i < \infty$) და არსებობს ისეთი რიცხვი C, რომ $D\xi_i \leq C$, $i = 1, 2, \ldots$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის სრულდება თანაფარდობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_n}{n}| < \varepsilon\} = 1 .$$

ამ მტკიცებულებას **დიდ რიცხვთა კანონს** უწოდებენ.

ბერნულის თეორემა. დავუშვათ, m არის n დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი, ხოლო p არის A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ექსპერიმენტში. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$P\{|\frac{m}{n} - p| \geq \varepsilon\} \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \; (\to 0 \text{, როცა } n \to \infty).$$

ერთთან რაგინდ ახლოს მყოფი ალბათობით შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ დამოუკიდებელ ცდათა საკმაოდ დიდი რიცხვისათვის დაკვირვებადი ხდომილების მოხდენათა სიხშირე რაგინდ უმნიშვნელოდ განსხვავდება მისი მოხდენის ალბათობისაგან ცალკეულ ცდაში.

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა.

დიდ რიცხვთა კანონი არ იკვლევს შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონის სახეს. ეს საკითხი შეისწავლება თეორემების ჯგუფში, რომლებსაც **ცენტრალური ზღვარითი**

თეორემა ეწოდება. ეს თეორემა ამტკიცებს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონი, რომელთაგან ცალკეულ შესაკრებს შეიძლება ჰქონდეს განსხვავებული განაწილება, უახლოვდება ნორმალურს შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რიცხვის შემთხვევაში. ამით აიხსნება ნორმალური განაწილების კანონის უაღრესად დიდი მნიშვნელობა პრაქტიკულ გამოყენებებში.

თეორემა 1. თუ $\xi_1, \xi_2, ...$ – დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა, ერთი და იმავე განაწილების კანონით, მათემატიკური ლოდინით a და დისპერსიით σ^2, მაშინ n –ის უსასრულოდ ზრდისას სტანდარტიზებლი $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ ჯამის განაწილების კანონი უახლოვდება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილების კანონს:

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x\} = \Phi(x) .$$

თეორემა 2 *(ლიაპუნოვის თეორემა).* თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ძალიან დიდი რიცხვის ჯამს, რომელთათვისაც შესრულებულია პირობა:

$$\lim_{n \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} b_k) / [\left(\sum_{k=1}^{n} D_k \right)^{3/2}] = 0 ,$$

სადაც b_k – მესამე რიგის აბსოლუტური ცენტრალური მომენტია ξ_k შემთხვევითი სიდიდის , ხოლო D_k – მისი დისპერსია, მაშინ ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია განაწილება, რომელიც ახლოსაა ნორმალურ განაწილებასთან.

თუ შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს ურთიერთდამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ძალიან დიდი რაოდენობის ჯამს, რომელთაგან თითოეულის გავლენა ჯამზე მიზერულად მცირეა, მაშინ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია განაწილება, რომელიც ახლოსაა ნორმალურთან.

თეორემა 3 *(მუავრ-ლაპლასის თეორემა).* თუ ტარდება n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილება ხდება ალბათობით p, $np > 15$, მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$p\left(\alpha < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < \beta \right) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

სადაც $S_n - A$ ხდომილების მოხდენათა რიცხვია n ცდაში, $q = 1 - p$, ხოლო

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

შედეგი *(მუავრ-ლაპლასის ლოკალური თეორემა).* მუავრ-ლაპლასის თეორემის პირობებში $p_n(k)$ – ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება n ცდაში მოხდება ზუსტად k –ჯერ, ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში, თუ $np > 15$, შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

სადაც $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, ხოლო $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

მაგალითი 1. დადგენილია, რომ იმ ადამიანების 94%-ს, რომელთაც გაკეთებული აქვთ ტუბერკულიოზის საწინააღმდეგო აცრები, გამოუმუშავდება შესაბამისი იმუნიტეტი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 100000 ტუბერკულიოზზე აცრილი ადამიანიდან 5800 არაა დაცული ამ დაავადებისაგან?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნა მართალია თეორიულად შესაძლებელია ბერნულის ფორმულით, სადაც $n = 100000$, $k = 5800$, $p = 0.06$, $q = 0.94$ და, შესაბამისად,

$$P_{100000}(5800) = C_{100000}^{5800}(0.06)^{5800} \cdot (0.94)^{94200},$$

მაგრამ პრაქტიკულად ამის გაკეთება ძალიან ძნელია. ამ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ლოკალური ფორმულით, რომელიც გვაძლევს:

$$P_{100000}(5800) \approx \varphi\left(\frac{5800 - 100000 \cdot 0.06}{\sqrt{100000 \cdot 0.06 \cdot 0.94}}\right) / \sqrt{100000 \cdot 0.06 \cdot 0.94} \approx \varphi(-2.7)/75 .$$

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ $\varphi(-x) = \varphi(x)$ და ვისარგებლებთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის ცხრილებით (რომლიდანაც $\varphi(2.7) = 0.0104$), ადვილად გამოვითვლით, რომ

$$P_{100000}(5800) \approx 0.000139 .$$

მაგალითი 3. მაგალითი 2-ის პირობებში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა 45-ჯერ.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{45-50}{5} = -1$, ამიტომ

$$p_{100}(45) \approx \frac{1}{5}\cdot\varphi(-1) = \frac{1}{5}\cdot\varphi(1) = \frac{1}{5}\cdot 0.2420 = 0.0484.$$

შემოვიღოთ განაწილების ფუნქციებისათვის შემდეგი აღნიშვნები:

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ფუნქცია –

$$H(x;t,s,n) = \sum_{k\le x}\frac{C_t^k\cdot C_{n-t}^{s-k}}{C_n^s};$$

ბინომური განაწილების ფუნქცია –

$$Bi(x;p,n) = \sum_{k\le x} C_n^k p^k q^{n-k} \;;$$

პუასონის განაწილების ფუნქცია –

$$\Pi(x;\lambda) = \sum_{0\le k\le x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\;;$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია –

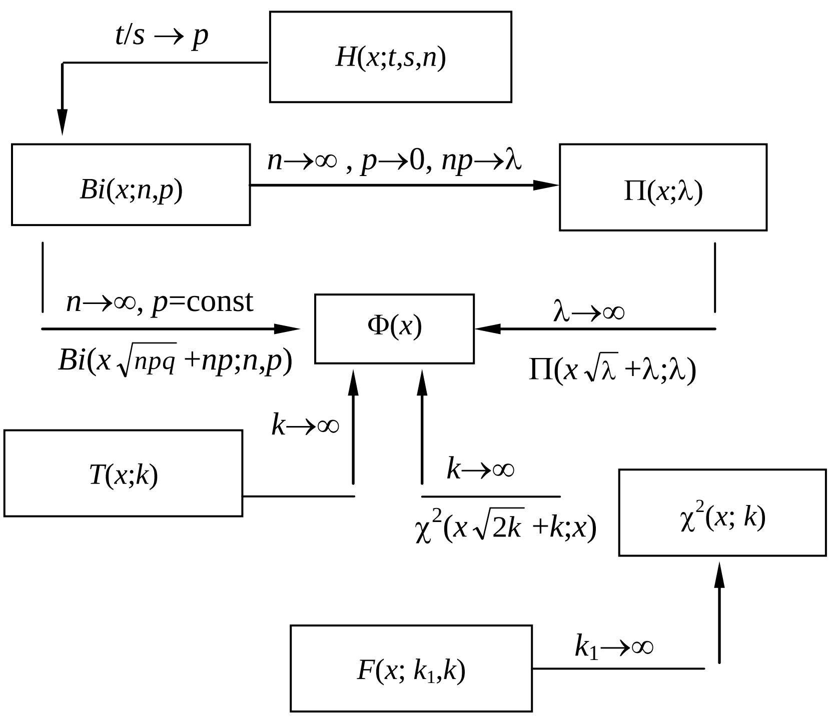
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\;;$$

ხი კვადრატ განაწილების ფუნქცია – $\chi^2(x;k)$;

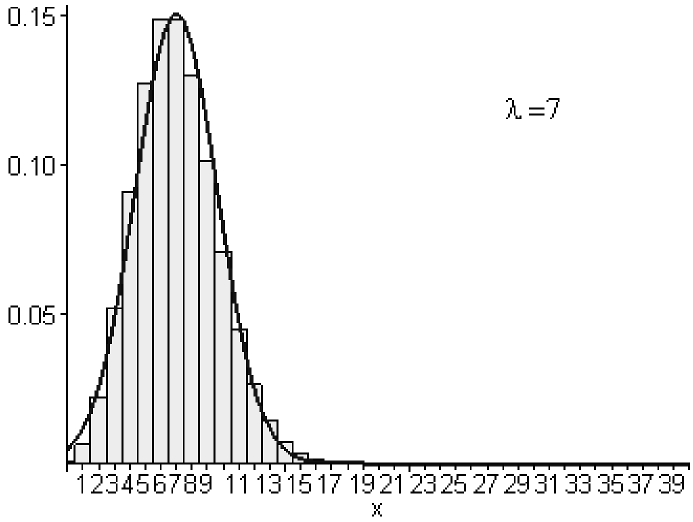
სტიუდენტის განაწილების ფუნქცია – $T(x;k)$;

ფიშერის განაწილების ფუნქცია – $F(x;k_1,k_2)$.

აღსანიშნავია, რომ ზემოთ მოყვანილი განაწილებების ფუნქციებს შორის ადგილი აქვს ქვემოთ მოყვანილ სქემაზე გამოსახულ ზღვრულ თანაფარდობებს:



ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე შედარებულია ნორმალური და პუასონის განაწილებები $\lambda = 7$-ის შემთხვევაში:



მაგალითი 5. როგორია ალბათობა იმისა, რომ წესიერი მონეტის 200-ჯერ აგდებისას გერბი მოვა არანაკლებ 95-ჯერ და არა უმეტეს 105-ჯერ?

ამოხსნა. უნდა ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ფორმულით, სადაც $n = 200,\ a = 95,\ b = 105,\ p = q = 1/2$. გვაქვს:

$$P(95 \le S_{200} \le 105) \approx \Phi(\frac{105 - 200 \cdot 0.5}{\sqrt{200 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}) - \Phi(\frac{95 - 200 \cdot 0.5}{\sqrt{200 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}) \approx$$
$$\approx \Phi(0.707) - \Phi(-0.707) = 2\Phi(0.707) - 1 \approx 2 \cdot 0.76 - 1 = 0.52$$

მაგალითი 7. მოწყობილება შედგება 10 დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტისაგან, რომელთაგან თითოეულის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა T დროში არის 0.05. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ T დროში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობისა და ელემენტების მწყობრიდან გამოსვლათა საშუალო რიცხვს შორის განსხვავების მოდული აღმოჩნდება: ა) 2-ზე ნაკლები; ბ) 2-ზე არანაკლები.

ამოხსნა. ა) აღვნიშნოთ S_n სიმბოლოთი T დროში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ბინომიალური განაწილება და ამიტომ:

$$ES_n = np = 10 \cdot 0.05 = 0.5 \text{ და } DS_n = npq = 10 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 0.475\,.$$

ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით. გვაქვს:

$$P(|S_n - ES_n| < \varepsilon) \geq 1 - DS_n / \varepsilon^2,$$

$$P(|S_n - 0.5| < 2) \geq 1 - 0.475/4 = 0.88.$$

ბ) რამდენადაც $|S_n - 0.5| < 2$ და $|S_n - 0.5| \geq 2$ საწინააღმდეგო ხდომილებებია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$P(|S_n - 0.5| \geq 2) \leq 1 - 0.88 = 0.12.$$

მაგალითი 9. როგორ დავადგინოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შეჩეული ადამიანი აგროვებს მარკებს? შეიძლება გამოვკითხოთ გარკვეული რაოდენობა შემთხვევით შერჩეული ადამიანების. თუ n გამოკითხულში S_n ფილატელისტია, მაშინ საძიებელი ალბათობა $p \approx S_n / n$. რამდენი ადამიანი უნდა გამოიკითხოს, რომ ცდომილება არ აღემატებოდეს 0.005-ს, თუ ჩვენ გვინდა, რომ სწორი შედეგი მივიღოთ ალბათობით 0.95?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $P(|S_n / n - p| \leq 0.005) = 0.95$. ამიტომ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური ფორმულა გვაძლევს:

$$0.95 = P(|S_n / n - p| \leq 0.005) = P(-0.005 \leq (S_n - np)/n \leq 0.005) =$$
$$= P(-0.005\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq (S_n - np)/\sqrt{npq} \leq 0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}) \approx$$
$$\approx \Phi(0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}) - \Phi(-0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}).$$

ამიტომ, თუ ვისარგებლებთ თანაფარდობით $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, მივიღებთ, რომ

$$2\Phi(0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}) - 1 = 0.95, \text{ ანუ } \Phi(0.005\sqrt{\frac{n}{pq}}) = 0.975.$$

საიდანაც სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილის გამოყენებით ვლებულობთ, რომ

$$0.005\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 1.96.$$

თუკი ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $pq \leq 1/4$, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$n \geq 38416.$$

მაგალითი 11. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა დიდ რიცხვთა კანონს?

ამოხსნა. შევამოწმოთ ჩებიშევის თეორემის პირობები. გასაგებია, რომ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია. გამოვთვალოთ ξ_n-ის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. გვაქვს:

$$E\xi_n = -n\alpha(1/2n^2) + 0\cdot(1-1/n^2) + n\alpha(1/2n^2) = 0\ ;$$

$$E\xi_n{}^2 = n^2\alpha^2(1/2n^2) + 0\cdot(1-1/n^2) + n^2\alpha^2(1/2n^2) = n^2\alpha^2(1/n^2) = \alpha^2\ ;$$

$$D\xi_n = E\xi_n{}^2 - (E\xi_n)^2 = \alpha^2\ .$$

ამრიგად, მათემატიკური ლოდინები სასრულია და დისპერსიები თანაბრად შემოსაზღრული. ამიტომ ჩებიშევის თეორემის თანახმად აღნიშნული მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს.

ამოცანები

1. ვიგულისხმოთ, რომ ქალაქში კაცებისა და ქალების რაოდენობა ერთი და იგივეა. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ 100 შემთხვევითი გამვლელიდან 32 ქალი იქნება?
3. ცნობილია, რომ მკურნალობის ახალი მეთოდით ავადმყოფის გამოჯანმრთელების ალბათობაა 0.8. რამდენ გამოჯანმრთელებულს უნდა ველოდოთ 100 პაციენტიდან ალბათობით 0.0998?
5. როგორია ალბათობა იმისა, რომ წესიერი მონეტის 10-ჯერ აგდებისას არც ერთხელ მოვა გერბი?
7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წესიერი მონეტის 40-ჯერ აგდებისას 25-ჯერ მოვა გერბი?
9. ბიჭის დაბადების ალბათობაა 0.515. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ 80 ახალშობილს შორის 42 იქნება ბიჭი?
11. ექსპერიმენტის ჩატარებისას A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 0.5. რამდენჯერ უნდა ველოდოთ A ხდომილების მოხდენას 100 ექსპერიმენტში ალბათობით 0.048?

13. როგორია ალბათობა იმისა, რომ წესიერი სათამაშო კამათლის 12000-ჯერ გაგორებისას ექვსიანი მოვა არანაკლებ 1900-ჯერ და არა უმეტეს 2100-ჯერ?
15. I სატელეფონო სადგური ემსახურება 2000 აბონენტს და აერთებს მათ II სადგურთან. I სადგურიდან II სადგურამდე 2000 სატელეფონო ხაზის გაყვანა არარაციონალურია. რამდენი სატელეფონო ხაზი უნდა გავიყვანოთ I სადგურიდან II სადგურამდე, რომ I სადგურის 100 აბონენტიდან მხოლოდ ერთს, რომელიც შემთხვევით ირჩევს ლაპარაკის დროს II სადგურის აბონენტთან, ყველა ხაზი დახვდეს დაკავებული? ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი დარეკვისას ხაზი დაკავებულია არის 1/30.
17. იპოვეთ ისეთი რიცხვი a, რომ ალბათობით 0.9 შეიძლებოდეს იმის მტკიცება, რომ 900 ახალშობილს შორის a-ზე მეტი ბიჭია, თუ ცნობილია, რომ ბიჭის დაბადების ალბათობაა 0.515.
19. 1000 ყუთიდან თითოეულში 5000 თეთრი და 5000 შავი ბურთია. თითოეული ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 3 ბურთს. როგორია ალბათობა იმისა, რომ რაოდენობა ყუთებისა, საიდანაც ამოღებულია 3 ერთნაირი ფერის ბურთი, არის არანაკლებ 200 და არაუმეტეს 310 ყუთი?
21. ბიჭის დაბადების ალბათობაა 0.515. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 1000 ახალშობილიდან ბიჭი იქნება არანაკლებ 480 და არა უმეტეს 540?
23. რამდენი მარცვალი უნდა დაითესოს ამოსვლის ალბათობით 0.99, რომ ალბათობით 0.95 ამოსვლის ფარდობითი სიხშირე (ამოსულების რაოდენობა გაყოფილი დათესილების რაოდენობაზე) განსხვავდებოდეს 0.99-საგან 0.01-ზე ნაკლებით?
25. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინიდან არანაკლებ ვიდრე: ა) გაორმაგებული სტანდარტული გადახრა; ბ) გასამმაგებული სტანდარტული გადახრა.
27. მოცემულია დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

ξ	**0.1**	**0.4**	**0.6**
P	**0.2**	**0.3**	**0.5**

შეაფასეთ $|\xi - E\xi| < \sqrt{0.4}$ ხდომილების ალბათობა.
29. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	$n+1$	$-n$
P	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა ჩებიშევის თეორემის პირობებს?

31. ცნობილია, რომ წონების შემთხვევითი ცდომილების საშუალო მნიშვნელობაა 0.03, ხოლო დისპერსია – 0.0016. ა) როგორია ალბათობა იმისა, რომ მორიგი აწონვის დროს სასწორის ჩვენების ცდომილების აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება 0.04-ს? ბ) იპოვეთ 95%-იანი საიმედოობის ინტერვალი წონების ცდომილებისათვის.

33. გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ მოსწავლეთა 20%-მა არ იცის საგზაო მოძრაობის წესები. შემთხვევით შეარჩიეს 1600 მოსწავლე. რამდენმა მოსწავლემ იცის საგზაო მოძრაობის წესები 95%-იანი გარაანტიით.

მითითება: ისარგებლეთ თანაფარდობით – $P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx$

$\approx 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq/n}}\right)-1=0.95$, გაიგეთ ε და მერე შეაფასეთ S_n.

35. თუ ბურთულა არ გადის ნახვრეტში, რომლის დიამეტრია d_1, მაგრამ გადის ნახვრეტში, რომლის დიამეტრია d_2 $(d_2>d_1)$, მაშინ მისი ზომა ითვლება მისაღებად. წინააღმდეგ შემთხვევაში ბურთულა უვარგისია. ცნობილია, რომ ბურთულის დიამეტრი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს საშუალოთი $(d_1+d_2)/2$ და $\frac{(d_2-d_1)^2}{16}$ დისპერსიით. იპიოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა იქნება უვარგისი.

37. ვაჩვენოთ, რომ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ აკმაყოფილებს ცენტრალური ზღვარით თეორემას, თუ: ა) $P\{\xi_n=\pm1\}=(1-2^{-n})/2^n$, $P\{\xi_n=\pm2^n\}=1/2^{n+1}$, $n=1,2,\dots$, ბ) $P\{\xi_n=\pm n^{\lambda}\}=1/2$.

თავი X

შემთხვევით სიდიდეთა მოდელირება. მონტე-კარლოს მეთოდი

მონტე-კარლოს მეთოდი გამოიყენება შემდეგი ამოცანის ამოსახსნელად: საჭიროა მოიძებნოს შესასწავლი შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობა a. მისი განსაზღვრისათვის ირჩევენ X შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მათემატიკური ლოდინი ტოლია a-სი და X შემთხვევითი სიდიდის n ცალი მნიშვნელობის შერჩევიდან, რომელიც მიიღება n ექსპერიმენტში გამოითვლება შერჩევითი საშუალო:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n},$$

რომელიც მიიღება საძიებელი a რიცხვის შეფასებად:

$$a \approx a^* = \bar{x}.$$

ეს მეთოდი მოითხოვს ექსპერიმენტების დიდი რიცხვის ჩატარებას, ამიტომ მას სხვანაირად **სტატისტიკური ექსპერიმენტების მეთოდი** ეწოდება. მონტე-კარლოს მეთოდის თეორია იკვლევს: როგორ უფრო მიზანშეწონილია აირჩეს X შემთხვევითი სიდიდე, როგორ უნდა ვიპოვოთ მისი შესაძლო მნიშვნელობები, როგორ შევამციროთ გამოყენებული შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსია, რათა ცდომილება a-ს a*-თი შეცვლისას იყოს რაც შეიძლება მცირე.

X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების მოძებნას უწოდებენ **შემთხვევითი სიდიდის გათამაშებას (მოდელირებას).** ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევითი სიდიდის მოდელირების ზოგიერთ მეთოდს და გავარკვევთ თუ როგორ შევაფასოთ ამ დროს დაშვებული შეცდომა.

თუ ჩვენ გვინდა განვსაზღვროთ დაშვებული შეცდომის ზედა საზღვარი მოცემული საიმედოობის γ ალბათობით, ანუ მოვძებნოთ δ რიცხვი, რომლისთვისაც $p(|\bar{X} - a| \le \delta) = \gamma$, ჩვენ ვღებულობთ გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინისათვის ნდობის ინტერვალის მოძებნის ცნობილ ამოცანას. ამიტომ ჩვენ ამ ამოცანაზე ცალკე არ შევჩერდებით.

განმარტება 1. [0, 1] ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული R შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო r მნიშვნელობებს **შემთხვევითი რიცხვები** ეწოდება.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება. დავუშვათ, რომ გასათამაშებელია დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი. X შემთხვევითი სიდიდის ცნობილი განაწილების კანონის მიხედვით მივიღოთ მისი შესაძლო მნიშვნელობების მიმდევრობა:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \ldots & p_n . \end{array}$$

განვიხილოთ [0, 1] ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული R შემთხვევითი სიდიდე და დავყოთ [0, 1] ინტერვალი p_1, $p_1 + p_2$, …, $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$ კოორდინატების მქონე წერტილებით n ქვეინტერვალად: $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, რომელთა სიგრძეები ტოლია შესაბამისი ინდექსის მქონე ალბათობების.

თეორემა 1. თუ ნებისმიერ შემთხვევით რიცხვს $r_j (0 \le r_j \le 1)$, რომელიც მოხვდა Δ_i ინტერვალში, შევუსაბამებთ x_i შესაძლო მნიშვნელობას, მაშინ გასათამაშებელ სიდიდეს ექნება მოცემული განაწილების კანონი:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \ldots & p_n . \end{array}$$

დამტკიცება. შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები ემთხვევა $\{x_1 , x_2 ,\ldots, x_n\}$ სიმრავლეს, რადგანაც ინტერვალების რაოდენობა ტოლია n-ის, და r_j-ს Δ_i ინტერვალში მოხვედრისას შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ერთი x_1 , x_2 ,…, x_n მნიშვნელობებიდან. ვინაიდან R განაწილებულია თანაბრად, ამიტომ მისი თითოეულ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა ტოლია ამ ინტერვალის სიგრძის, საიდანაც გამოდის, რომ ნებისმიერ x_i მნიშვნელობას შეესაბამება ალბათობა p_i. ამრიგად, გასათამაშებელი შემთხვევითი სიდიდეს გააჩნია მოცემული განაწილების კანონი.

მაგალითი 1. გავათამაშოთ 10 მნიშვნელობა დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის, რომლის განაწილების კანონია:

$$\begin{array}{lllll} X & 2 & 3 & 6 & 8 \\ P & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{array}$$

ამოხსნა. დავყოთ [0, 1] ინტერვალი ქვეინტერვალებად: Δ_1 – [0, 0.1), Δ_2 – [0.1, 0.4), Δ_3 – [0.4, 0.9), Δ_4 – [0.9, 1]. შემთხვევითი რიცხვების ცხრილიდან ამოვწეროთ 10 რიცხვი: 0.09, 0.73, 0.25, 0.33, 0.76, 0.52, 0.01, 0.35, 0.86, 0.34. პირველი და მეშვიდე რიცხვი ძევს Δ_1 ინტერვალში, შესაბამისად, ამ ორ შემთხვევაში გასათამაშებელი შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $x_1 = 2$; მე-3, მე-4, მე-8 და მე-10 რიცხვები ჩავარდნენ Δ_2 ინტერვალში, რასაც შეესაბამება $x_2 = 3$; მე-2, მე-5, მე-6 და მე-9 რიცხვები აღმოჩნდნენ Δ_3 ინტერვალში, შესაბამისად, $X = x_3 = 6$; დაბოლოს, უკანასკნელ ინტერვალში არ ჩავარდა არც ერთი რიცხვი. ამრიგად, X შემთხვევითი სიდიდის გათამაშებული მნიშვნელობებია: 2, 6, 3, 3, 6, 6, 2, 3, 6, 3.

საწინააღმდეგო ხდომილებების მოდელირება. დავუშვათ, რომ უნდა გავითამაშოთ ექსპერიმენტები, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილება ჩნდება (ხდება) ცნობილი p ალბათობით. განვიხილოთ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობას 1 (იმ შემთხვევაში, როცა ხდება A) ალბათობით p და მნიშვნელობას 0 (თუ არ მოხდა A) ალბათობით $q = 1 - p$. შემდეგ ვათამაშებთ ამ შემთხვევით სიდიდეს, ისე როგორც ეს იყო წინა პუნქტში.

ხდომილებათა სრული სისტემის მოდელირება. თუ ხდომილებები A_1, A_2, …, A_n, რომელთა ალბათობებია შესაბამისად $p_1, p_2,\dots p_n$, ქმნიან ხდომილებათა სრულ ჯგუფს, მაშინ მათი მოდელირებისათვის (ე. ი. ექსპერიმენტების სერიაში მათი გამოჩენის მიმდევრობის მოდელირება) უნდა გავათამაშოთ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონით:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{X} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \dots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2} & \dots & \boldsymbol{p_n}. \end{array}$$

ამასთანავე ითვლება, რომ თუ X მიიღებს მნიშვნელობას $x_i = i$, მაშინ ამ ექსპერიმენტში მოხდა A_i ხდომილება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მოდელირება.

ა) ***შებრუნებული ფუნქციების მეთოდი.*** დავუშვათ, რომ უნდა გავათამაშოთ უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი. უნდა მივიღოთ მისი შესაძლო მნიშვნელობების მიმდევრობა x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), როცა ცნობილია მისი განაწილების ფუნქცია $F(x)$.

თეორემა 2. თუ r_i – შემთხვევითი რიცხვია, მაშინ მოცემული მკაცრად ზრდადი $F(x)$ განაწილების ფუნქციის მქონე გასათამაშებელი უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო x_i მნიშვნელობა, რომლიც შეესაბამება r_i –ს, წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს

$$F(x_i) = r_i\,. \qquad (1)$$

დამტკიცება. ვინაიდან $F(x)$ მკაცრად იზრდება ინტერვალში 0-დან 1-მდე, ამიტომ მოიძებნება (ამასთანავე ერთადერთი) არგუმენტის ისეთი მნიშვნელობა x_i, რომლის დროსაც განაწილების ფუნქცია მიიღებს მნიშვნელობას r_i, ანუ (1) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი: $x_i = F^{-1}(r_i)$, სადაც F^{-1} – არის F ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა. ვაჩვენოთ, რომ (1) განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს განსახილველი X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობას.

წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ თუ x_i – შესაძლო მნიშვნელობაა გარკვეული ξ შემთხვევითი სიდიდის, მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის (c,d) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობაა $F(d) - F(c)$. მართლაც, $F(x)$ ფუნქციის მონოტონურობის გამო, $F(x_i) = r_i$ ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$c < x_i < d \Leftrightarrow F(c) < r_i < F(d)\,.$$

ამიტომ

$$c < \xi < d \Leftrightarrow F(c) < R < F(d) \quad \left(R = U([0,1])\right),$$

შესაბამისად,

$$p(c < \xi < d) = p(F(c) < R < F(d)) = F(d) - F(c).$$

ე. ი. ξ შემთხვევითი სიდიდის (c, d) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა ტოლია ამ ინტერვალზე $F(x)$ განაწილების ფუნქციის ნაზრდის, შესაბამისად, $\xi = X$.

მაგალითი 3. გავათამაშოთ [5; 8] ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის 3 შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოხსნა. გასაგებია, რომ

$$F(x) = \frac{x-5}{3}\,.$$

ამიტომ უნდა ამოვხსნათ განტოლება $\frac{x_i-5}{3}=r_i$, საიდანაც $x_i=3r_i+5$. ავირჩიოთ 3 შემთხვევითი რიცხვი: 0.23; 0.09; 0.56 და ჩავსვათ ისინი ამ განტოლებაში. მივიღებთ X შემთხვევითი სიდიდის შესაბამის შესაძლო მნიშვნელობებს:

$$x_1=5.69;\quad x_2=5.27;\quad x_3=6.68.$$

ბ) *სუპერპოზიციის მეთოდი.* თუ გასათამაშებელი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია შეიძლება წარმოდგეს ორი განაწილების ფუნქციის წრფივი კომბინაციის სახით:

$$F(x)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x)\quad (C_1,C_2>0),$$

მაშინ $C_1+C_2=1$, ვინაიდან, $F(x)\to 1$, როცა $x\to\infty$.

შემოვიღოთ დამხმარე დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე Z განაწილების ფუნქციით:

$\boldsymbol{Z}$	**1**	**2**
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$**.**

ავირჩიოთ 2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი რიცხვი r_1 და r_2 გავათამაშოთ Z შემთხვევითი სიდიდე r_1 რიცხვის მიხედვით. თუ Z = 1, მაშინ X –ის შესაძლო მნიშვნელობას ვეძებთ განტოლებიდან $F_1(x)=r_2$, ხოლო თუ Z = 2, მაშინ ვხსნით განტოლებას $F_2(x)=r_2$. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ამ შემთხვევაში გასათამაშებელი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ტოლია მოცემული განაწილების ფუნქციის.

გ) *ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მიახლოებითი გათამაშება.* ვინაიდან [0,1] ინტერვალში თანაბრად განაწილებული R შემთხვევითი სიდიდისათვის: $E(R)=\frac{1}{2},\ D(R)=\frac{1}{12}$, ამიტომ [0, 1] ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელი R_j ($j=1,2,\ldots,n$) შემთხვევითი სიდიდეების ჯამისათვის $\sum_{j=1}^{n}R_j$:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n}R_j\right)=\frac{n}{2},\ D\left(\sum_{j=1}^{n}R_j\right)=\frac{n}{12},\ \sigma=\sqrt{\frac{n}{12}}.$$

შესაბამისად, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად, ნორმირებულ შემთხვევით სიდიდეს $(\sum_{j=1}^{n} R_j - \frac{n}{2}) / \sqrt{n/12}$, როცა $n \to \infty$ ექნება ნორმალურთან ახლოს მყოფი განაწილება, პარამეტრებით $a = 0$ და $\sigma = 1$. კერძოდ, საკმაოდ კარგი მიახლოება მიიღება, როცა $n = 12$:

$$\sum_{j=1}^{12} R_j - 6 .$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ გავათამაშოთ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობა, უნდა შევკრიბოთ 12 დამოუკიდებელი შემთხვევითი რიცხვი და ჯამს გამოვაკლოთ 6.

ინტეგრალის გამოთვლა მონტე-კარლოს მეთოდით. ვნახოთ, თუ როგორ შეიძლება

$$\int_0^1 f(x)dx \qquad (2)$$

ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა, სადაც $f:[0,1] \to [0,1]$ უწყვეტი ფუნქციაა.

განვიხილოთ [0,1] შუალედში თანაბრად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $X_1, X_2, \ldots$ და ავაგოთ ახალი მიმდევრობა:

$$Z_i = f(X_i),\ i \ge 1. \qquad (3)$$

მტკიცდება, რომ $Z_i, i \ge 1$ აგრეთვე დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა და $\forall i$:

$$EZ_i = \int_0^1 f(x)dx .$$

ამიტომ დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად ადგილი აქვს კრებადობას:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \to \int_0^1 f(x)dx \ \text{(ალბათობით 1).}$$

შესაბამისად, (2) ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლისათვის უნდა დამოდელირდეს შემთხვევით სიდიდეთა $(X_i, Z_i), i \geq 1$ მიმდევრობა და გამოითვალოს (3) წესით შედგენილ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული.

საკონტროლო წერებისა და შუალედური, საბოლოო გამოცდების ბილეთების ნიმუშები 2006-2010 წლებში

საკონტროლო წერა, ვარიანტი № 2006. 8.12.1.1.

1. დაწერეთ ჯამის ალბათობის ფორმულა.
2. განმარტეთ მაჩვენებლიანი განაწილება.
3. განმარტეთ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა.
4. ბინომიალური განაწილების ლოდინი და დისპერსია.
5. დაწერეთ მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი ფორმულა.
6. აგდებენ ერთ წესიერ კამათელს და მეორე ისეთ კამათელს, რომელზეც 6 ქულის მოსვლის ალბათობაა 1/4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წესიერ კამათელზე მოვა 6 ქულა და არაწესიერზე არ მოვა 6 ქულა.
7. ყუთში მოთავსებულია 3 წესიერი და იმავე ზომისა და წონის მქონე 4 არაწესიერი მონეტა, რომელზეც გერბის მოსვლის ალბათობაა 3/8. შემთხვევით ამოიღეს ერთი მონეტა და ააგდეს. იპოვეთ გერბის მოსვლის ალბათობა.
8. მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები. ა) იპოვეთ η-ს სტანდარტული გადახრა; ბ) ააგეთ η-ს განაწილების ფუნქცია; გ) იპოვეთ $P\{\eta\in[-2,6)\}$; დ) ააგეთ $\xi+\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ξ	-2	1
P	0.82	0.18

η	-4	2	5
P	0.4	0.1	0.5

9. მოცემულია ორი ξ და η შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების კანონი. ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი; ბ) ავაგოთ $\min(\xi,\eta)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი; გ) დამოუკიდებელია თუ არა ეს შემთხვევითი სიდიდეები?

$\eta\backslash\xi$	-3	-1	2
-2	0.25	0.15	0.2
1	0.13	0.05	0.22

10. დაწერეთ ნორმალური განაწილების სიმკვრივე, რომლის ლოდინია 3, ხოლო სტანდარტული გადახრა 4.

11. თანაბარი განაწილების სიმკვრივეა $f(x)=\begin{cases}1/5, \text{ თუ } x\in[-1,4];\\ 0, \text{ თუ } x\notin[-1,4].\end{cases}$

რას უდრის: ა) მათემატიკური ლოდინი; ბ) სტანდარტული გადახრა.

12. $N(0,1)$-ის 0.77-კვანტილია 0.74. იპოვეთ $N(-3,16)$-ის: ა) 0.77-კვანტილი; ბ) 0.23-კვანტილი.

კოლოკვიუმი 2006

1. მუავრ-ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური ფორმულები.
2. განაწილების ფუნქცია: განმარტება და თვისებები.
3. თანაბარი განაწილების სიმკვრივე, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.
4. მოცემულია: $P(A)=3/7$; $P(B)=0,4$; A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია.

   იპოვეთ $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ და $P(\overline{A}\setminus B)$.
5. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია -2, 1 და 3 შესაბამისად ალბათობებით 0.2, 0.4 და x. იპოვეთ: x; შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი; მათემატიკური ლოდინი; დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.
6. ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია -1, 0 და 2 შესაბამისად ალბათობებით 0.3, 0.3 და 0.4, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია -2, 1 და 3 ალბათობებით 0.2, 0.5 და 0.3. შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია. იპოვეთ $\min\{\xi,\eta\}$-ის განაწილები კანონი, ლოდინი და დისპერსია.
7. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა $f_\xi(x)=ax^3$, $2\le x\le 5$; =0 სხვაგან. იპოვეთ: $a, P\{|\xi|\le 3\}, F_\xi(x)$, $E\xi$ და $D\xi$.
8. ასიმეტრიის კოეფიციენტი.
9. ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია -1, 1 და 2, ხოლო η-სი კი -1, 0 და 2. მათი ერთობლივი განაწილების კანონია: $p_{11}=0,1$; $p_{12}=0; p_{13}=0,2; p_{21}=0; p_{22}=1/7; p_{23}=0,1; p_{31}=0; p_{32}=0,2.$ იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი.

საკონტროლო წერა, ვარიანტი № 2007.1.1

1. A და B დამოუკიდებელია, $P(A)=0.7$; $P(B)=0.8$. იპოვეთ $P(A\setminus B)$.
ა) 0.1 ბ) -0.1 გ) 0.56 დ) 0.14 ე) 0.24.

2. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დაბრუნების გარეშე შემთხვევით შერჩეული სამი ბურთიდან 2 თეთრია და 1 შავი?
ა) 1/56 ბ) 15/56 გ) 15/28 დ) 5/28 ე) 1/28.

3. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სამივეჯერ მოვა ერთი და იგივე ქულა?
ა) 1/36 ბ) 5/9 გ) 25/216 დ) 1/8 ე) 43/216 ვ) 91/216.

4. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A\cup B\cup C)$ და $P(A\cap B\cap C)$, თუ: A-ქულათა ჯამი ლუწია, B-ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია, C-მეორე აგდებისას მოვიდა 2.
ა) 11/12, 1/9 ბ) 31/36, 1/6 გ) 25/26, 1/18 დ) 2/3, 0 ე) 4/9, 1/12 ვ) 7/18, 0.

5. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. არის თუ არა დამოუკიდებელი: A და B? A და C? B და C? არის თუ არა ერთობლივად დამოუკიდებელი A, B და C? თუ: A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა.
ა) კი, არა, კი, არა ბ) კი, კი, არა, არა გ) არა, არა, კი, კი; დ) კი, კი, კი, არა.

6. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P_B(A)$ და მიუთითეთ არის თუ არა A და B დამოუკიდებელი, თუ: A – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა, B –ქულათა ჯამი ლუწია.
ა) 1/3, არა ბ) 1/6, კი გ) 1/2, არა დ) 2/5, არა ე) 1/6, კი ვ) 1, არა.

7. I, II, III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%, 20% და 50%-ს, რომელთა შორის შესაბამისად 1%, 3% და 2% ცუდია. შემთხვევით აღებული დეტალი აღმოჩნდა ცუდი. როგორია ალათობა იმისა, რომ ის დაამზადა I ბრიგადამ?
ა) 0.258 ბ) 0.613 გ) 0.316 დ) 0.526 ე) 0.185 ვ) 0.158.

საკონტროლო წერა 2007

№ 2008.4.1. 1. სხვაობის ალბათობის ფორმულა. 2. ბერნულის ფორმულა. 3. ხდომილებთა დამოუკიდებლობა. 4. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 5 ადამიანი, რომელთაგან ერთს არა აქვს უფლება დაიკავოს ადგილი საჭესთან?

5. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა კენტ რიხვჯერ, ხოლო საფასური ლუწ რიცხვჯერ?

6. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A\cup B\cup C)$ და $P(A\cap B\cap C)$ ალბათობები A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულისათვის: A-მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B-მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია, C-მეორე აგდებისას მოვიდა 2 ქულა;
7. I ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%-ს, რომელთა შორის 3% წუნდებულია. II ბრიგა-და აწარმოებს იმავე დეტალების 35%-ს, რომელთა შორის 4% წუნდებლია. III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 15%-ს, რომელთა შორის 1% წუნდებულია. IV ბრიგადა ამზადებს დეტალების 20%-ს, რომელთა შორის 2% წუნდებულია. ერთ საწყობში მოგროვილი ამ დეტალებიდან შემთხვევით აიღეს ერთი დეტალი და ის აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დაამზადა I ბრიგადამ?

შეფასება: №1 – 6 ორ-ორი ქულა, №7 – 3 ქულა, სულ 15 ქულა.

№28.10.1. 1. მარჯვენა ჯიბეში 3 ოცთეთრიანი და 4 ათთეთრიანი მონეტაა, მარცხენა ჯიბში კი 6 ოცთეთრიანი და 3 ათთეთრიანი მონეტა. მარჯვენა ჯიბიდან მარცხენაში შემთხვევით 2 მონეტა გადადეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მარცხენა ჯიბიდან შემთხვევით ამოღებული მონეტა ათთეთრიანია (3 ქ.).

2. ყუთში 7 წითელი და 5 ლურჯი ბურთია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული სამი ბურთი ერთი ფერისაა (3 ქულა) .
3. A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, $P(A)=0.5, P(B)=0.3$. გამოთვალეთ $P(\overline{A}+B)$ (2 ქულა).
4. აგორებენ 2 წესიერ კამათელს, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მუსული ციფრების ჯამი ტოლია 8-ის, თუ ცნობილია რომ ეს ჯამი ლუწი რიცხვია (2 ქულა).
5. ააგდეს სამი სიმეტრიული მონეტა, დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილობები A={პირველ მონეტაზე მოვიდა გერბი}, B={მოვიდა ერთი საფასური მაინც} (2 ქულა).
6. ციფრებიდან 1,2,3,4,5 ჯერ ირჩევენ ერთს, ხოლო შემდეგ დარჩენილი ოთხიდან მეორეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ამორჩეული რიცხვი კენტია (3 ქულა).

2007 წლის საგამოცდო ბილეთი №1611. 2.1.

1. ქვემოთ მოყვანილი X-ის განაწილების კანონის მიხედვით იპოვეთ: განაწილების ფუნქცია **(0.5ქ.)** და ააგეთ გრაფიკი

(0.5ქ.); $P(4 < X \le 8)$ **(0.25ქ.)**; განაწილების კანონები: $\max(5, X)$ -ისა **(0.25ქ.)** და $4X - 9$-ის **(0.25ქ.)**; EX **(0.25ქ.)**; $E(5-3X)$ **(0.25ქ.)**; DX **(0.5ქ.)**; $D(-5+4X)$ **(0.25ქ.)**; **სულ 3 ქულა**

X	3	4	5	10
P	0.25	0.1	?	0.3

2. დამოუკიდებელ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების მიხედვით იპოვეთ: EX, EY **(0.25ქ.)**; DX, DY **(0.25ქ.)**; $E(-2XY)$ **(0.25ქ.)**; $D(-3X+4Y)$ **(0.25ქ.)**; $\max(X,Y)$ -ის განაწილების კანონი **(0.5ქ.)**. **სულ 1.5 ქულა**

X	-3	-1	2
P	0.3	0.35	?

Y	-2	3
P	0.4	0.6

3. იპოვეთ განაწილების კანონები: X -ის, Y -ის **(0.5ქ.)** და $2X-3Y$ -ის **(0.5ქ.)**; EX , EY **(0.25ქ.)**, $E(3X+5Y)$ **(0.5ქ.)**; DX DY **(0.5ქ.)**; $E(XY)$ **(0.5ქ.)**; $\operatorname{cov}(X,Y)$ **(0.25ქ.)**; $\rho(X,Y)$ **(0.5ქ.)**; $\operatorname{cov}(5X,-4Y+7)$ **(0.25ქ.)**; $\operatorname{cov}(3X+2Y,Y)$ **(0.25ქ.)**; $D(4X-2Y)$ **(0.25ქ.)**; $\rho(-3X+4,X)$ **(0.25ქ.)**; დამოუკიდებელია თუ არა X და Y ? **(0.5ქ.)**. **სულ 5 ქულა.**

Y \ X	-2	-1	1
-3	0.17	?	0.15
1	0.23	0.1	0.05

4. დაწერეთ ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივე, თუ $EX = 0.5$. **0.5 ქულა.**
5. მოცემულია X -ის განაწილების ფუნქცია $F_X(x)=0,\ \ თუ\ x<2;$ $=ax^4,\ თუ\ 2 \le x < 4;\ =1,\ თუ\ \ x > 4$. იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე და a **(1.5ქ.)**; EX **(0.5ქ.)**; DX **(0.5ქ.)**; $P(X \in [2,3))$ **(0.5ქ.)**. **სულ 3 ქულა.**
6. $f(x) = e^{-\frac{(x-5)^2}{18}} / \sqrt{18\pi}$. რას უდრის EX **(0.25ქ.)**, DX **(0.25ქ.)**, $P(X=-4)$ **(0.25ქ.)**, $P(X<0)$ **(0.25ქ.) სულ 1 ქულა.**
7. $P(X=k) = C_{10}^{k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}$), $k = 0,1,\ldots 10$. რას უდრის EX **(0.25ქ.)**, DX **(0.25ქ.)**, $P(X=4)$ **(0.25ქ.)**, $P(X \in [3,5))$ **(0.25ქ.) სულ 1 ქულა**.
8. მოცემულია შერჩევა: -1, 2, 7, 9, 3, -7, 5, 9, 8, -9. იპოვეთ პოპულაციის საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასება **(0.5ქ.)**. გამოთვალეთ ექსცესის კოეფიციენტი **(0.5ქ.) სულ 1 ქულა.**
9. ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია შერჩევა: 18, 12, 22, 15, 30, 16, 39, 38, 35. $\sigma^2 = 64$. ავაგოთ 0.99 საიმედოობის

ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის (ნორმალური განაწილების 0.995-კვანტილია 2.58) **2 ქულა**.

10. ნორმალური პოპულაციიდან $N(a,25)$ აღებულია შერჩევა: 10, 12, -15, 6, 18, -9, 14, -20, 16. $\alpha=0.03$ მნიშვნელოვნების დონით შევამოწმოთ $H_0: a=5$ ჰიპოთეზა $H_1: a=7$ -ის წინააღმდეგ ($x_{0.97}=1.89$) **2 ქულა**.

ყოველი თეორიული კითხვა ფასდება 2 ქულით:

11. რას ეწოდება გადანაცვლება, წყობა, ჯუფთება. დაწერეთ მათი გამოსათვლელი ფორმულები.

12. ვთქვათ $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ არის მოცემული ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე და P არის ამ სივრცეზე განსაზღვრული ალბათობა. რა ძირითად თვისებებს აკმაყოფილებს P ალბათობა?

13. დაწერეთ ორი ხდომილების დამოუკიდებლობის განსაზღვრება. თუ ორი A და B ხდომილებისათვის $A\subset B$, $\mathrm{P}(A)=1/4$ და $\mathrm{P}(B)=1/2$, დაასაბუთეთ დამოუკიდებელია თუ არა A და B ხდომილება.

14. რას ეწოდება უალბათესი რიცხვი. დაწერეთ უალბათესი რიცხვის გამოსათვლელი ფორმულა.

15. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და მისი თვისებები.

16. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მაგალითები: ბერნულის, ბინომური და პუასონის განაწილებები. მათი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

17. არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეები. კავშირი შემთხვევით სიდიდეთა არაკორელირებულობასა და დამოუკიდებლობას შორის.

18. შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი.

19. შეფასებათა აგების მეთოდი – მომენტთა მეთოდი.

20. ინტერვალური შეფასება – ნდობის ინტერვალი ბერნულის სქემაში წარმატების უცნობი ალბათობისათვის.

საკონტროლო წერა: ვარიანტი 24.2008.12.1.

1. ალბათობის კლასიკური განმარტება.
2. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები.

3. მათემატიკური ლოდინი: განმარტება, თვისებები.
4. ექსცესის კოეფიციენტი.
5. შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.
6. $P(A)=0.3$; $P(B)=4/9$; A და B დამოუკიდებელია. იპოვეთ $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(\overline{A}\setminus B)$.
7. მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, \text{ თუ } x<-2;\\ 0.4, \text{ თუ } -2\le x<0;\\ 0.75, \text{ თუ } 0\le x<3;\\ 1, \text{ თუ } x\ge 3.\end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა) განაწილების კანონი; ბ) დისპერსია.
8. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია განაწილების კანონებით:

ξ	**-2**	**1**	**3**
P	**0.2**	**0.5**	**0.3**

η	**-1**	**0**	**2**
P	**0.3**	**0.3**	**0.4**

იპოვეთ: $\xi^2-3\eta$-ს: ა) განაწ. კანონი; ბ) მათემატიკური ლოდინი; გ) $P\{\xi^2-3\eta\ge 0\}$.
9. მოცემულია ξ შემთ. სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}ax^3, \text{ თუ } x\in[2,5];\\ 0, \text{ თუ } x\notin[2,5].\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) a; ბ) $P\{|\xi|<2\}$; გ) განაწილების ფუნქცია $F_\xi(x)$; დ) $E\xi$; ე) $D\xi$.
10. ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია: -2; 0 და 6, ხოლო η-სი: -2; -1 და 1. მათი ერთობლივი განაწილების კანონია: $p_{11}=0.2$; $p_{12}=0.1$; $p_{13}=0.1$; $p_{21}=0$; $p_{22}=1/6$; $p_{23}=0$; $p_{31}=0.1$; $p_{32}=?$ $p_{33}=0$. ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი; ბ) ააგეთ $\max(\xi/2,\eta)$-ს განაწილების კანონი; გ) გამოთვალეთ $E(\max\{\xi/2,\eta\})$; დ) დამოუკიდებელია თუ არა ეს შემთხვევითი სიდიდეები?

ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა II კოლოკვიუმის ბილეთის ნიმუში (25 ქულა)

1. ნორმალური პოლულაციის შერჩევითი საშუალოს განაწილების კანონი უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში **(1 ქულა)**.

2. ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი მათემატიკური ლოდინის შემთხვევაში **(2 ქულა)**.
3. ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში (კრიტერიუმი ორმხრივია):

   ა) კრიტერიუმის სტატისტიკა **(1 ქულა)**; **ბ)** კრიტიკული არე **(1 ქულა); გ)** გადაწყვეტილების მიღების წესი **(1 ქულა)**; **დ)** კრიტერიუმის სიმძლავრე; **(1 ქულა) ე)** p - მნიშვნელობა **(1 ქულა)**; **ვ)** p -მნიშვნელობის მეთოდი **(1 ქულა); ზ)** შერჩევის მინიმალური რაოდენობა, რომლის დროსაც I გვარის შეცდომის ალბათობაა α, ხოლო სიმძლავრე არანაკლებ $1-\beta$ **(1 ქულა).**
4. 100 გამოკითხულ უმუშევარს შორის 65% არაა დაინტერესებული დაბრუნდეს ძველ სამსახურში. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ უმუშევრების რეალური პროპორციისათვის, რომლებსაც არ სურთ ძველ სამსახურში დაბრუნება **(3 ქულა).**
5. მეტეოროლოგის აზრით ქალაქში ქარის საშუალო სიჩქარეა 8კმ/სთ. შემთხვევით შერჩეული 32 დღის მონაცემებით ქარის საშუალო სიჩქარე აღმოჩნდა 8.2 კმ/სთ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 0.6კმ/სთ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი არ დავეთანხმოთ მეტეოროლოგს? გამოიყენეთ P -მნიშვნელობის მეთოდი **(3 ქულა).**
6. ვიპოვოთ P -მნიშვნელობა, თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა სტიუდენტის განაწილებისათვის (T კრიტერიუმის სტატისტიკის t კრიტერიუმის მნიშვნელობა) არის 2.056, შერჩევის მოცულობაა 11 და კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია **(3 ქულა).**
7. სიგარეტის კომპანიას სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ სიგარეტში ნიკოტინის შემცველელობის დიპერსია არის 0.644. იგულისხმება, რომ ნიკოტინის შემცველელობა ნორმალურადაა განაწილებული. 20 სიგარეტისგან აღებული შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1 მილიგრამი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ კომპანიის ჰიპოთეზა? გამოთვალეთ სიმძლავრე **(3 ქულა).**
8. ავტობუსს საშუალოდ გადაყავს 42 მგზავრი. გასულ წლებში პოპულაციის სტანდარტული გადახრა შეადგენდა 8-ს. წელს შემთხვევით შერჩეული 10 ავტობუსის მგზავრთა საშუალო აღმოჩნდა 48. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ საშუალო იგივეა? ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის. არის თუ არა ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაცია თანხვედრაში ჰიპოთეზის

შემოწმების შედეგთან? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად **(3 ქულა).**

საკონტროლო წერა: ვარიანტი 29.12.09-01

1. შემოწმებულ იქნა გაფანტული სკლეროზით დაავადებულ ადამიანთა ორი 120 და 34 კაციანი ჯგუფის უნარები. პირველ ჯგუფში შედიოდნენ ის ადამიანები ვისაც უვლიდა საკუთარი მეუღლე, ხოლო მეორეში კი ის ადამიანები ვისაც უვლიდა უცხო ადამიანი. მიღებული შედეგებია: $\overline{x}_{120}=2$, $s_1^{'}=0.6$; $\overline{y}_{34}=1.7$, $s_2^{'}=0.7$. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება ამ ორი ჯგუფის საშუალოებს შორის?
2. 50 პირველკურსელი სტუდენტიდან 8-ს აქვს საკუთარი ავტომანქანა, ხოლო 75 მეოთხეკურსელიდან კი 20-ს. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ საკუთარი ავტომობილის მქონე სტუდენტების პროპორცია მეოთხეკურსელებში უფრო მაღალია? ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.
3. ხი-კვადრატ კრიტერიუმის გამოყენებით შეამოწმეთ ξ სიდიდე, რომლის სიხშირული განაწილება მოყვანილია ქვემოთ, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა ნორმალურად განაწილებული.

კლასის საზღვრები	*სიხშირე*
79.5—94.5	23
94.5—109.5	72
109.5—124.5	62
124.5—139.5	26
139.5—154.5	13
154.5—169.5	4
$\sum$	200

4. მკვლევარს აინტერესებს დამოკიდებულია თუ არა ინფორმაციის მიღების საშუალებები ადამიანის განათლების დონეზე. გამოკითხული 400 ბაკალავრისა და მაგისტრის ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ინფორმაციის მიღების გზები დამოუკიდებელია განათლების დონისაგან.

	ტელევიზია	*გაზეთები*	*სხვა საშუალებები*
ბაკალავრი	159	90	51
მაგისტრი	27	42	31

5. კვლევის თანახმად 6-დან 17-წლამდე მოზარდების 64%-ს არ შეუძლია გადალახოს საბაზო შესაბამისობის ტესტი. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა ამ კატეგორიის მოსწავლეების პროპორცია ერთი და იგივე სხვადასხვა სკოლებში. ტესტირება ჩაუტარდა შემთხვევით შერჩეულ 120--120 მოსწავლეს ოთხი სხვადასხვა სკოლიდან. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ იმ მოსწავლეების პროპორცია, რომლებმაც გადალახეს შესაბამისობის ტესტი, ერთი და იგივეა.

	I სკოლა	II სკოლა	III სკოლა	IV სკოლა
გადალახა	49	38	46	34
ვერ გადალახა	71	82	74	86
ჯამი	120	120	120	120

2008 წლის საგამოცდო ბილეთის ამოცანების ნაწილი

D. ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი არის 11, ხოლო დისპერსია 9-ის ტოლია. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით იპოვეთ ε მუდმივის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა: $P\{|\xi - 11| \geq \varepsilon\} \leq 0.09$.

E. ნიკა ეძებს სამუშაოს. იგი იმყოფებოდა გასაუბრებაზე ბანკში და სადაზღვევო კომპანიაში. მისი შეფასებით ბანკში მას მიიღებენ 0.5 ალბათობით, ხოლო სადაზღვევო კომპანიაში კი 0.6 ალბათობით. გარდა ამისა, მას მიაჩნია, რომ 0.3-ის ტოლი ალბათობით მას ორივე ეს ორგანიზაცია მიიწვევს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნიკა სამუშაოს იშოვის.

F. სტუდენტმა 25 საკითხიდან იცის 20. მასწავლებელი მას აძლევს 3 შეკითხვას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი უპასუხებს: ა) მხოლოდ ორ შეკითხვას, ბ) ერთ შეკითხვას მაინც.

G. ფიზკულტურის მასწავლებელმა 9 მოსწავლე, რომელთაგან 7 გოგონაა, ჩააყენა მწკრივში. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ლაშა და გიორგი აღმოჩნდებიან ერთმანეთის გვერდით?

H. ყუთში, რომელშიც 2 ბურთულაა ჩაუშვეს 2 თეთრი ბურთულა, რის შემდეგაც ალალბედზე ამოიღეს 1 ბურთულა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა თეთრია, თუ ტოლალბათურია ყველა ჰიპოთეზა საწყისი 2 ბურთულის ფერების შესახებ (იგულისხმება, რომ ფერი არის თეთრი ან შავი).

2009 წლის საგამოცდო ბილეთი

1. განმარტეთ: გენერალური ერთობლიობა, პოპულაცია, შერჩევა, შერჩევითი მეთოდი, შერჩევის მოცულობა, პოპულაციის სასრულობის შესწორება **(4 ქულა)**.
2. ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში (მიუთითეთ რას წარმოადგენს მონაწილე სიდიდეები) **(4 ქულა)**.
3. ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში (კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია): **ა)** კრიტერიუმის სტატისტიკა; **ბ)** კრიტიკული არე; **გ)** გადაწყვეტილების მიღების წესი; **დ)** p - მნიშვნელობა; **ე)** p - მნიშვნელობის მეთოდი; **ვ)** შესაბამისი ნდობის ინტერვალი **(6 ქულა)**.
4. ფიშერის ზუსტი კრიტერიუმი **(6 ქულა)**.
5. 20 შემთხვევით შერჩეული ავტომობილის მიერ 1 გალონი (1 გალონი = 3.38 ლიტრი)ბენზინის გამოყენების შედეგად გამოყოფილი მავნე ნივთიერებების რაოდენობის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 2.3 უნცია. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ავტომობილების მიერ გამოყოფილი მავნე ნივთიერებების სტანდარტული გადახრისათვის **(3 ქულა)**.
6. კვლევის თანახმად მწეველი ადამიანი საშუალოდ დღეში ეწევა 14 ცალ სიგარეტს. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად შემთხვევით შეირჩა 40 მწეველი და აღმოჩნდა, რომ ისინი დღეში საშუალოდ 18 ცალ სიგარეტს ეწეოდნენ. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 6. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ მწეველების მიერ დღეში მოწეული სიგარეტის რიცხვი სინამდვილეში განსხვავებულია 14-საგან? **(5 ქულა)**.
7. განათლების სამინისტროს მტკიცებით პედაგოგების სწავლების სტაჟის რიცხვის ცვალებადობა უმაღლეს სასწავლებლებში უფრო დიდია ვიდრე საშუალო სკოლებში. უმაღლესი სასწავლებლის შემთხვევით შერჩეული 26 პედაგოგის მუშაობის სტაჟის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 2.8 წელი, ხოლო საშუალო სკოლის 18 პედაგოგისათვის კი 1.9 წელი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეუძლია თუ არა მკვლევარს დაადასტუროს თავისი მტკიცებულების მართებულება? ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა ფარდობისათვის. ჩათვალეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად **(7 ქულა)**.
8. წიგნის გამომცემელს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება მამაკაცებისა და ქალების მიერ წასაკითხად არჩეული

წიგნების ტიპებს შორის. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ არჩეული წიგნის ტიპი დამოუკიდებელია მკითხველის სქესისაგან **(5 ქულა).**

სქესი	**მისტიკა**	**რომანი**	**დეტექტივი**
მამრობითი	243	201	191
მდედრობითი	135	149	202

2010 წლის საგამოცდო ბილეთის პრაქტიკული ნაწილი

1. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის მიხედვით იპოვეთ: განაწილების ფუნქცია **(0.5ქ.)**; $P\{\xi \in (4,8]\}$ **(0.25ქ.)**; განაწილების კანონები: $\max(4,\xi)$-ისა **(0.25ქ.)** და $4\xi^2 - 9$-ის **(0.25ქ.)**; $E\xi$ **(0.25ქ.)**; $E(10-4\xi)$ **(0.25ქ.)**; $D\xi$ **(0.25ქ.)**; $D(-7+3\xi)$ **(0.25ქ.)**; $\{\xi = 5\}$ ხდომილების მოსალოდნელი სიხშირე, როცა ξ-ზე ტარდება 200 დაკვირვება **(0.75ქ.) სულ 3 ქულა**.

ξ	-3	4	5	10
P	0.25	0.1	?	0.3

2. დამოუკიდებელ ξ და η შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების მიხედვით იპოვეთ: $E(-3\xi\eta)$ **(0.5ქ.)**; $D(-2\xi + 3\eta)$ **(0.5ქ.)**; $\max(2\xi,\eta)$-ის განაწილების კანონი **(0.5ქ.);** ξ და η-ს ერთობლივი განაწილების კანონი **(0.5ქ.), სულ 2 ქულა.**

ξ	-3	-1	2
P	0.3	0.35	?

η	-2	3
P	0.4	0.6

3. იპოვეთ განაწილების კანონები: ξ-ის, η-ს **(0.5ქ.)** და $2\xi - 3\eta$-ს **(0.5ქ.)**; $E(\xi\eta)$ **(0.5ქ.)**; $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ **(0.5ქ.)**; $\rho(\xi,\eta)$ **(0.5ქ.)**; $\mathrm{cov}(5\xi, -4\xi + 3\eta - 12)$ **(0.5ქ.)**; $D(4\xi - 3\eta)$ **(0.25ქ.)**; $\rho(2\xi - 3, -3\xi + 2)$ **(0.25ქ.)**; ξ-ს პირობითი განაწილების კანონი პირობაში $\{\eta = 1\}$ **(0.5ქ.)**; $E\{\xi \mid \eta = 1\}$ **(0.5ქ.)**; დამოუკიდებელია თუ არა ξ და η? **(0.5ქ.), სულ 5 ქულა.**

$\eta \setminus \xi$	-2	-1	1
-3	0.16	?	0.15
1	0.24	0.1	0.05

4. ა) დაწერეთ ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივე, თუ $E\xi = 1.2$ **(0.5ქ);**

ბ) $f_\xi(x) = \exp\{-(x-5)^2/18\}/\sqrt{18\pi}$. რას უდრის $E\xi$ **(0.25ქ.)**, $D\xi$ **(0.25ქ.), სულ 1 ქულა.**

5. მოცემულია ξ-ის განაწილების ფუნქცია $F_\xi(x) = 0$, თუ $x < 2$; $= ax^4$, თუ $2 \le x < 4$; = 1, თუ $x \ge 4$. იპოვეთ: განაწილების სიმკვრივე **(0.5ქ.)**; a **(0.5ქ.)**; $P\{\xi \in (2,5]\}$ **(0.5ქ.)**; ალბათობა იმისა, რომ 5 დაკვირვებისას ξ 4-ჯერ მიიღებს მნიშვნელობას (2,5] შუალედიდან **(0.5ქ.), სულ 2 ქულა.**

6. მოცემულია ξ-ის განაწილების სიმკვრივე $f_\xi(x) = c\sin 0.2x$, თუ $0 \le x \le 2.5\pi$; = 0 სხვაგან. იპოვეთ: c **(0.5ქ.)**; განაწილების ფუნქცია **(1ქ.)**; $E\xi$ **(0.5ქ.)**; $D\xi$ **(0.5ქ.)**; მედიანა **(0.5ქ.), სულ 3 ქულა.**

7. $P\{\xi = m\} = C_{10}^m \cdot C_{20}^{15-m} / C_{30}^{15}$, $m = 0,1,...,10$. რას უდრის $E\xi$ **(0.25ქ.)**, $D\xi$ **(0.25ქ.)**; $P\{\xi \ge 1\}$ **(0.5ქ.), სულ 1 ქულა.**

8. $\xi \cong N(3,16)$. იპოვეთ მარცხენა ცალმხრივი ინტერვალი, რომელშიც ξ-ის მოხვედრის ალბათობაა 0.35, თუ $N(0,1)$-ის 0.65-კვანტილია 0.39 (**1 ქულა).**

9. მოცემულია შერჩევა: -1, 2, 7, 9, 3, -7, 5, 9, 8, -9. იპოვეთ: პოპულაციის საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასება **(0.5ქ.);** ექსცესის კოეფიციენტი **(0.5ქ.) , სულ 1 ქულა.**

10. ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია შერჩევა: 18, -12, 22, 15, -30, 16, -39, -38, 35. σ^2 =64. ავაგოთ 0.99 საიმედოობის ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის (სტანდარტული ნორმალური განაწილების 0.995-კვანტილია 2.58) **1 ქულა.**

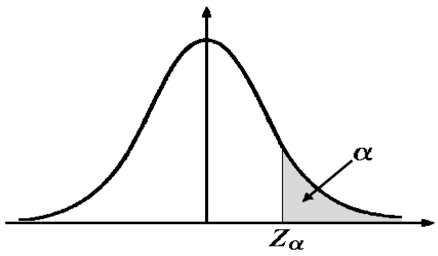
დანართი 3

(სტატისტიკური ცხრილები)

პუასონის განაწილების ცხრილები ($P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$)

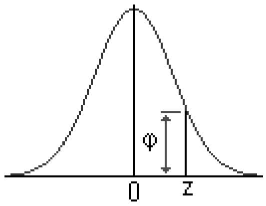
	λ=1.0	λ=1.5	λ=2.0	λ=2.5	λ=3.0	λ=3.5	λ=4.0	λ=4.5	λ=5.0
p(0)	**0.3679**	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
p(1)	**0.3679**	**0.3347**	**0.2707**	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337
p(2)	0.1839	0.2510	**0.2707**	**0.2565**	**0.2240**	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842
p(3)	0.0613	0.1255	0.1804	0.2138	**0.2240**	**0.2158**	**0.1954**	0.1687	0.1404
p(4)	0.0153	0.0471	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	**0.1954**	**0.1898**	**0.1755**
p(5)	0.0031	0.0141	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	**0.1755**
p(6)	0.0005	0.0035	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462
p(7)	0.0001	0.0008	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044
p(8)		0.0001	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653
p(9)			0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363
p(10)				0.0002	0.0008	0.0023	0.0053	0.0104	0.0181
p(11)					0.0002	0.0007	0.0019	0.0043	0.0082
p(12)					0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0034
p(13)						0.0001	0.0002	0.0006	0.0013
p(14)							0.0001	0.0002	0.0005
p(15)								0.0001	0.0002

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α - კრიტიკული წერტილები (z_α)



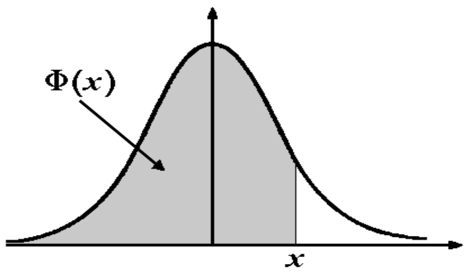
α	0.1	0.05	0.025	0.125	0.01	0.005	0.0025	0.001
z_α	1.28	1.64	1.96	2.24	2.33	2.57	2.81	3.08

$N(0.1)$ -ის სიმკვრივის ($\varphi(z) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-z^2/2}$) მნიშვნელობები

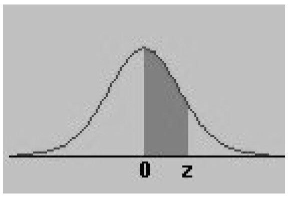


Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.398942	.398922	.398862	.398763	.398623	.398444	.398225	.397966	.397668	.397330
0.1	.396953	.396536	.396080	.395585	.395052	.394479	.393868	.393219	.392531	.391806
0.2	.391043	.390242	.389404	.388529	.387617	.386668	.385683	.384663	.383606	.382515
0.3	.381388	.380226	.379031	.377801	.376537	.375240	.373911	.372548	.371154	.369728
0.4	.368270	.366782	.365263	.363714	.362135	.360527	.358890	.357225	.355533	.353812
0.5	.352065	.350292	.348493	.346668	.344818	.342944	.341046	.339124	.337180	.335213
0.6	.333225	.331215	.329184	.327133	.325062	.322972	.320864	.318737	.316593	.314432
0.7	.312254	.310060	.307851	.305627	.303389	.301137	.298872	.296595	.294305	.292004
0.8	.289692	.287369	.285036	.282694	.280344	.277985	.275618	.273244	.270864	.268477
0.9	.266085	.263688	.261286	.258881	.256471	.254059	.251644	.249228	.246809	.244390
Z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.0	.241971	.239551	.237132	.234714	.232297	.229882	.227470	.225060	.222653	.220251
1.1	.217852	.215458	.213069	.210686	.208308	.205936	.203571	.201214	.198863	.196520
1.2	.194186	.191860	.189543	.187235	.184937	.182649	.180371	.178104	.175847	.173602
1.3	.171369	.169147	.166937	.164740	.162555	.160383	.158225	.156080	.153948	.151831
1.4	.149727	.147639	.145564	.143505	.141460	.139431	.137417	.135418	.133435	.131468
1.5	.129518	.127583	.125665	.123763	.121878	.120009	.118157	.116323	.114505	.112704
1.6	.110921	.109155	.107406	.105675	.103961	.102265	.100586	.098925	.097282	.095657
1.7	.094049	.092459	.090887	.089333	.087796	.086277	.084776	.083293	.081828	.080380
1.8	.078950	.077538	.076143	.074766	.073407	.072065	.070740	.069433	.068144	.066871
1.9	.065616	.064378	.063157	.061952	.060765	.059595	.058441	.057304	.056183	.055079
Z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2.0	.053991	.052919	.051864	.050824	.049800	.048792	.047800	.046823	.045861	.044915
2.1	.043984	.043067	.042166	.041280	.040408	.039550	.038707	.037878	.037063	.036262
2.2	.035475	.034701	.033941	.033194	.032460	.031740	.031032	.030337	.029655	.028985
2.3	.028327	.027682	.027048	.026426	.025817	.025218	.024631	.024056	.023491	.022937
2.4	.022395	.021862	.021341	.020829	.020328	.019837	.019356	.018885	.018423	.017971
2.5	.017528	.017095	.016670	.016254	.015848	.015449	.015060	.014678	.014305	.013940
2.6	.013583	.013234	.012892	.012558	.012232	.011912	.011600	.011295	.010997	.010706
2.7	.010421	.010143	3z98712	3z96058	3z93466	3z90936	3z88465	3z86052	3z83697	3z81398
2.8	3z79155	3z76965	3z74829	3z72744	3z70711	3z68728	3z66793	3z64907	3z63067	3z61274
2.9	3z59525	3z57821	3z56160	3z54541	3z52963	3z51426	3z49929	3z48470	3z47050	3z45666

$N(0.1)$ -ის განაწილების ფუნქციის ($\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$) მნიშვნელობები



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500	**0.33**	0.629	**0.66**	0.745	**0.99**	0.838	**1.32**	0.906	**1.65**	0.950
0.01	0.503	**0.34**	0.633	**0.67**	0.748	**1.00**	0.841	**1.33**	0.908	**1.66**	0.951
0.02	0.507	**0.35**	0.636	**0.68**	0.751	**1.01**	0.843	**1.34**	0.909	**1.67**	0.952
0.03	0.511	**0.36**	0.640	**0.69**	0.754	**1.02**	0.846	**1.35**	0.911	**1.68**	0.953
0.04	0.515	**0.37**	0.644	**0.70**	0.758	**1.03**	0.848	**1.36**	0.913	**1.69**	0.954
0.05	0.519	**0.38**	0.648	**0.71**	0.761	**1.04**	0.850	**1.37**	0.914	**1.70**	0.955
0.06	0.523	**0.39**	0.651	**0.72**	0.764	**1.05**	0.853	**1.38**	0.916	**1.71**	0.956
0.07	0.527	**0.40**	0.655	**0.73**	0.767	**1.06**	0.855	**1.39**	0.917	**1.72**	0.957
0.08	0.531	**0.41**	0.659	**0.74**	0.770	**1.07**	0.857	**1.40**	0.919	**1.73**	0.958
0.09	0.535	**0.42**	0.662	**0.75**	0.773	**1.08**	0.859	**1.41**	0.920	**1.74**	0.959
0.10	0.539	**0.43**	0.666	**0.76**	0.776	**1.09**	0.862	**1.42**	0.922	**1.75**	0.959
0.11	0.543	**0.44**	0.670	**0.77**	0.779	**1.10**	0.864	**1.43**	0.923	**1.76**	0.960
0.12	0.547	**0.45**	0.673	**0.78**	0.782	**1.11**	0.866	**1.44**	0.925	**1.77**	0.961
0.13	0.551	**0.46**	0.677	**0.79**	0.785	**1.12**	0.868	**1.45**	0.926	**1.78**	0.962
0.14	0.555	**0.47**	0.680	**0.80**	0.788	**1.13**	0.870	**1.46**	0.927	**1.79**	0.963
0.15	0.559	**0.48**	0.684	**0.81**	0.791	**1.14**	0.872	**1.47**	0.929	**1.80**	0.964
0.16	0.563	**0.49**	0.687	**0.82**	0.793	**1.15**	0.874	**1.48**	0.930	**1.81**	0.964
0.17	0.567	**0.50**	0.691	**0.83**	0.796	**1.16**	0.876	**1.49**	0.931	**1.82**	0.965
0.18	0.571	**0.51**	0.694	**0.84**	0.799	**1.17**	0.879	**1.50**	0.933	**1.83**	0.966
0.19	0.575	**0.52**	0.698	**0.85**	0.802	**1.18**	0.881	**1.51**	0.934	**1.84**	0.967
0.20	0.579	**0.53**	0.701	**0.86**	0.805	**1.19**	0.882	**1.52**	0.935	**1.85**	0.967
0.21	0.583	**0.54**	0.705	**0.87**	0.807	**1.20**	0.884	**1.53**	0.936	**1.86**	0.968
0.22	0.587	**0.55**	0.708	**0.88**	0.810	**1.21**	0.886	**1.54**	0.938	**1.87**	0.969
0.23	0.590	**0.56**	0.712	**0.89**	0.813	**1.22**	0.888	**1.55**	0.939	**1.88**	0.969
0.24	0.594	**0.57**	0.715	**0.90**	0.815	**1.23**	0.890	**1.56**	0.940	**1.89**	0.970
0.25	0.598	**0.58**	0.719	**0.91**	0.818	**1.24**	0.892	**1.57**	0.941	**1.90**	0.971
0.26	0.602	**0.59**	0.722	**0.92**	0.821	**1.25**	0.894	**1.58**	0.942	**1.91**	0.971
0.27	0.606	**0.60**	0.725	**0.93**	0.823	**1.26**	0.896	**1.59**	0.944	**1.92**	0.972
0.28	0.610	**0.61**	0.729	**0.94**	0.826	**1.27**	0.897	**1.60**	0.945	**1.93**	0.973
0.29	0.614	**0.62**	0.732	**0.95**	0.828	**1.28**	0.899	**1.61**	0.946	**1.94**	0.973
0.30	0.617	**0.63**	0.735	**0.96**	0.831	**1.29**	0.901	**1.62**	0.947	**1.95**	0.974
0.31	0.621	**0.64**	0.738	**0.97**	0.833	**1.30**	0.903	**1.63**	0.948	**1.96**	0.975
0.32	0.625	**0.65**	0.742	**0.98**	0.836	**1.31**	0.904	**1.64**	0.949	**1.97**	0.975



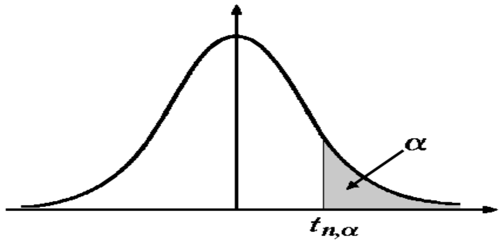
$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ფუნქციის ცხრილები

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

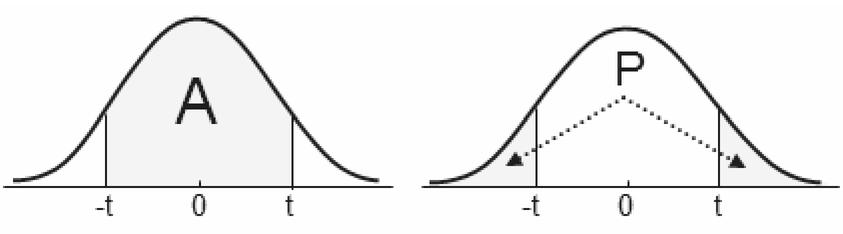
t (სტიუდენტის) განაწილების ზედა α -კრიტიკული წერტილები ($t_{n,\alpha}$)



	α						
n	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	127.321	318.289
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.328
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.894
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467

25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385

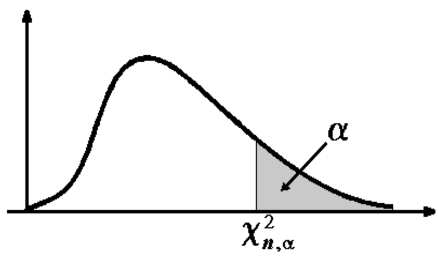
t განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილები $t_{n,\alpha/2}$ (ორკუდიანი)



n	**A** α	**0.80** **0.20**	**0.90** **0.10**	**0.95** **0.05**	**0.98** **0.02**	**0.99** **0.01**	**0.995** **0.005**	**0.998** **0.002**	**0.999** **0.001**
1		3.078	6.314	12.706	31.820	63.657	127.321	318.309	636.619
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	3.833	4.501	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14		1.345	1.761	2.145	2.625	2.977	3.326	3.787	4.140

15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16		1.337	1.746	2.120	2.584	2.921	3.252	3.686	4.015
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.090	3.467	3.745
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
∞		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

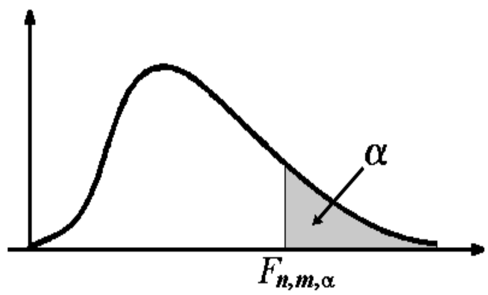
χ^2 (ხი კვადრატ) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($\chi^2_{n,\alpha}$)



	α										
n	**0.995**	**0.975**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.002**	**0.001**
1	0.000039	0.00098	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	9.550	10.828
2	0.0100	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	12.429	13.816
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	16.924	18.467
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086	16.750	18.907	20.515
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	20.791	22.458
7	0.989	1.690	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	22.601	24.322
8	1.344	2.180	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	24.352	26.124
9	1.735	2.700	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	26.056	27.877
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	27.722	29.588
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	29.354	31.264
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	30.957	32.909

13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	32.535	34.528
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	34.091	36.123
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	35.628	37.697
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	37.146	39.252
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	38.648	40.790
18	6.265	8.231	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	40.136	42.312
19	6.844	8.907	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	41.610	43.820
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	43.072	45.315
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	44.522	46.797
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	45.962	48.268
23	9.260	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	47.391	49.728
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.559	48.812	51.179
25	10.520	13.120	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	50.223	52.620
26	11.160	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	51.627	54.052
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645	53.023	55.476
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	54.411	56.892
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	55.792	58.301
30	13.787	16.791	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	57.167	59.703
31	14.458	17.539	37.359	41.422	44.985	48.232	49.226	52.191	55.003	58.536	61.098
32	15.134	18.291	38.466	42.585	46.194	49.480	50.487	53.486	56.328	59.899	62.487
33	15.815	19.047	39.572	43.745	47.400	50.725	51.743	54.776	57.648	61.256	63.870
34	16.501	19.806	40.676	44.903	48.602	51.966	52.995	56.061	58.964	62.608	65.247
35	17.192	20.569	41.778	46.059	49.802	53.203	54.244	57.342	60.275	63.955	66.619

$F(n,m)$ (ფიშერის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($F_{n,m,\alpha}$)



	n $\alpha = 0.1$								
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**15**	**20**
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.240	58.906	60.195	61.220	61.740
2	8.5264	8.9999	9.1618	9.2434	9.2926	9.3491	9.3915	9.4248	9.4413
3	5.5384	5.4624	5.3907	5.3426	5.3092	5.2661	5.2304	5.2003	5.1845
4	4.5448	4.3245	4.1909	4.1073	4.0505	3.9790	3.9198	3.8704	3.8443
5	4.0605	3.7798	3.6194	3.5202	3.4530	3.3679	3.2974	3.2379	3.2067

7	3.5895	3.2575	3.0740	2.9605	2.8833	2.7850	2.7025	2.6322	2.5947
10	3.2850	2.9244	2.7277	2.6054	2.5216	2.4139	2.3226	2.2434	2.2007
15	3.0731	2.6951	2.4898	2.3615	2.2729	2.1582	2.0593	1.9722	1.9243
20	2.9746	2.5893	2.3801	2.2490	2.1582	2.0397	1.9368	1.8450	1.7939
30	2.8808	2.4887	2.2761	2.1423	2.0493	1.9269	1.8195	1.7222	1.6674
60	2.7911	2.3932	2.1774	2.0409	1.9457	1.8194	1.7070	1.6034	1.5435

	$n \quad \alpha = 0.05$								
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**15**	**20**
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	236.77	241.88	245.95	248.01
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.353	19.396	19.429	19.446
3	10.128	9.5522	9.2766	9.1172	9.0135	8.8867	8.7855	8.7028	8.6602
4	7.7086	6.9443	6.5915	6.3882	6.2560	6.0942	5.9644	5.8579	5.8026
5	6.6078	5.7862	5.4095	5.1922	5.0504	4.8759	4.7351	4.6187	4.5582
7	5.5914	4.7375	4.3469	4.1202	3.9715	3.7871	3.6366	3.5108	3.4445
10	4.9645	4.1028	3.7082	3.4780	3.3259	3.1354	2.9782	2.8450	2.7741
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7066	2.5437	2.4035	2.3275
20	4.3512	3.4928	3.0983	2.8660	2.7109	2.5140	2.3479	2.2032	2.1241
30	4.1709	3.3159	2.9223	2.6896	2.5336	2.3343	2.1646	2.0149	1.9317
60	4.0012	3.1505	2.7581	2.5252	2.3683	2.1666	1.9927	1.8365	1.7480

$F(n,m)$ (ფიშერის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($F_{n,m,\alpha}$)

	$n \quad \alpha = 0.01$								
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**15**	**20**
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5928.4	6055.8	6157.3	6208.7
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.356	99.399	99.433	99.449
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.672	27.229	26.872	26.690
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	14.976	14.546	14.198	14.020
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.455	10.051	9.7222	9.5526
7	12.246	9.5467	8.4513	7.8466	7.4605	6.9929	6.6201	6.3143	6.1554
10	10.044	7.5594	6.5523	5.9944	5.6363	5.2001	4.8492	4.5582	4.4055
15	8.6831	6.3588	5.4169	4.8932	4.5557	4.1416	3.8049	3.5223	3.3719
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4306	4.1027	3.6987	3.3682	3.0880	2.9377

30	7.5624	5.3903	4.5098	4.0179	3.6990	3.3046	2.9791	2.7002	2.5486
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6491	3.3388	2.9530	2.6318	2.3522	2.1978

	n $\alpha = 0.005$								
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**15**	**20**
1	16211	19999	21615	22500	23056	23715	24224	24630	24836
2	198.50	199.00	199.17	199.25	199.30	199.36	199.40	199.43	199.45
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.434	43.686	43.085	42.777
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.622	20.967	20.438	20.167
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.200	13.618	13.146	12.903
7	16.235	12.404	10.882	10.050	9.5221	8.8853	8.3803	7.9677	7.7539
10	12.826	9.4270	8.0807	7.3428	6.8723	6.3025	5.8467	5.4706	5.2740
15	10.798	7.7007	6.4760	5.8029	5.3721	4.8473	4.4235	4.0697	3.8826
20	9.9439	6.9865	5.8176	5.1744	4.7616	4.2569	3.8470	3.5020	3.3178
30	9.1796	6.3547	5.2387	4.6233	4.2275	3.7416	3.3439	3.0058	2.8231
60	8.4946	5.7950	4.7290	4.1399	3.7599	3.2911	2.9042	2.5705	2.3872

	n $\alpha = 0.025$									
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.847	937.111	948.216	956.656	963.284	968.627
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602

დანართი 4 (ამოცანების პასუხები)

ალბათობის თეორია

თავი I

1. ა) $\{7,14,21,28,35,42,49\}$; $\{-3,2\}$; ბ) $\{\text{გ}1,...,\text{გ}6,\text{ს}1,...,\text{ს}6\}$; გ) {ჩრდილოეთ ამერიკა, სამხრეთ ამერიკა, ევროპა, აზია, ავსტრალია, ანტარქტიდა}; დ) $\varnothing$.

3. $A=C$.

5. ა) $\Omega=\{\text{გგ, გს, ს1, ს2, ს3, ს4, ს5, ს6}\}$; ბ) $A=\{\text{ს1, ს2, ს3}\}$;

გ) $\Omega=\varnothing$.

7.

ა) $\Omega=\{MMMM, MMMF, MMFM, MFMM, FMMM, MMFF, MFMF, MFFM,$
$FMFM, FFMM, FMMF, MFFF, FMFF, FFMF, FFFM, FFFF\}$;

ბ) $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

9. ა) $A\cup C=\{0,2,3,4,5,6,8\}$; ბ) $A\cap B=\varnothing$; გ) $\overline{C}=\{0,1,6,7,8,9\}$;

დ) $(\overline{C}\cap D)\cup B=\{1,3,5,6,7,9\}$; ე) $\overline{(\Omega\cap C)}=\{0,1,6,7,8,9\}$;

ვ) $A\cap C\cap\overline{D}=\{2,4\}$.

11. $A\cup B=\{z : z<9\}$; $A\cap B=\{z : 1<z<5\}$.

13. ა) $\{3,4,...,18\}$; ბ) $[0,1]\times[0,1]$; გ) $\{\text{ქ}, \text{კ}\}\times\{0,1,2,...\}$; დ) $\{(i,j) : 1\le i<j\le 10\}$; ე) $[0,20]$.

15. ა) B_1; ბ) $\overline{B_1}B_2B_3$; გ) $\cap_{k=1}^{7} B_k$; დ) $B_5B_6\overline{B_7}\cup B_5\overline{B_6}B_7\cup\overline{B_5}B_6B_7$; ე) $B_1B_2B_3\overline{B_4}\,\overline{B_5}\,\overline{B_6}\,\overline{B_7}$. **17.** 216. **19.** $\varnothing$; Ω. **23.** არა. **25. ა)** $A\cup B$; ბ) $A\cap B$; გ) $A\cup B$; დ) $A\cap B$; ე) $A\cap B$; ვ) $A\cup B$; ზ) $A\cap B$; თ) A; ი) $\overline{(A\cap B)}$; კ) $\overline{B}$; ლ). $\overline{(B\cup A)}$; მ). $\overline{B}$. **27. ა)** 1/56; ბ) 15/56; გ) 15/28; დ) 5/28. **29. ა)** 1/2; ბ) 3/8; გ) 1/8; დ) 1/2. **31. ა)** 5/16; ბ) 11/16; გ) 15/16; დ) 1/16. **33. ა)** 15/32; ბ) 1/2; გ) 15/32; დ) 15/32. **37.** ყველა შემთხვევაში 11/36. **39.** ორივე ტოლია 1/2-ის. **41.** ორივე ტოლია 1/3-ის. **43. ა)** 1/9; ბ) 5/9; გ) 5/12; დ) 11/36; ე) 1/6. **45.** 91/216. **47.** 125/216. **49.** ა) $0.5-p$; ბ) $1-2p$; გ) p.

55. ა) $50/100+33/100+20/100-16/100-20/100-8/100+8/100=0.67$;
ბ) $P(:i)+P(:j)+P(:k)-P(:i,j)-P(:i,k)-P(:j,k)+P(:i,j,k)$.
57. 9/19; 10/19. **59.** 9/10; 1/10. **61.** 1/9; 1/12. **63.** 245/354. **65.** 1/4; 83/1000. **67.** 1/3; 2/15; 8/15; 13/15; 3/5. **69.** 9/25; 4/25; 12/25; 21/25; 3/5. **71.** 37/56; 16/37. **75.** 1/9. **77.** 0.6; 1/3. **79.** $(a-2r)^2/a^2$.
81. $(1+3\ln 2)/8 \approx 0.38$.

თავი II

1. 9! = 362880 . **3.** 6! = 720. **5.** $A_6^4 = 360$. **7.** $A_{20}^3 = 6840$. **9.** $5^{10} = 9765625$. **11.** $9\cdot 10^4 \cdot 5 = 450000$.

13. დიახ, $33^3 = 35937 < 35938$. **15.** $C_{12}^3 = 220$.

17. $12!/(6!4!2!) = 13860$. **19.** $C_{10}^3 = 120$. **21.** $C_{10}^2 \cdot C_{50}^5 = 95344200$.

23. $8!/(3!2!) = 3360$. **25.** $5\cdot 18 = 90$. **27.** $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 9\cdot A_9^4 = 27216$.

29. $C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 = 163800$. **31.** ა) $n \le 6$, ბ) $n \ge 6$. **35.** 756. **37.** $n(n-1)/2 = 55, n = 11$. **39.** $3\cdot 3! = 18$. **41.** $n = 6$.

43. $C_{10}^3 \cdot C_6^2 = 135$. **45.** $33^3 \cdot 10^3 \approx 36\cdot 10^6$.

47. ა) $33\cdot 32\cdot 31\cdot 10^3/33^3\cdot 10^3$; ბ) $33^3\cdot 10\cdot 9\cdot 8/33^3\cdot 10^3$; გ) $33\cdot 10^3/33^3\cdot 10^3$; დ) $33^3\cdot 5^3/33^3\cdot 10^3$;
ე) $33\cdot 32\cdot 31\cdot 10/33^3\cdot 10^3$. **49.** 48. **51.** 20.

53. 4200 (სქემა 3-3-4: $C_{10}^3 \cdot C_7^3$). **55.** 35. **57.** 56. **61.** 24. **63.** 10!/(2!3!3!)=50400. **65.** 100, 48, 48. **67.** 4!3!=144.

69. 7!/(2!3!2!)=210. **71.** 3654. **73.** $C_9^5 \cdot C_9^3 \cdot C_9^3 \cdot C_9^2 = 32006016$.

75. ა) $C_7^3 \cdot C_3^2 = 105$; ბ) $C_7^3 \cdot C_3^2 + C_7^2 \cdot C_3^3 = 126$; გ) $C_7^5 \cdot C_3^0 + C_7^4 \cdot C_3^1 = 168$.

77. $\Omega = \{10, 25, 100\}$; 7/10, 1/5, 1/10; 9/10; 3/10.

81. ა) $1/C_n^j$; ბ) $2/C_n^j$; გ) $(n-j+1)/C_n^j$.

83. ა) $C_5^4 \cdot C_{39}^1 \cdot C_{43}^1/(C_{44}^5 \cdot C_{44}^1) = 0.00018$; ბ) $C_5^3 \cdot C_{39}^2 \cdot C_1^1/(C_{44}^5 \cdot C_{44}^1) = 0.00016$.

85. mA_n^{k-1}/A_{n+m}^k. **87.** ა) 1/9; ბ) 1/6.

89. ა) $C_1^1 \cdot C_7^2/C_8^3 = 3/8$; ბ) $C_2^2 \cdot C_3^1/C_8^3 = 9/28$.

91. 1/720. **93.** $C_4^2 \cdot C_{48}^{24}/C_{52}^{26} \approx 0.39$; $(C_{48}^{26} + C_{48}^{22})/C_{52}^{26} \approx 0.11$;
$(C_4^1 \cdot C_{48}^{25} + C_4^3 \cdot C_{48}^{23})/C_{52}^{26} \approx 0.499$. **95.** ა) 1/9; ბ) 1/6.

97. ა) $C_1^1 \cdot C_7^2/C_8^3 = 3/8$; ბ) $C_2^2 \cdot C_3^1/C_8^3 = 9/28$.

99. ა) 0.9; ბ) 0.6; გ) 0.5; დ) 0.4.

101. $A_{30}^5/30^5 \approx 0.7037$. **103.** $1\cdot 2^4 \cdot 2/3^6 \approx 0.0439$.

105. $C_6^6/C_{10}^6=1/210$; $C_6^4\cdot C_4^2/C_{10}^6=3/7$; 1-1/210=209/210.

107. $C_5^4\cdot C_4^3\cdot C_2^1/C_{10}^7=0.25$.

109. $(C_{10000}^4\cdot C_{500000}^1+C_{10000}^5)/C_{500000}^5\approx 0.0000011$.

111. ა) 0.0001; ბ) 0.9999; გ) 0.198; დ) 0.1981. **113.** ა) 33/221; ბ) 46/221. **117.** $1-C_n^0\cdot 0.01^0\cdot 0.99^n\geq 0.95$, $n\geq \log_{0.99}^{0.05}\approx 298$.

119. ა) 0.04; ბ) 0.96; გ) 0.42. **121.** ა) 0.35; ბ) 0.875; გ) 0.55.

123. 2/9. **125.** $C_3^1\cdot 0.515\cdot 0.485^2\cdot 0.515\approx 0.187$.

127. **1**. **129.** 1. **131.** დამოუკიდებულია.

133. $0.8\cdot(0.7+0.6-0.7\cdot 0.6)=0.704$.

135. $1\cdot(C_6^3/C_9^3)\cdot(C_3^3/C_9^3)\approx 0.0028$.

137. $p+(1-p)p=2p-p^2$. **138.** 2/9.

139. I – $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots=\frac{2}{3}$;

II – $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots=\frac{1}{3}$.

თავი III

3. ა) 2/3, 0; ბ) 1/2, 1/6; გ) 5/6, 0; დ) 1, 5/9; ე) 5/6, 1/4; ვ) 3/4, 1/3. **5. ა)** 1/3, არა; ბ) 1/6, კი; გ) 1/2, არა; დ) 2/5, არა; ე) 1/6, კი; ვ) 1, არა. **11.** 0.986. **13.** ა) 0.9; ბ) 0.6; გ) 0.5; დ) 0.4. **15.** ა) 2/11; ბ) 6/25; გ) 5/14. **17.** ა) 0.04; ბ) 0.96; გ) 0.42. **19.** ა) 0.35; ბ) 0.875; გ) 0.55. **21.** არა; $0<P(A)<1$ და $B=A$. **23.** ა) ჭეშმარიტია; ბ) მცდარია; გ) ჭეშმარიტია; დ) ჭეშმარიტია თუ $P(A)<1$. **25.** 0; 1/2; 1. **27.** $n=7$. **31.** ა) $(1/2)^5$; ბ) $(5/9)^5$; გ) $(2/3)^5$. **35.** $(4/5)^3=0.512$. **37.** ა) 8/15; ბ) $((2n-2)(2n-4)\cdots 2)/((2n-1)(2n-3)\cdots 1)$.

39. $3\cdot((2/3)^5-(1/3)^5)=0.38$. **41.** $1-(1-p^2)^2$; $(1-(1-p)^2)^2$.

43. 4, $1-(5/6)^4\approx 0.52$. **45.** $6\times(1/6)^n$; $C_6^2((2/6)^n-2\times(1/6)^n)$. **47.** 3/20; 9/35; 7/12. **49.** 1/5; 5/13; 17/25; 1/2; 21/25. **51.** 0.196; 0.288.

53. 10 ან 15.

თავი IV

1. 99.4%. **3.** ა) $2\cdot 0.4\cdot 0.11=0.09$;

ბ) $0.45\cdot(1-0.45)+(0.4+0.11)\cdot(0.45+0.04)+0.04\cdot(1-0.04)=0.54$;

გ) $1-0.09=0.91$; დ) 0.38. **5.** ა) $1/2$; ბ) $1/(1+2p)$. **7.** $0.8\times 0.05/0.135=0.296$. **9.** ა) 1/3; ბ) 1/2. **11.** ა) $0.9^2=0.81$; ბ) $(9/11)\times(18/19)=0.775$.

13. $0.99\cdot 0.001/(0.99\cdot 0.001+0.01\cdot 0.999)=0.09$.

15. ა) $p^2+r(1-p)$; ბ) $1-(1-r)(1-p)$; გ) $(1-p)p/((1-p)(p+1-r))$.

17. ა) 0.158; ბ) 0.316; გ) 0.526.

19. ა) 0.031; ბ) 0.557; გ) 0.412. **21.** ა) 0.06; ბ) 0.94. **23.** ა) 38/63; ბ) 16/25. **25.** ა) 125/512; ბ) 19/64; გ) 135/512; დ) 45/64.

27. ა) 1/3; ბ) 3/10. **29.** ა) 109/2000; ბ) 19/109.

31. 0.984. **33.** 0.016. **35.** 3/8. **37.** 5/16. **39.** 11/27. **41.** 0.853.

43. 475. **45.** ა) 0.11; ბ) 0.08; გ) 0.92; დ) 0.92; ე) 0.5; ვ) 0.08; ზ) 0.025.

47. ა) 0.125; ბ) 0.656; გ) 0.986; დ) 0.735.

49. 4-ჯერ. **51.** 2/9. **53.** ა) $1-(1-p)^{10}$; ბ) $10p(1-p)^9$; გ) $45p^2(1-p)^8$.

55. 0.302. **57.** 4-დან 3. **59.** 1/46. **61.** $n\geq 70$.

63. $\{\sum_{k=0}^{n} C_{10}^{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{10-k}\}^2 \geq 95/100$, $n=8$.

65. $191\leq n\leq 197$. **67.** 23. **69.** ა) 0.0101; ბ) 0.1089; გ) 0.2541.

71. 0.9596. **73.** ა) 0.1353; ბ) 0.8572.

75. 0.75; 0.8. **77.** 0.24; 0.42; 0.706. **79.** 2/5; 4/15; 1/8. **81.** 1/2; 5/11. **83.** $5p$; $4p$. **85.** 0.25; 0.0577; 0.1057; 0.6676. **87.** 3/7. **89.** 0.32; 0.56. **93.** 8/23. **95.** 1/5; 1/3. **97.** 183/250; 44/183. **99.** 1/6. **101.** 5/324. **103.** 1/8; 3/8; 8/9. **105.** 0.8; 0.56. **107.** 0.5. **109.** 0.52.

თავი V

1. ა) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36. **3.** 0, 1, 2 – 1/10, 3/5, 3/10. **25.** 130; 40; 120; 160; 360. **27.** 12; 31; 34; 18; 5; 0. **33.** 0,1, 2, 3, 4 – 0.04, 0.24, 0.44, 0.24, 0.04; 2; 0.8. **35.** 7/3; 0.745. **37.** $E(A)=95000$, $E(B)=115000$; B. **39.** 0.2; 2.8, 1.4. **41.** 1, 2, 3, 4 – 1/6, 5/36, 25/216, 125/216; 1.172; 0.5177. **43.** 0, 1, 2 – 1/3, 8/15, 2/15; 0.8. **47.** 2.734. **49.** 3.5-ჯერ. **51.** ა) 8; ბ) 4.5. **53.** 0.938. **55.** 2. **59.** 1.2; 0.72. **61.** 0.48. **63.** 0; n. **65.** 2.4; 1.99. **67.** ა) $-a$, b; ბ) $-a-1$, b; გ) $2a-5$, $4b$. **69.** $3n/8$; $15n/64$; $3/8$; $15/64n$.

71. $ak/(a+b)$; $abk(a+b-k)/(a+b)^2(a+b-1)$.

73. l. **75.** 1.54.

თავი VI

1. $Bi(10,1/6)$: $P_{10}(4)$; $P_{10}(5)$; $P_{10}(6)$. **3.** 0.0819; 0.0154; 0.0001; 1.2. **5.** 0.2119; 0.4728; 0.0498; 4.05. **7.** 0.6123; 0.3877. **9.** 0.6496. **11.** 0.1143. **13.** 0.2039; 7. **15.** $Bi(10,0.15)$; 1.5; 1. **17.** 0.224; 0.1991; 0.5768. **19.** 0.7787; 0.6916; 0..209. **21.** 0.0821; 0.5162. **23.** 0.0067; 49.9წმ. **25.** კი; არა; კი. **27.** 0.29, 0.39, 0.16, 0.13, 0.03; 1.23, 1.21, პუასონი გამოსადეგია; 0.29, 0.36, 0.22, 0.09, 0.03; პუასონი მისაღებია.

29. 0.0472; 0.162. **31.** 2.56; 122.9. **33.** 0, 1, 2, 3 – 4324/5525, 1128/5525, 72/5525, 1/5525. **35.** 0.58. **37.** 0.615. 0.615.

39. 0.79; გამოძახებები უნდა შემოდიოდეს შემთხვევით, დამოუკიდებლად, თითო-თითოდ და მუდმივი ინტენსივობით.

41. 2; 0.135; 0.188. **43.** 0.067; 0.286. **45.** 0.2381.

თავი VII

1. 1/4; 1/16; 3/16. **3.** 1/15; 11/40. **5.** 400; 4/5; 1/3; 1/9; 8/27.

7. 2.38; 2.73; 1.89. **9.** --; $2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 2; $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

11. 1. **13.** 9/4, 27/80. **15.** --; 8/3, 32/9. **17.** --; 15, 75.

19. 0; 0.5; 0.5; 0. **21.** $\cos x\chi_{(0,\pi/2]}(x)$. **23.** $F(x)=0,\ x\le 0; 1-\cos x,\ 0<x\le\pi/2;$. $1,\ x>\pi/2$. **25.** $\frac{1}{6}\chi_{[2,8]}(x)$; $\sqrt{3}$. **27.** $\sqrt{2}/4$.

29. $\sqrt{2}/4$. **31.** 0.0498.

თავი VIII

1. 0.8907; 0.9932; 0.5636; 0.1075; 0.0087; 0.2776; 0.9664; 0.0197; 0.5279; 0.0336; 0.0029; 0.4168. **3.** 0.4399; 1.1750; 2.0537; 1.0364; 0.2275; 1.1750; 2.3263; 0.7722; -2. 3263; -1.8808; -1.0364; 0.

5. 0.9522; 0.0098; 0.7475; 0.0038. **7.** 0.0668. **9.** 54.27; 40.31; 52.22; 41.80. **11.** 41.6; 29.9; 37.4; 31.7. **13.** 65.0. **15.** 9.51; 0.298. **17.** 0.2094; 0.0086; 0.1788; 0.6405; 105; 4; 89; 320. **19.** 0.0049; 0.1943; (80, 100). **21.** 0.614; 20.9, 16.3; 17. **23.** 0.041 კგ; 0.054. **25.** 49.1; 13.4. **27.** 1/8; 0.141; 4/3. **29.** $f_U(x)=1/2$, თუ $x\in[0.5, 2.5]$, და =0 სხვაგან; 3/2; 1/3. **31.** 1/4; 1.6; 0.107; 1.68; 0.697; 0.351. **33.** 0.921. **35.** 0.957. **37.** ბუნებრივი: 0.936>0.928. **39.** 18.94. **41.** 47; 15. **43.** 6.82; 0.444. **45.** 0.5858. **47.** 3/2; $2^{2/3}$. **49.** 1.082. **51.** $f_\xi(x)=\cos x$, თუ $0\le x\le\pi/2$, =0 სხვაგან; $\pi/6$. **53.** 9.161; 1.827. **55.** 58.69; 3.41;

ერეკლესათვის (0.0334>0.0083); 0.119. **57.** 1.632; 0.312; 0.775; 6587. **59.** 5/21; 0.443.

თავი IX

1. 0.00012. **3.** ≈ 80. **5.** 0.0017. **7.** 0.036. **9.** 0.009. **11.** 55. **13.** 0.985. **15.** 86. **17.** 583. **19.** 0.131. **21.** 0.929. **23.** 384.2≈385. **25.** $\le 1/4$; $\le 1/9$.
27. ≥0.909. **29.** არა. **31.** 0.5586; [-0.0484, 0.1084]. **33.** [1248, 1312].
35. 0.0456.