ალბათურ–სტატისტიკური მცირე ცნობარი

ლექცია – შესავალი ალბათობის თეორიაში

ნამრავლის პრინციპი

თუ პირველი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n სხვადასხვა გზით და თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია m სხვადასხვა გზით, მაშინ ობიექტთა წყვილის შერჩევა შესაძლებელია nm სხვადასხვა გზით.

პირველი ტიპის ობიექტები იყოს $a_1, a_2, ..., a_n$, მეორე ტიპის კი $b_1, b_2, ..., b_m$. ამოვწეროთ ყველა წყვილი, სადაც პირველი წევრია a_1, შემდეგ ყველა წყვილი სადაც პირველი წევრია a_2, და ა. შ. ყველა წყვილი სადაც პირველი წევრია a_n:

$$\begin{array}{c}
(a_1,b_1)\,,\ (a_1,b_2)\,,\ .\ .\ .\ .\,,\ (a_1,b_m) \\
(a_2,b_1)\,,\ (a_2,b_2)\,,\ .\ .\ .\ .\,,\ (a_2,b_m) \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
(a_n,b_1)\,,\ (a_n,b_2)\,,\ .\ .\ .\ .\,,\ (a_n,b_m)
\end{array}$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატრიცის ფორმის გამოსახულება, სადაც m სტრიქონია და n სვეტი. შესაბამისად ასეთი წყვილების რაოდენობაა mn.

წყობა

წყობები – ეს არის m ელემენტიანი კომბინაციები n განსხვავებული ელემენტის მქონე სიმრავლიდან, რომელებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან ელემენტების შემადგენლობით ან ელემენტების განლაგების რიგით. $A_n^m = n!/(n-m)!$.

n ელემენტიანი სიმრავლიდან პირველი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია $n = n-1+1$ განსხვავებული გზით, მას შემდეგ რაც შეირჩა პირველი ობიექტი მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია $n-1 = n-2+1$ განსხვავებული გზით, და ა. შ. მე-m-ე (№m) ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია $n-m+1$ განსხვავებული გზით. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, n ელემენტიანი სიმრავლის დალაგებულ m ელემენტიანი ქვესიმრავლეთა რაოდენობა იქნება:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

გადანაცვლებები – ეს არის კომბინაციები, რომლებიც შედგენილია მოცემული n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა n ელემენტისაგან და ერთამანეთისაგან განხსვავდება მხოლოდ ელემენტების განლაგების რიგით: $P_n = A_n^n = n!$

ჯუფდება

ჯუფდებები – ეს არის n ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიანი (დაულაგებელი) ქვესიმრავლეები. $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$.

ავიღოთ n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა m ელემენტიანი ქვესიმრავლე, მათი რაოდენობა აღვნიშნოთ სიმბოლოთი C_n^m. თუ ახლა თითოეულ m ელემენტიან სიმრავლეში მოვახდენთ ყველა შესაძლო გადანაცვლებებს (მათი რაოდენობა შეადგენს $P_m = m!$-ს), მივიღებთ, რომ n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა დალაგებულ m ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა იქნება $C_n^m \cdot m!$. მეორეს მხრივ, ეს რაოდენობა არის წყობა A_n^m. შესაბამისად, ცხადია, რომ $C_n^m \cdot m! = A_n^m$. საიდანაც გვაქვს:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე

ნებისმიერი თეორია აუცილებლად გულისხმობს ზოგიერთ გამარტივებას. ჩვენი პირველი გამარტივება ეხება “ცდის” ან “დაკვირვების” შესაძლო შედეგებს. მათემატიკური თეორიის შესასწავლი ობიექტები შეიძლება იყვნენ მხოლოდ ეს შესაძლებელი შედეგები. თუ ჩვენ გვინდა ავაგოთ ცდის აბსტრაქტული მოდელი, ჩვენ თავიდან უნდა დავადგინოთ რას წარმოადგენს გამარტივებული (იდეალიზებული) ცდის შესაძლო შედეგი. ტერმინოლოგიის ერთიანობისათვის ექსპერიმენტის (ცდის) ან დაკვირვების შედეგებს უწოდებენ *ხდომილებებს.*

განვიხილოთ ექსპერიმენტი, რომლის ყველა შესაძლო შედეგი ამოიწურება N სხვადასხვა მნიშვნელობით $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$. ეს მნიშვნელობები არ არის აუცილებლად რიცხვითი და მათი ფიზიკური ბუნება არ არის არსებითი.

განმარტება 1. ექსპერიმენტის ცალკეულ შესაძლო შედეგებს *ელემენტარული ხდომილებები* ეწოდება, ხოლო მათ ერთობლიობას – *ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე* და აღინიშნება Ω ასოთი: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$.

მოვიყვანოთ მაგალითები:

I. მონეტის ერთხელ აგდებისას -- $\Omega =$ {გ, ს};

II. მონეტის ორჯერ აგდებისას, ან ორი მონეტის ერთდროულად აგდებისას -- $\Omega =$ {გგ, გს, სგ, სს};

III. მონეტის სამჯერ აგდებისას, ან სამი მონეტის ერთდროულად აგდებისას -- $\Omega =$ {გგგ, გგს, გსგ, სგგ, გსს, სგს, სსგ, სსს};

IV. მონეტის n-ჯერ აგდებისას $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, ..., a_n), a_i =$ გ ან ს} და შედეგების საერთო რაოდენობა ტოლია 2^n-ის;

V. ერთი სათამაშო კამათლის გაგორებისას -- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

VI. ვთქვათ, თავიდან ვაგდებთ მონეტას. თუ მოვა გერბი, მაშინ ვაგორებთ სათამაშო კამათელს; ხოლო თუ მოვა საფასური, მაშინ კიდევ ერთხელ ვაგდებთ მონეტას. ამ შემთხვევაში $\Omega =$ {გ1, გ2, გ3, გ4, გ5, გ6, სგ, სს};

VII. ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას -- $\Omega = \{(1,1);\ (1,2);\ ...\ ;\ (1,6);\ (2,1);\ (2,2);\ ...\ ;\ (2,6);\ ...\ ;\ (6,1);\ ...\ ;\ (6,6)\}$ ანუ

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,...,6\};$$

VIII. პროდუქციის ვარგისიანობის დადგენისას -- $\Omega =$ {“ვარგისი”, “უვარგისი”};

IX. სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რაოდენობა -- $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$;

X. ძაბვა ქსელში -- $\Omega = \{[0, 220]\}$.

განმარტება 2. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს *ხდომილება* ეწოდება.

ცხადია, ელემენტარული ხდომილებები აგრეთვე ხდომილებებია, ისინი წარმოადგენენ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ერთელემენტიან ქვესიმრავლეებს. ყველა დანარჩენ ქვესიმრავლეს (მათ შორის ცარიელი სიმრავლისა და თვითონ სივრცის ჩათვლით) ხდომილებას უწოდებენ. ზოგჯერ (იმის აღსანიშნავად, რომ ქვესიმრავლეში ერთზე მეტი ელემენტია) ხმარობენ აგრეთვე *შედგენილი ან რთული* ხდომილების ცნებასაც. ჩვენ ვისარგებლებთ უბრალოდ ხდომილების ცნებით.

მონეტის ორჯერ აგდებისას (იხ. მაგალითი II) ხდომილების მაგალითებია: **ა)** ერთჯერ მაინც მოვიდა გერბი (ანუ მოვიდა ერთი ან მეტი, მაშასადამე, ორი, გერბი). იგი წარმოადგენს სიმრავლეს -- {გს, სგ, გგ}; **ბ)** გერბი მოვიდა არაუმეტეს ერთისა (ანუ მოვიდა ერთი ან ნაკლები, მაშასადამე, ნული – არცერთი, გერბი). იგი წარმოადგენს სიმრავლეს -- {გს, სგ, სს}; **გ)** გერბი მოვიდა ზუსტად ერთჯერ (ანუ პირველად მოვიდა გერბი და მეორედ კი საფასური ან პირიქით). ეს არის შემდეგი სიმრავლე -- {გს, სგ}; და ა. შ. აღსანიშნავია, რომ ამ შემთხვევაში სულ გვექნება 2^4=16 ხდომილება (როგორც ცნობილია n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n ქვესიმრავლე).

განმარტება 3. თუ ექსპერიმენტის კონკრეტული შედეგი ეკუთვნის რაიმე ხდომილებას, მაშინ ამბობენ რომ ეს *ხდომილება მოხდა,* ხოლო რომელსაც არ ეკუთვნის – ის *ხდომილება არ მოხდა.*

ალბათობის თეორიაში ხდომილებები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, C, D, \ldots$. ხდომილებას $A = \Omega$ უწოდებენ *აუცილებელ ხდომილებას,* ვინაიდან ის აუცილებლად ხდება (ის შეუძლებელია არ მოხდეს, რადგან ექსპერიმენტის ყველა შედეგი მას ეკუთვნის); ხოლო ხდომილებას, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტარულ ხდომილებას აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი და უწოდებენ *შეუძლებელ ხდომილებას,* ვინაიდან მისი მოხდენა შეუძლებელია (რადგან ექსპერიმენტის არც ერთი შედეგი მას არ ეკუთვნის).

შემოვიღოთ აღნიშვნები: A={მონეტის ორჯერ აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვიდა გერბი}={გს,სგ,გგ}; B={ მონეტის ორჯერ აგდებისას გერბი მოვიდა არაუმეტეს ერთისა}={გს,სგ,სს}; C={მონეტის ორჯერ აგდებისას გერბი მოვიდა ზუსტად ერთჯერ}={ გს,სგ }: D={მონეტის ორჯერ აგდებისას ორივეჯერ მოვიდა საფასური}={სს}; E={მონეტის ორჯერ აგდებისას საფასური მოვიდა არაუმეტეს ერთისა}={გგ,სგ,გს}. ამ აღნიშვნებში, თუ მონეტის ორჯერ აგდებისას საფასური მოვიდა მხოლოდ მეორედ აგდებისას, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მოხდა A, B, C და E ხდომილებები, ხოლო D ხდომილება კი არ მოხდა.

თუ A ხდომილების მოხდენას მოსდევს B ხდომილების მოხდენა (სიმრავლეთა თეორიის ენაზე ეს ნიშნავს, რომ A ხდომილება ნაწილია, ქვესიმრავლეა B ხდომილების), მაშინ ჩვენ დავწერთ, რომ $A \subset B$ და ვიტყვით, რომ A ხდომილება *იწვევს* B ხდომილებას. გასაგებია, რომ ნებისმიერი A ხდომილება იწვევს აუცილებელ ხდომილებას -- $A \subset \Omega$. თუ A ხდომილება იწვევს B ხდომილებას და იმავდროულად B ხდომილება იწვევს A ხდომილებას, მაშინ ვიტყვით, რომ A და B ხდომილებები ერთმანეთის *ტოლია* და დავწერთ $A = B$.

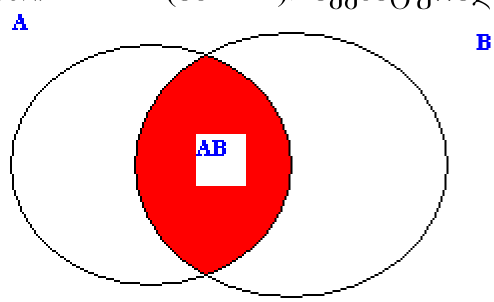
წინა აბზაცის აღნიშვნებში: C ხდომილება იწვევს A, B და E ხდომილებებს; D ხდომილება იწვევს B ხდომილებას; A და E ხდომილებები ერთმანეთის ტოლია.

ოპერაციები ხდომილებებზე, ვენის დიაგრამები

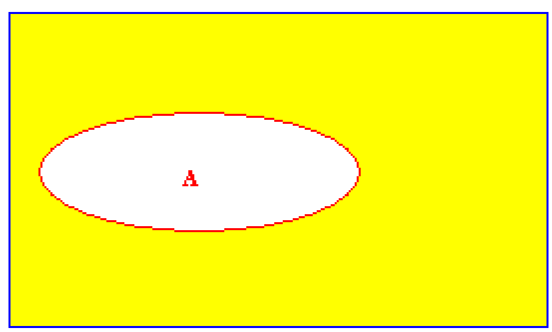
ხდომილებათა მოცემული სისტემის საშუალებით შესაძლებებლია ახალი ხდომილებების აგება, ისევე როგორც სიმრავლეთა მოცემული სისტემის საშუალებით იგება ახალი სიმრავლეები მათი გაერთიანებებით, თანაკვეთებითა და დამატებებით.

ორი A და B ხდომილების *გაერთიანება (ან ჯამი)* ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ამ ხდომილებებიდან ერთი მაინც ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \cup B$ (ან $A + B$). სქემატურად ეს ასე გამოისახება:

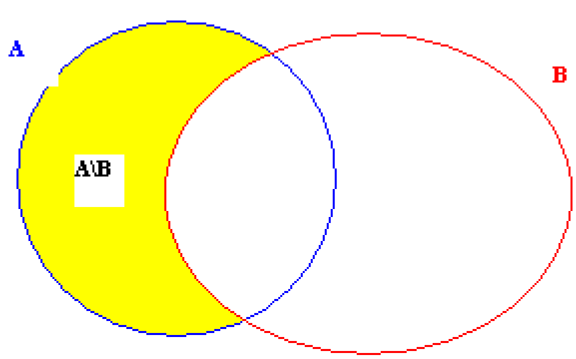
ორი A და B ხდომილების თანაკვეთა *(ან ნამრავლი)* ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ეს ხდომილებები ერთდროულად ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \cap B$ (ან AB). სქემატურად ეს ასე გამოისახება:



A ხდომილების *საწინააღმდეგო* ხდომილება ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A არ ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\bar{A}$. სქემატურად, თუ წარმოვიდგენთ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე მართკუთხედია, ხოლო A ხდომილება -- ოვალი, მაშინ საწინააღმდეგო ხდომილება იქნება ოთხკუთხედის გაფერადებული ნაწილი:

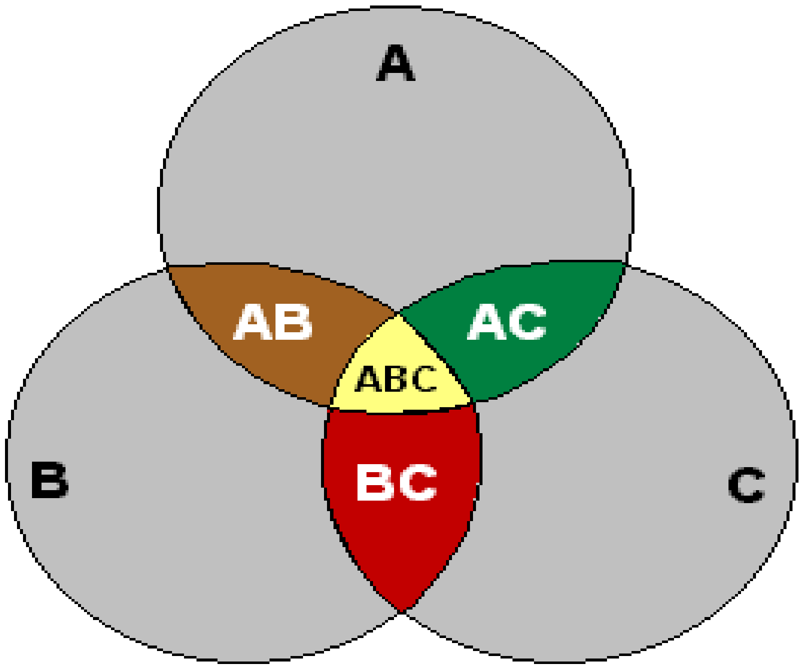


ორი A და B ხდომილების *სხვაობა* ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ხდება A მაგრამ არ ხდება B და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \setminus B$. სქემატურად ეს ასე გამოისახება:



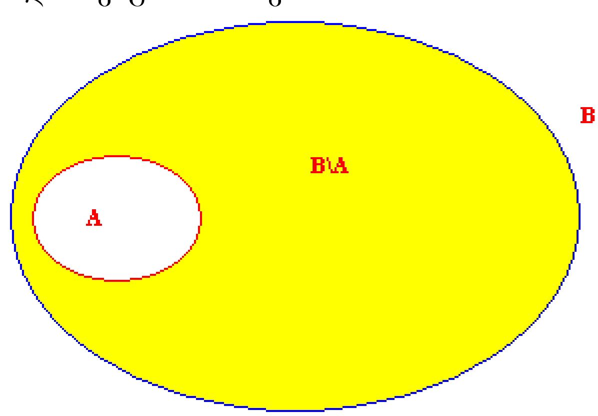
ცხადია, რომ ორი A და B ხდომილების სხვაობა აგრეთვე შეიძლება წარმოდგეს, როგორც A ხდომილებისა და B ხდომილების საწინააღმდეგო $\overline{B}$ ხდომილების თანაკვეთა: $A\setminus B = A\cap\overline{B}$.

გასაგებია, რომ მას შემდეგ რაც ჩვენ განვმარტეთ ორი ხდომილების გაერთიანება და თანაკვეთა, ბუნებრივად შესაძლებელია ხდომილებათა ნებისმიერი რაოდენობის გაერთიანებისა და თანაკვეთის განმარტება. ასე მაგალითად, სქემატურად სამი A, B და C ხდომილებისათვის თანაკვეთა ABC იქნება:



ორ A და B ხდომილებას ეწოდება *არათავსებადი (უთავსებადი, შეუთავსებელი),* თუ მათი ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, ან რაც იგივეა მათი თანაკვეთა არის შეუძლებელი ხდომილება: $A\cap B=\varnothing$. სიმრავლეთა თეორიის ენაზე ეს ნიშნავს, რომ ეს ორი სიმრავლე თანაუკვეთია.

ცხადია, რომ რაიმე A ხდომილება და მისი საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილება უთავსებადია -- $A\cap\overline{A}=\varnothing$. გარდა ამისა, $A\cup\overline{A}=\Omega$. თუ A ხდომილება იწვევს B ხდომილებას ($A\subset B$), მაშინ ცხადია, რომ $A\cap B = A$, $A\cup B = B$, $A\setminus B=\varnothing$, ხოლო სხვაობა $B\setminus A$ სქემატურად ასე გამოისახება:



ალბათურ–სტატისტიკური მცირე ცნობარი

იმისათვის, რომ დავინახოთ რა განსხვავებაა და რა აქვთ საერთო სიმრავლეთა თეორიისა და ალბათობის თეორიის ტრადიციულ ტერმინებს, ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ შესაბამის ცხრილს:

აღნიშვნები	სიმრავლეთა თეორიის ინტერპრეტაცია	ალბათობის თეორიის ინტერპრეტაცია
ω	ელემენტი, წერტილი	შედეგი, ელემენტარული ხდომილება
Ω	წერტილთა სიმრავლე	ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, აუცილებელი ხდომილება
A	წერტილთა სიმრავლე	ხდომილება (თუ შედეგი $\omega \in A$, მაშინ ამბობენ, რომ მოხდა A ხდომილება)
$\overline{A} = \Omega \setminus A$	A სიმრავლის დამატება, ე.ი. იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც არ შედიან A-ში	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს A-ს არ მოხდენაში
$A \cup B$	A და B სიმრავლეების გაერთიანება, ე.ი. სიმრავლე იმ წერტილების, რომლებიც შედიან ან A-ში ან B-ში	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს A და B ხდომილებებიდან ერთის მაინც მოხდენაში
$A \cap B$	A და B სიმრავლეების თანაკვეთა, ე.ი. სიმრავლე იმ წერტილების, რომლებიც შედიან როგორც A, ისე B სიმრავლეში	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს A და B ხდომილებების ერთდროულ მოხდენაში
$\varnothing$	ცარიელი სიმრავლე	შეუძლებელი ხდომილება
$A \cap B = \varnothing$	A და B სიმრავლეები არ იკვეთებიან	A და B ხდომილებები არათავსებადია (მათი ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია)
$A + B$	სიმრავლეთა ჯამი, ე.ი. თანაუკვეთი სიმრავლეების გაერთიანება	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს ორი უთავსებადი ხდომილებიდან ერთის მოხდენაში
$A \setminus B$	A და B სიმრავლეების სხვაობა, ე. ი. სიმრავლე იმ წერტილების, რომლებიც შედიან A-ში, მაგრამ არ შედიან B-ში	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს A ხდომილების მოხდენაში და B ხდომილების არ მოხდენაში
$A \Delta B$	სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა, ე.ი. სიმრავლე $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს A და B ხდომილებებიდან ერთის მოხდენაში, მაგრამ არა ორივეს ერთდროულად
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	$A_1, A_2, \ldots$ სიმრავლეების გაერთიანება, ე.ი. იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც შედიან ერთერთში მაინც	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს $A_1, A_2, \ldots$ ხდომილებებიდან ერთერთის მაინც მოხდენაში
$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$	$A_1, A_2, \ldots$ სიმრავლეების ჯამი, ე.ი. გაერთიანება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს $A_1, A_2, \ldots$ უთავსებადი ხდომილებებიდან ერთის მოხდენაში
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$	$A_1, A_2, \ldots$ სიმრავლეების თანაკვეთა, ე.ი. სიმრავლე იმ წერტილების, რომლებიც შედიან ყველა სიმრავლეში	ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს $A_1, A_2, \ldots$ ხდომილებების ერთდროულ მოხდენაში

ალბათობის განმარტებები

ვიგულისხმოთ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე სასრულია და ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად (თანაბრად) მოსალოდნელია (ანუ არცერთს არ გა-

აჩნია უპირატესობა დანარჩენთან შედარებით). ასეთ მოდელს ეწოდება *კლასიკური მოდელი* და ამ შემთხვევაში მოქმედებს **ალბათობის კლასიკური განმარტება**: ნებისმიერი A ხდომილების ალბათობა ტოლია A-ში შემავალ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა გაყოფილი ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობაზე: $P(A)=|A|/|\Omega|$.

თუ Ω-ს ნებისმიერ ელემენტარულ ხდომილებას ω_i შეესაბამება გარკვეული რიცხვები $p_i=P(\omega_i)$, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს: $0\le p_i\le 1$ და $\sum_i p_i=1$, მაშინ ამ რიცხვებს ეწოდებათ ω_i ელემენტარული ხდომილებების **ალბათობები.** $P(A):=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i)$. თუ $P(\omega_i)=const$ და $|\Omega|<\infty$, ვღებულობთ **ალბათობის კლასიკურ განმარტებას:** $P(A)=|A|/|\Omega|$.

ხდომილების **სტატისტიკურ ალბათობად** ითვლება ამ ხდომილების ფარდობითი სიხშირე $W_N(A)=M/N$ (სადაც – ცდათა საერთო რიცხვია, M კი – ხდომილების მოხდენათა რიცხვი) ან მასთან ახლოს მყოფი რიცხვი (მათემატიკურად ზუსტი ფორმულირება ასეთია: $P(A)=\lim\limits_{N\to\infty}W_N(A)$).

გეომეტრიული ალბათობა. თუ L მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ წერტილს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ აგდებული წერტილი დაეცემა $l\subset L$ მონაკვეთზე: $P=|l|/|L|$. ანალოგიური განმარტება გვაქვს სიბრტყეზე (ფიგურის სიგრძე იცვლება ფართობით) და სივრცეში (ფიგურის სიგრძე იცვლება მოცულობით).

ლექცია – რთული ხდომილებები, ბერნულის სქემა

საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობა

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

ცხადია, რომ $A\cap\overline{A}=\varnothing$ და $A\cup\overline{A}=\Omega$. ამიტომ უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად (თუ A და B უთავსებადი ხდომილებებია, მაშინ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$) ვწერთ

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

საიდანაც გვაქვს: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

სხვაობის ალბათობის ფორმულა (კერძო შემთხვევა)

თუ $A\subset B$, მაშინ $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$.

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს წარმოდგენას $B=A\cup(B\setminus A)$, ამიტომ უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად ვწერთ

$$P(B)=P(A)+P(B\setminus A),$$

საიდანაც გვაქვს: $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$.

სხვაობის ალბათობის ფორმულა (ზოგადი შემთხვევა)

ნებისმიერი A და B ხდომილებებისათვის სამართლიანია: $P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$.

სხვაობა $B\setminus A$ წარმოვადგინოთ ისეთ სხვაობად, სადაც მაკლები ქვესიმრავლეა საკლების. ცხადია, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას $B\setminus A=B\setminus(A\cap B)$, ამიტომ კერძო შემთხვევაში სხვაობის ალბათობის ფორმულის თანახმად ვწერთ

$$P(B\setminus A)=P[B\setminus(A\cap B)]=P(B)-P(A\cap B).$$

ჯამის ალბათობის ფორმულა

თუ A და B უთავსებადი ხდომილებებია, მაშინ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ნებისმიერი A და B ხდომილებებისათვის სამართლიანია:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

გაერთიანება $A \cup B$ წარმოვადგინოთ უთავსებად ხდომილებათა გაერთიანების სახით. ცხადია, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, ამიტომ უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად ვწერთ $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$. თუ ახლა ვისარგებლებთ, სხვაობის ალბათობის ფორმულით $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, მაშინ გასაგებია, რომ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

პირობითი ალბათობის ცნება, ნამრავლის ალბათობა

A **ხდომილების პირობითი ალბათობა** პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა B ხდომილებას აღინიშნება $P(A \mid B)$ (ან $P_B(A)$) სიმბოლოთი და

ნამრავლის ალბათობის ფორმულა

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P[C \mid (A \cap B)].$$

საწინააღმდეგო ხდომილების პირობითი ალბათობა

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B).$$

პირობითი ალბათობის განმარტებისა და სხვაობის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ:

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \setminus A)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B).$$

დამოუკიდებლობის ორი განმარტების ეკვივალენტურობა

A და B ხდომილებას ეწოდება დამოუკიდებელი თუ:

I) $P(A \mid B) = P(A)$; **II)** $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

ა) ვთქვათ, $P(A \mid B) = P(A)$. მაშინ პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად გვაქვს $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, საიდანაც გვაქვს: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

ბ) ვთქვათ, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. მაშინ პირობითი ალბათობის განმარტება გვაძლევს: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$.

წყვილ-წყვილად და ერთობლივად დამოუკიდებლობა

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი** თუ: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, $\forall i \neq j$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **ერთობლივად დამოუკიდებელი** თუ $\forall \quad 2 \le k \le n$, $i_1 \ne i_2 \ne \cdots \ne i_k$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

ცხადია, რომ ერთობლივად დამუკიდებლობა იწვევს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობას, ხოლო პირიქით საზოგადოდ არა.

ბერნშტეინის მაგალითი. ყუთში მოთავსებულია ოთხი ერთნაირი ბურთი წარწერებით 1, 2, 3 და 123. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთს. A_i იყოს ხდომილება, რომ ამოღებულ ბურთს (სადღაც) აწერია ციფრი i, $i = 1,2,3$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აქედან ნებისმიერი ორი ხდომილება დამოუკიდებელია, მაგალითად, $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)$, მაგრამ ერთობლივად დამოუკიდებლობა არ გვაქვს ვინაიდან

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \ne \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

სრული ალბათობის ფორმულა $A, \overline{A}$ სრული სისტემისათვის

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}).$$

ვინაიდან, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ და $A \cup \overline{A} = \Omega$, ამიტომ B ცხადია, რომ ნებისმიერი ხდომილება წარმოიდგინება გაერთიანების სახით: $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$. შესაბამისად, უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად ვწერთ $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$. მეორეს მხრივ, ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს: $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$ და $P(A \cap B) = P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$. ყოველივე ზემოთთქმულის გაერთიანებით მივიღებთ, რომ:

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}).$$

ბაიესის ფორმულა

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}.$$

დავწეროთ პირობითი ალბათობის ფორმულა $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ და ნამრავლის ალბათობის ფორმულა $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$. მათი გაერთიანებით მივიღებთ **ბაიესის ფორმულას:**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}.$$

ბერნულის ფორმულა, უალბათესი რიცხვი

დავუშვათ, რომ ერთიდაიგივე, პირობითად ორშედეგიანი ცდა (ერთ-ერთი შედეგს ვუწოდოთ წარმატება, მეორეს კი მარცხი) ტარდება n-ჯერ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად, ცალკეულ ცდაში წარმატების ალბათობაა – p (შესაბამისად, მარცხის ალბათობაა – $q = 1 - p$). მაშინ ალბათობა იმისა, რომ n ცდაში წარმატებათა რაოდენობა იქნება k აღინიშნება სიმბოლოთი $P_n(k)$ და გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,...,n.$$

წარმატებათა იმ რაოდენობას k_0, რომელიც ყველაზე უფრო მოსალოდნელია **უალბათესი რიცხვი** ეწოდება, ანუ

$$P_n(k_0) = \max\{P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)\}.$$

უალბათესი რიცხვი წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის მთელ ამონახსნს:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

პუასონის ფორმულა

თუ დამოუკიდებელ ცდათა სქემაში ცდათა რიცხვი დიდია, ხოლო ცალკეულ ცდაში წარმატების ალბათობა მცირე (მეასედის რიგის), ისე რომ $np < 15$, მაშინ ბერნულის ზუსტი ფორმულის ნაცვლად გამოიყენება პუასონის მიახლოებითი ფორმულა

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ სადაც } \lambda = np.$$

ლექცია – შემთხვევითი სიდიდე და მისი მახასიათებლები

შემთხვევითი სიდიდე, განაწილების კანონი

ცვლად სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობები დამოკიდებულია შემთხვევითი ექსპერიმენტის ან მოვლენის შესაძლო შედეგებზე, შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ. შემთხვევითი სიდიდის მაგალითებია: სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა რიცხვი; გასროლათა რაოდენობა მიზანში პირველად მოხვედრამდე; მანძილი სამიზნის ცენტრიდან დაზიანების წერტილამდე; სხვადასხვა დროს გარკვეულ პროდუქციაზე მოთხოვნათა რაოდენობა და ა. შ.

განმარტება. შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განსაზღრულ რიცხვით ფუნქციას **შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული ტიპის** თუ ის ღებულობს ცალკეულ, იზოლირებულ შესაძლო მნიშვნელობებს. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის** თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე მთლიანად ავსებს რაიმე სასრულ ან უსასრულო რიცხვით შუალედს.

დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს სასრულ ან თვლად რაოდენობა განსხვავებულ მნიშვნელობებს, ხოლო უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა რაოდენობა კონტინიუმის სიმძლავრისაა.

შემთხვევით სიდიდეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით: $X, Y, Z, \dots$ (ან პატარა ბერძნული ასოებით $\xi, \eta, \varsigma, \dots$), ხოლო შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს აღნიშნავენ პატარა ლათინური ასოებით: $x_i, y_j, z_k, \dots$.

მაგალითი 1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მონეტის სამჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რიცხვი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე რვა ელემენტიანი სიმრავლეა:

$$\Omega = \{\text{გგგ}, \text{გგს}, \text{გსგ}, \text{სგგ}, \text{გსს}, \text{სგს}, \text{სსგ}, \text{სსს}\}$$

და, შესაბამისად, საძიებელი შემთხვევითი სიდიდე იქნება Ω-ზე განსაზღრული შემდეგი რიცხვითი ფუნქცია:

$$X(\text{გგგ}) = 3; \quad X(\text{გგს}) = X(\text{გსგ}) = X(\text{სგგ}) = 2;$$

$$X(\text{გსს}) = X(\text{სგს}) = X(\text{სსგ}) = 1 \text{ და } X(\text{სსს}) = 0.$$

ცხადია ეს შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტული ტიპისაა, ის ღებულობს იზოლირებულ მნიშვნელობებს, მაგალითად, 1-სა და 2-ს შორის ის არ ღებულობს არცერთ მნიშვნელობას.

მაგალითი 2. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 36 ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,...,6\},$$

ხოლო შემთხვევითი სიდიდე ცალკეულ ელემენტარულ ხდომილებას (i, j) (სადაც i -- პირველ კამათელზე მოსული ქულაა, ხოლო j -- მეორე კამათელზე მოსული ქულა) შეუსაბამებს: $X(i, j) = i + j$ (პირველ და მეორე კამათელზე მოსული ქულების ჯამი). მაგალითად, $X(1,3) = X(2,2) = X(3,1) = 4$. აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: 2, 3, . . . , 12. ის ასევე დიკრეტული ტიპისაა.

ზემოთ ჩამოთვლილი მაგალითებიდან უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა მანძილი სამიზნის ცენტრიდან დაზიანების წერტილამდე. ის თავის ნებისმიერ ორ მიღებულ მნიშვნელობას შორის არ გამოტოვებს არცერთ მნიშვნელობას.

შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია თუ ჩვენ ვიცით ექსპერიმენტის ამა თუ იმ შედეგს რა რიცხვი შეესაბამება. მაგრამ, იმისათვის რომ ალბათურად დავახასიათოთ შემთხვევითი სიდიდე, ჩვენ კიდევ უნდა ვიცოდეთ თუ რამდენად ხშირად ანუ რა ალბათობებით ღებულობს ეს შემთხვევითი სიდიდე თავის ამა თუ იმ მნიშვნელობას. შესაბამისობას, შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებსა და მათ შესაბამის ალბათობებს შორის, დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონი** ეწოდება. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიძლება მოცემული იყოს *ცხრილის, ფორმულის ან გრაფიკის* სახით.

ცხრილს, რომელშიც ჩამოთვლილია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები და მათი შესაბამისი ალბათობები, დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების მწკრივი** ეწოდება:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

შევნიშნოთ, რომ ხდომილება, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას თავისი შესაძლო მნიშვნელობებიდან, წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილებას და ამიტომ: $\sum_i p_i = 1$ (ჩვენ არ ვუთითებთ შესაკრებთა რაოდენობას, ის შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ისე უსასრულო).

ამოცანა 1. ორი მსროლელი თითოჯერ ესვრის სამიზნეს. მათ მიერ სამიზნის დაზიანების (მიზანში მოხვედრის) ალბათობებია შესაბმისად 0.6 და 0.7. შემთხვევითი სიდიდე X იყოს სამიზნის დაზიანებათა რაოდენობა. შევადგინოთ მისი განაწილების მწკრივი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ X შემთხვევითმა სიდიდემ შეიძლება მიიღოს შემდეგი მნიშვნელობები: 0 (ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე), 1 (მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე) და 2 (ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე). ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

ბუნებრივია შეგვძლია ვიგულისხმოთ რომ პირველი და მეორე მსროლელის სროლის შედეგები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A -- პირველმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე და B -- მეორე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე. მოცემულია, რომ $P(A) = 0.6$ და $P(B) = 0.7$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 0.4$ და $P(\overline{B}) = 0.3$. გარდა ამისა, A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. დამოუკიდებელი ხდომილებებია აგრეთვე: $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და B , $\overline{A}$ და $\overline{B}$.

ადვილი დასანახია, რომ ხდომილება – ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე იქნება $\overline{A} \cap \overline{B}$, ხდომილება -- მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზი-

ანა სამიზნე იქნება $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ და ხდომილება -- ორივე მსროლელმა დაა-ზიანა სამიზნე იქნება $A\cap B$. გასაგებია, რომ $(A\cap\overline{B})$ და $(\overline{A}\cap B)$ უთავსებადი ხდომილებებია $(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)=\varnothing$.

ამიტომ, დამოუკიდებელ ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობისა და უთავ-სებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$P(X=0)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.4\cdot 0.3=0.12\,;$$

$$P(X=1)=P\{(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)\}=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=$$

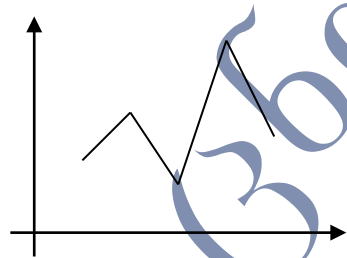
$$P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)=0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.7=0.46\,;$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.7=0.42$$

შესაბამისად, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i	0	1	2
p_i	0.12	0.46	0.42

გრაფიკულად დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიძლება წარმოვადგინოთ *განაწილების მრავალკუთხედის სახით,* რომელიც წარმოადგენს ტეხილს სიბრტყეზე, რომელიც მიიღება საკოორდინატო სიბრტყეზე იმ წერტილების შეერთებით, რომელთა კოორდინატებია (x_i, p_i).



თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე X და რაიმე რიცხვითი g ფუნქცია, მაშინ $g(X)$ ისევ იქნება დისკრეტული ტიპის შემთხვე-ვითი სიდიდე, რომლის განაწილების მწკრივის პირველ სტრიქონში იქნება $g(x_i)$ რიცხვები ($g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები), ხოლო მეორე სტრიქონში იგივე p_i ალბათობები, რაც გვქონდა X შემთხვევითი სიდიდის განა-წილების მწკრივში, ვინაიდან:

$$P\{g(X)=g(x_i)\}=P(X=x_i)=p_i\,,$$

ანუ გვექნება განაწილების მწკრივი:

$g(x_i)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია X-ის რომელიმე ორი განსხვავებული $x_j\neq x_k$ მნიშვნელობისათვის $g(x_j)=g(x_k)$, მაშინ $g(X)$-ის განაწილების მწკრივში მხო-ლოდ ერთ ადგილას დავწერთ $g(x_j)$-ს და ქვეშ მივუწერთ შესაბამისი ალბათო-ბის როლში (p_j+p_k) სიდიდეს. მაგალითად, თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწ-ილების მწკრივია:

x_i	-3	-1	0	1	2
p_i	0.15	0.12	0.2	0.18	0.35

მაშინ X^2-ის (ამ შემთხვევაში $g(x)=x^2$) განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i^2	**0**	**1**	**4**	**9**
p_i	**0.2**	**0.3**	**0.35**	**0.15**

აქ $P(X^2=1)=P\{(X=-1)\cup(X=1)\}=P(X=-1)+P(X=-1)=0.12+0.18=0.3$.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და განაწილების სიმკვრივე

შემთხვევითი სიდიდის განაწილება შესაძლებელია მოცემულ იქნეს ე. წ. **განაწილების ფუნქციით**:

$$F(x):=P(X\le x),$$

რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისთვის განსაზღვრავს ალბათობას იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ისეთ მნიშვნელობებს, რომელიც არ არემატება x-ს.

განაწლების ფუნქციის თვისებები:

1) ნებისმიერი x-სათვის $0\le F(x)\le 1$(როგორც $(X\le x)$ ხდომილების ალბათობა);

2) განაწილების ფუნქცია არაკლებადია: თუ $x^{'}<x^{''}$, მაშინ $F(x^{'})\le F(x^{''})$;

მართლაც, თუ $x^{'}<x^{''}$, მაშინ ხდომილება $(X\le x^{'})$ იწვევს ხდომილებას $(X\le x^{''})$, ამიტომ გვაქვს:

$$F(x^{'})=P(X\le x^{'})\le P(X\le x^{''})=F(x^{''});$$

3) განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან (თუ განაწილების ფუნქციას განვმარტავთ როგორც $F(x):=P(X<x)$, მაშინ ის იქნება მარცხნიდან უწყვეტი);

ამ თვისების შესამოწმებლად უნდა ვისარგებლოთ ე.წ. **ალბათობის უწყვეტობის თვისებით**: თუ $\{A_n\}_{n\ge1}$ ხდომილებათა კლებადი (შესაბამისად, ზრდადი) მიმდევრობაა $A_n\supset A_{n+1}$ (შესაბამისად, $A_n\subset A_{n+1}$), მაშინ ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\ \ (\text{შესაბამისად, } \lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)).$$

აღვნიშნოთ $A_n:=\{X\le x+\frac{1}{n}\}$, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X\le x+\frac{1}{n}\}=\{X\le x\}$, ადვილად დავრწმუნდებით განაწილების ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობაში:

$$F(x+0):=\lim_{n\to\infty}F(x+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}P(X\le x+\frac{1}{n})=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X\le x+\frac{1}{n}\}=P\{X\le x\}=F(x).$$

4) თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k=P(X=x_k)$, მაშინ მისი განაწილების ფუნქცია იქნება:

$F(x)=\sum_{x\le x_k}P(X=x_k)$ (შესაბამისად, თუ $F(x):=P(X<x)$, მაშინ

$$F(x)=\sum_{x<x_k}P(X=x_k));$$

მართლაც, ცხადია, რომ ხდომილება $(X\le x)$ წარმოიდგინება უთავსებადი $(X=x_k)$ ხდომილებების გაერთიანების სახით $(X\le x)=\bigcup_{x\le x_k}(X=x_k)$. ამიტომ უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(X\le x)=P\{\bigcup_{x\le x_k}(X=x_k)\}=\sum_{x\le x_k}P(X=x_k)=\sum_{x\le x_k}p_k .$$

5) თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x):=P(X\le x)$, მაშინ მისი განაწილების კანონი იქნება:

$p_k=P(X=x_k)=F(x_k)-F(x_k-0)$ (შესაბამისად, თუ $F(x):=P(X<x)$, მაშინ

$$p_k=P(X=x_k)=F(x_k+0)-F(x_k)),$$

ანუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს თავის კონკრეტულ მნიშვნელობას ტოლია ამ მნიშვნელობაზე განაწილების ფუნქციის ნახტომის სიდიდის;

აღვნიშნოთ $A_n:=\{X\le x-\frac{1}{n}\}$. მაშინ თუ ვისარგებლებთ თანაფარდობით $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\le x-\frac{1}{n}\}=\{X<x\}$, ალბათობის უწყვეტობის თვისების თანახმად დავასკვნით, რომ:

$$P\{X<x\}=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\le x-\frac{1}{n}\})=\lim_{n\to\infty}P(\{X\le x-\frac{1}{n}\})=\lim_{n\to\infty}F(x-\frac{1}{n})=F(x-0).$$

ამიტომ, ვინაიდან $(X=x_k)=(X\le x_k)\setminus(X<x_k)$, სხვაობის ალბათობის ფორმულის საშუალებით, ვრწმუნდებით, რომ:

$$p_k=P(X=x_k)=P(X\le x_k)-P(X<x_k)=F(x_k)-F(x_k-0):=\Delta F(x_k).$$

განაწილების ფუნქცია შეიძლება იყოს ან დისკრეტული, ან უწყვეტი, ან მათი კომბინაცია. დისკრეტული განაწილების ფუნქცია შეესაბამება დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს სასრულ რაოდენობა მნიშვნელობებს ან მნიშვნელობებს ისეთი სიმრავლიდან, რომლის ელემენტების გადანომვრაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით (ასეთ სიმრავლეებს, მათემატიკაში, *თვლად სიმრავლეებს* უწოდებენ). დისკრეტულ განაწილების ფუნქციას აქვს საფეხურა კიბის სახე.

მაგალითი 3. საქონლის პარტიაში დეფექტურ ნაწარმთა რიცხვი X ღებულობს მნიშვნელობა 0-ს ალბათობით – 0.3; მნიშვნელობა 1-ს ალბათობით –0.4; მნიშვნელობა 2-ს ალბათობით – 0.2 და მნიშვნელობა 3-ს ალბათობით – 0.1 ანუ X-ის განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.3	0.4	0.2	0.1

გამოვთვალოთ X-ის $F(x)=P(X<x)$ განაწილების ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

თუ $x\le 0$, მაშინ $F(x)=P(X<x)=P(\varnothing)=0$;

თუ $0<x\le 1$, მაშინ $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0.3$;

თუ $1<x\le 2$, მაშინ $F(x)=P(X<x)=P\{(X=0)\cup(X=1)\}=$

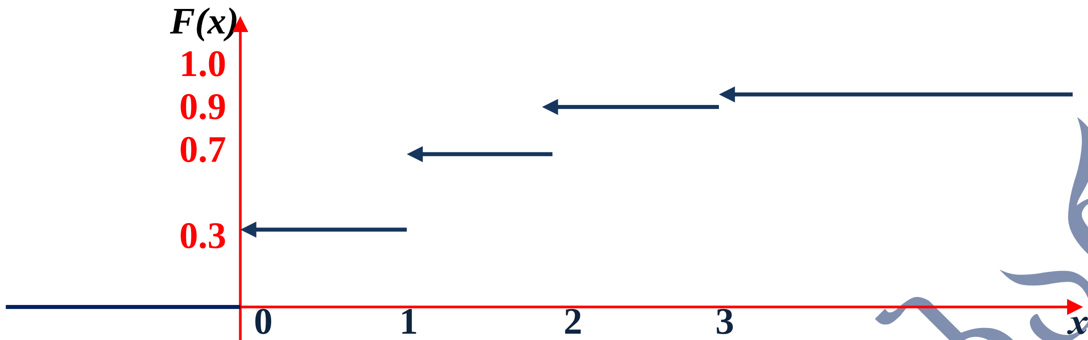
$$= P(X=0)+P(X=1)=0.3+0.4=0.7;$$

თუ $2<x\le 3$, მაშინ $F(x)=P(X<x)=P\{(X=0)\cup(X=1)\cup(X=2)\}=$

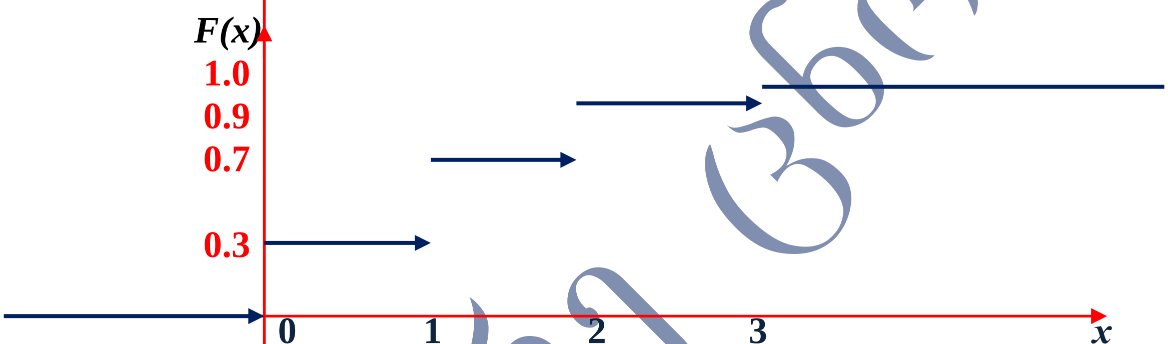
$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.3+0.4+0.2=0.9;$$

და ბოლოს, თუ $x\ge 3$, მაშინ $F(x)=P(X<x)=P(\Omega)=1$.

ამიტომ $F(x)=P(X<x)$ განაწილების ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



ანალოგიურად, ცხადია, რომ $F(x):=P(X\le x)$ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი იქნება შემდეგი სახის:



უწყვეტ განაწილების ფუნქციას ნახტომები არა აქვს. ის მონოტონურად იზრდება არგუმენტის ზრდასთან ერთად 0-დან (როცა $x\to-\infty$) 1-მდე (როცა $x\to+\infty$). შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს უწყვეტი განაწილების ფუნქცია, უწოდებენ **უწყვეტ შემთხვევით** სიდიდეს.

თუ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)$ წარმოება-დია, მაშინ მის წარმოებულს შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე** ეწ-ოდება და აღინიშნება $f(x)$-ით:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}.$$

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივიდან შეგვიძლია აღვადგინ-ოთ განაწილების ფუნქცია:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

ვინაიდან ნებისმიერი განაწილების ფუნქციისათვის:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1,$$

ამიტომ, ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის გამოყენებით, გვაქვს:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

მაგალითი 4. მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

(სადაც a და b $(a < b)$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია). ვიპოვოთ შესაბამისი განაწილების სიმკვრივე. ცხადია, რომ განმარტების თანახმად:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x > b \end{cases}$$

რაც შეეხება $x = a$ და $x = b$ წერტილებს, აქ $F(x)$ ფუნქციას წარმოებული არა აქვს და იქ შეგვიძლია $f(x)$ განვმარტოთ ნებისმიერად, ვთქვათ, $f(a) = f(b) = 0$. შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს აღნიშნული განაწილების სიმკვრივე, ეწოდება **თანაბარად განაწილებული [*a*, *b*] მონაკვეთზე**.

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი

ხშირად შემთხვევითი სიდიდის დასახასიათებლად უფრო მოხერხებულია რიცხვითი მახასიათებლები, ნაცვლად ფუნქციონალურისა (როგორიცაა განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია ან განაწილების სიმკვრივე უწყვეტ შემთხვევაში). შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს შორის პირველ რიგში გამოყოფენ ისეთებს, რომელთა "ირგვლივ" ("გარშემოც") ლაგდება (ჯგუფდება) შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები. ერთერთ ასეთ რიცხვით მახასიათებლს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის *მათემატიკური ლოდინი,* რომელსაც მისი არსიდან გამომდინარე (რასაც ჩვენ ქვემოთ დავინახავთ) შემთხვევითი სიდიდის *საშუალო მნიშვნელობასაც* ეძახიან.

განმარტება 1. $X : \Omega \to R^1$ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება EX სიმბოლოთი (E არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა *Expectation*, რომელიც ნიშნავს – ლოდინი, მოსალოდნელობა) და ეწოდება რიცხვს:

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega), \tag{1}$$

ე. ი. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების შეწონილ ჯამს წონებით, რომლებიც ტოლია შესაბამისი ელემენტარული ხდომილებების ალბათობების.

შევნიშნავთ, რომ მათემატიკური ლოდინის აღსანიშნავად ასევე გამოიყენება სიმბოლო MX (M არის პირველი ასო რუსული სიტყვისა Математическое ожидание).

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ სათამაშო კამათელზე მოსული ქულათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი. (1) თანაფარდობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$EX = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5.$$

თეორემა1. თუ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობებს x_1, x_2, $\dots, x_n$, მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\}, \qquad (2)$$

ე. ი. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების შეწონილ ჯამს წონებით, რომლებიც ტოლია ალბათობის იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს გარკვეულ მნიშვნელობებს.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $P\{X = x_i\} := p_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ მაშინ (2) თანაფარდობა ასე გადაიწერება

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n. \qquad (3)$$

განსხვავებით (1) თანაფარდობისაგან, სადაც აჯამვა ხდება უშუალოდ ელემენტარული ხდომილებების მიმართ, ხდომილება $\{X = x_i\} = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$ შეიძლება შედგებოდეს რამოდენიმე ელემენტარული ხდომილებისაგან. ხშირ შემთხვევაში (2) თანაფარდობით განიმარტება მათემატიკური ლოდინი, თუმცა მათემატიკური ლოდინის თვისებების შესამოწმებლად უფრო მოხერხებულია (1) თანაფარდობა.

მათემატიკური ლოდინის ცნება ალბათურ-სტატისტიკურ თეორიაში შეესაბამება სიმძიმის ცენტრის ცნებას მექანიკაში. რიცხვითი ღერძის $x_1, x_2, \dots,$ x_n წერტილებში განვათავსოთ შესაბამისად

$$P\{X = x_1\}, P\{X = x_2\}, \dots, P\{X = x_n\}$$

მასები. მაშინ (2) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ მატერიალური წერტილების ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მათემატიკურ ლოდინს. ეს, თავის მხრივ, გვიჩვენებს განმარტება 1-ის ბუნებრიობას.

იმისათვის, რომ გასაგები გახდეს მათემატიკური ლოდინის შინაარსი, დავუშვათ, რომ ჩავატარეთ n დაკვირვება (ექსპერიმენტი) X შემთხვევით სიდიდეზე და ვთქვათ, რომ მან n_1 ჯერ მიიღო მნიშვნელობა x_1, n_2 ჯერ – მნიშვნელობა x_2, და ა. შ. n_m ჯერ – მნიშვნელობა x_m. ცხადია $n_1 + n_2 + \dots + n_m = \ = n$, ხოლო შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$ გამოითვლება ფორმულით

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_m n_m}{n},$$

ანუ,

$$\bar{x} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_m \frac{n_m}{n}. \qquad (4)$$

აქ $\frac{n_1}{n}$ არის x_1ის განხორციელების ფარდობითი სიხიშირე, $\frac{n_2}{n}$ არის x_2ის განხორციელების ფარდობითი სიხიშირე და ა. შ. $\frac{n_m}{n}$ არის x_mის განხორციელების ფარდობითი სიხიშირე. თუ დავუშვებთ, რომ დაკვირვებათა რაოდენობა საკმარისად დიდია, მაშინ ფარდობითი სიხშირე ახლოსაა ხდომილების ალბათობასთან

$$\frac{n_1}{n} = p_1, \frac{n_2}{n} = p_2, \dots, \frac{n_m}{n} = p_m.$$

თუ ახლა (4) თანაფარდობაში ფარდობით სიხშირეებს შევცვლით შესაბამისი ალბათობებით და გავითვალისწინებთ (3) თანაფარდობას, მივიღებთ, რომ

$$\bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = EX .$$

ე. ი. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი დაახლოებით ტოლია ამ შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულის.

ცხადია, რომ არაა აუცილებელი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლი იყოს მისი რომელიმე შესაძლო მნიშვნელობის.

თუ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე თანაბარი კანონითაა განაწილებული ანუ ის ყველა თავის მნიშვნელობას $x_1, x_2, ..., x_n$ ღებულობს თანაბარი (ერთი და იგივე) ალბათობებით ($p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$), მაშინ მათემატიკური ლოდინი ზუსტად ემთხვევა მისი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულს:

$$EX = x_1 \frac{1}{n} + x_2 \frac{1}{n} + \cdots + x_n \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} .$$

განმარტება 2. თუ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე თვლადია, მაშინ

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ,$$

თუ ცნობილია, რომ შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია –

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x_i | p_i < \infty ,$$

სადაც $p_i := P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ...$ და $p_1 + p_2 + \cdots = 1$.

განმარტება 3. უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება რიცხვს

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ,$$

სადაც $f(x)$ არის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, თუ ცნობილია, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | x | f(x) dx < \infty .$$

თეორემა 2. თუ X და Y ერთი და იგივე ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განმარტებული შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო $c = const$ რაიმე მუდმივია, მაშინ:

ა) $Ec = c$; **ბ)** $E(X+Y) = EX + EY$ და $E(X-Y) = EX - EY$;

გ) $E(cX) = cEX$; **დ)** $E(X - EX) = 0$ და **ე).** $E(X-c)^2 = E(X-EX)^2 + (c-EX)^2$.

შედეგი 1. **ბ)** და **გ)** პუნქტების გაერთიანება გვაძლევს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მათი მათემატიკური ლოდინების წრფივი კომბინაციის:

$$E(aX + bY) = aEX + bEY ,$$

სადაც a, b მუდმივებია.

შედეგი 2. ვინაიდან **ე)** პუნქტის თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში მეორე შესაკრები ყოველთვის არაუარყოფითია და ნულია მხოლოდ მაშინ, როცა $c = EX$, ამიტომ გამოსახულება $E(X-c)^2$ თავის მინიმუმს c-ს მიმართ აღწევს როცა $c = EX$:

$$\min_{c \in (-\infty, +\infty)} E(X-c)^2 = E(X-EX)^2 .$$

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი. ხშირად მოცემულია რაიმე X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გვაინტერესებს $Y=g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, სადაც $g(x)$ ნამდვილი x ცვლადის რაიმე ფუნქციაა. ამისათვის ჯერ შეიძლება დავადგინოთ Y შემთხვევითი სიდიდის განაწილება და შემდეგ გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი განმარტება 1-ის გამოყენებით. მაგრამ უფრო მოხერხებულია $Y=g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი გამოვთვალოთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ტერმინებში.

ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

მაშინ

$$Eg(X)=\sum_{i=1}^{m} g(x_i)P\{X=x_i\}=\sum_{i=1}^{m} g(x_i)p_i\,. \qquad (5)$$

მაგალითი 2. დავუშვათ, $g(x)=x^3-4x$ და მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

-2	-1	0	2
0.1	0.3	0.4	0.2

დავადგინოთ $Y=g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი.

ცხადია, რომ $g(-2)=g(0)=g(2)=0$ და $g(-1)=3$. ამიტომ Y შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ მისი განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{Y=0\}$ და $P\{Y=3\}$. რადგან ხდომილებები $\{X=-2\},\{X=0\}$ და $\{X=2\}$ უთავსებადია, ამიტომ ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{Y=0\}=P\{\{X=-2\}\cup\{X=0\}\cup\{X=2\}\}=$$
$$=P\{X=-2\}+P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.1+0.4+0.2=0.7\,.$$

გარდა ამისა, $P\{Y=3\}=P\{X=-1\}=0.3$. ამიტომ $Y=g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

0	3
0.7	0.3

ხოლო (3) თანაფარდობის ძალით $EY=0\cdot 0.7+3\cdot 0.3=0.9$.

ახლა გამოვთვალოთ $Y=g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (5) თანაფარდობის საშუალებით. გვექნება:

$$EY=g(-2)\cdot 0.1+g(-1)\cdot 0.3+g(0)\cdot 0.4+g(2)\cdot 0.2=0\cdot 0.1+3\cdot 0.3+0\cdot 0.4+0\cdot 0.2=0.9\,.$$

განმარტება 4. თუ X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1,x_2,\ \ldots,x_n$, ხოლო B რაიმე ხდომილებაა ($P(B)>0$), მაშინ X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი B ხდომილების მიმართ აღინიშნება სიმბოლოთი $E(X\mid B)$ და განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E(X\mid B)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i\mid B)\,. \qquad (6)$$

ცხადია, რომ $E(X\mid\Omega)=EX$. გარდა ამისა, ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

$$E(X\mid B)=\frac{1}{P(B)}E(I_B X)\,.$$

განმარტება 5. X შემთხვევითი სიდიდის Y შემთხვევით სიდიდეზე **რეგრესიის მრუდი (ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას $R(y)=E(X\,|\,Y=y)$.

რეგრესიის ფუნქციის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ Y შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების პირობით განისაზღვრება X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი საშუალო მნიშვნელობა.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $R(Y)$ (რეგრესიის ფუნქციაში ჩასმულია Y შემთხვევითი სიდიდე). ამ შემთხვევით სიდიდეს X შემთხვევითი სიდიდის **პირობით მათემატიკურ ლოდინს** უწოდებენ Y პირობით და $E(X\,|\,Y)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია

მათემატიკური ლოდინი გვიჩვენებს თუ რომელი წერტილის (მნიშვნელობის) ირგვლივ ჯგუფდება (ლაგდება) შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები. ხშირ შემთხვევაში საჭიროა შევძლოთ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების გადახრის გაზომვა მათემატიკური ლოდინის მიმართ. განვიხილოთ ორი დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების შემდეგი კანონებით:

X	-3	1
P	1/4	3/4

Y	-90	45
P	1/3	2/3

გამოვთვალოთ თითოეულის მათემატიკური ლოდინი:

$$EX=(-3)\cdot 1/4+1\cdot 3/4=0 \quad \text{და} \quad EY=(-90)\cdot 1/3+45\cdot 2/3=0\,.$$

როგორც ვხედავთ ორივე შემთხვევით სიდიდეს აქვს ერთი და იგივე მათემატიკური ლოდინი, მაგრამ მათი განაწილებები განსხვავდებიან იმით, რომ X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები გაცილებით ახლოსაა მათემატიკურ ლოდინთან (ამ შემთხვევაში ნულთან), ვიდრე Y შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები.

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მათემატიკური ლოდინის მიმართ გაფანტულობის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საზომს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ გამოსახულება $E(X-c)^2$ აღწევს მინიმუმს c-ს მიმართ როცა $c=EX$. ამიტომ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების გაფანტულობის საზომად ბუნებრივია ავიღოთ $E(X-EX)^2$.

განმარტება 1. X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია (აღინიშნება DX-ით, D არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა -- Dispersion) ეწოდება $(X-EX)^2$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს

$$DX=E(X-EX)^2\,. \tag{1}$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით დისპერსია შესაძლებელია გადაიწეროს სხვა ფორმით:

$$DX=E(X-EX)^2=E[X^2-2X\cdot EX+(EX)^2]=$$
$$=EX^2-2EX\cdot EX+(EX)^2=EX^2-(EX)^2\,, \tag{2}$$

სადაც, EX^2-ს ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის **მეორე რიგის მომენტი** (თვითონ დისპერსიას უწოდებენ აგრეთვე – **მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს**).

თუ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

მაშინ მათემატიკური ლოდინისა და შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციებიდან მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი ფორმულების თანახმად დისპერსიის გამო-

სათვლელ ფორმულებს (1) და (2) ფორმულების მიხედვით ექნ-ება შესაბამისად შემდეგი სახე:

$$DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\sum_{j=1}^{n}x_jp_j)^2p_i\,, \qquad (3)$$

$$DX=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(\sum_{j=1}^{n}x_jp_j)^2\,. \qquad (4)$$

მაგალითი 1. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

გამოვთვალოთ მისი დისპერსია.

ვინაიდან დისპერსიის გამოსათვლელად გვაქვს ორი (3) და (4) ფორმულები, შესაბამისად, გვექნება დისპერსიის გამოთვლის ორი ხერხი. მოხერხებულია ეს გამოთვლები ჩაიწეროს ცხრილების სახით.

დისპერსიის გამოთვლის პირველი ხერხი:

i	x_i	p_i	x_ip_i	$(x_i-EX)^2$	$(x_i-EX)^2p_i$
1	-1	0.10	-0.1	5.29	0.5290
2	0	0.15	0	1.69	0.2535
3	1	0.30	0.3	0.09	0.0270
4	2	0.25	0.5	0.49	0.1225
5	3	0.20	0.6	2.89	0.5780
			$EX=\sum_{i=1}^{5}x_ip_i=1.3$		$DX=\sum_{i=1}^{5}(x_i-EX)^2p_i=1.51$

დისპერსიის გამოთვლის მეორე ხერხი:

i	x_i	p_i	x_ip_i	x_i^2	$x_i^2p_i$
1	-1	0.10	-0.1	1	0.1
2	0	0.15	0	0	0
3	1	0.30	0.3	1	0.3
4	2	0.25	0.5	4	1
5	3	0.20	0.6	9	1.8
			$EX=\sum_{i=1}^{5}x_ip_i=1.3$		$EX^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2p_i=3.2$
			$DX=EX^2-(EX)^2=1.51$		

ჩამოვაყალიბოთ დისპერსიის თვისებები, რომლებიც მუდმივად გამოიყენება გადაწყვეტილებების მიღების ალბათურ-სტატისტიკურ მეთოდებში.

I. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია -- $Dc=0$.

II. $D(aX+b)=a^2DX$.

თეორემა 1. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მათი ჯამის (სხვაობის) დისპერსია თითოეულის დისპერსიების ჯამია

$$D(X+Y)=DX+DY \qquad (D(X-Y)=DX+DY).$$

თეორემა 2. თუ $X_1,X_2,...,X_n$ -- წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია (ე. ი. X_i და X_j დამოუკიდებელია, თუ $i\neq j$). მაშინ ჯამის დისპერსია ტოლია დისპერსიების ჯამის

$$D(X_1+X_2+\dots+X_n)=DX_1+DX_2+\dots+DX_n .$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ რაიმე A ხდომილება და X შემთხვევითი სიდიდე, ისეთი, რომ $X(\omega)=1$, თუ $\omega\in A$ და $X(\omega)=0$, თუ $\omega\notin A$ (ასეთ შემთხვევით სიდიდეს A ხდომილების **მახასიათებელი ფუნქცია** ეწოდება). ვაჩვენოთ, რომ

$$EX=P(A),\ DX=P(A)\cdot(1-P(A)).$$

გასაგებია, რომ ამ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება

x_i	1	0
p_i	$P(A)$	$1-P(A)$

ასეთი კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს **ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს** უწოდებენ.

მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვექნება

$$EX=1\cdot P(A)+0\cdot(1-P(A))=P(A).$$

ანალოგიურად, $Y=(X-EX)^2=(X-P(A))^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება:

y_i	$(1-P(A))^2$	$(P(A))^2$
p_i	$P(A)$	$1-P(A)$

შესაბამისად,

$$DX=EY=E(X-EX)^2=(1-P(A))^2\cdot P(A)+(P(A))\cdot(1-P(A))=$$
$$=P(A)\cdot(1-P(A))\cdot[1-P(A)+P(A)]=P(A)\cdot(1-P(A)). \quad \blacksquare$$

საშუალო კვადრატული გადახრა. მომენტები. სტანდარტიზაცია

განმარტება 1. X შემთხვევითი სიდიდის **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიიდან და აღინიშნება σ_x სიმბოლოთი:

$$\sigma_x=+\sqrt{DX} .$$

σ_x-ს ხშირად **სტანდარტულ გადახრასაც** უწოდებენ. გადახრის ამ მახასიათებლის შემოღება განპირობებულია იმით, რომ, განსხვავებით დისპერსიისაგან, იგი ზომის იგივე ერთეულებში გამოისახება, რაც X შემთხვევითი სიდიდე.

შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა დაახლოებით მიუთითებს იმაზე, თუ რამდენად განსხვავდება შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული მნიშვნელობა მათემატიკური ლოდინისაგან. კომერციული მოღვაწეობის ხშირ შემთხვევაში სტანდარტული გადახრა არის რისკის მახასიათებელი, მიუთითებს რა, თუ რამდენად განუსაზღვრელია სიტუაცია.

მაგალითი 1. მოცემულია ორი ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო 10 წლის განმავლობაში:

ტრესტი A	8.3	-6.2	20.9	-2.7	33.6	42.8	24.4	5.2	3.1	30.5
ტრესტი B	12.1	-2.8	6.4	12.2	27.8	25.3	18.2	10.7	-1.3	11.4

რომელი ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს?

ამოხსნა. თითოეული ტრესტისათვის გამოვთვალოთ შესწორებული შერჩევითი დისპერსია შევადაროთ ისინი ერთმანეთს. გვაქვს:

$$\bar{x}_A=16\,\%,\quad \bar{x}_B=12\,\%,\quad s_A^{'2}=280.34\,(\%)^2 \text{ და } s_B^{'2}=99.38\,(\%)^2.$$

როგორც ვხედავთ, $s_A^{'}>s_B^{'}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ A ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს (უფრო რისკიანია), ვიდრე B ტრესტი, იმავდროულად, $\bar{x}_A>\bar{x}_B$, ანუ A ტრესტის ამონაგები საშუალოდ უფრო მაღალია, ვიდრე B ტრეს-

ტისა. ეს ფაქტი სავსებით ეთანხმება ჩვენს ინტუიციას: ინვესტიცია, რომელიც დაკავშირებულია რისკის უფრო მაღალ დონესთან, უნდა იძლეოდეს უფრო მაღალ საშუალო ამონაგებსაც.

შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია. დავუშვათ, რომ X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინია EX, ხოლო საშუალო კვადარტული გადახრაა -- σ_x. განვიხილოთ ახალი შემთხვევითი სიდიდე

$$Y = \frac{X - EX}{\sigma_x} \quad . \qquad (1)$$

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებებიდან გამომდინარე ადვილი დასანახია, რომ $EY = 0$ და $DY = 1$.

(1) გარდაქმნას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის **ცენტრირება** (მათემატიკური ლოდინის გამოკლება) და **ნორმირება** (საშუალო კვავდრატულ გადახრაზე გაყოფა) ან უფრო მოკლედ -- X შემთხვევითი სიდიდის **სტანდარტიზაცია.**

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ სტანდარტიზაცია არის შემთხვევითი სიდიდის ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც გარკვეული მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის მქონე შემთხვევითი სიდიდე დაყავს ნოლოვანი მათემატიკური ლოდინისა და ერთეულოვანი დისპერსიის მქონე (ანუ სტანდარტულ) შემთხვევით სიდიდეზე.

მომენტები, ასიმეტრია და ექსცესი. X შემთხვევითი სიდიდის n **რიგის საწყისი მომენტი** ეწოდება სიდიდეს $\mu_n := EX^n$. შესაბამისად, პირველი რიგის მომენტი წარმოადგენს მათემატიკურ ლოდინს $\mu := \mu_1 = EX$.

X შემთხვევითი სიდიდის n **რიგის ცენტრალური მომენტი** ეწოდება სიდიდეს $\nu_n := E(X-\mu)^n$. ამ აღნიშვნებში გასაგებია, რომ მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი წარმოადგენს დისპერსიას $\sigma^2 := \nu_2 = DX$. შესაბამისად, $\sigma = \sigma_x$.

ცენტრალური მომენტების საშუალებით განიმარტება შემთხვევითი სიდიდის შემდეგი მნიშვნელოვანი რიცხვითი მახასიათებლები, კერძოდ, ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები.

ექსცესის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

$$e = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X-EX)^4}{[+\sqrt{E(X-EX)^2}\,]^4} - 3 .$$

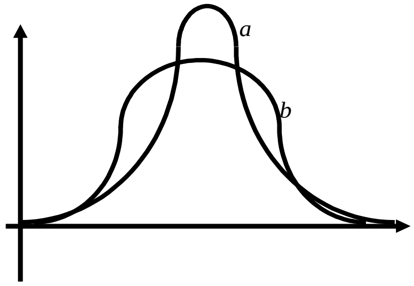
ექსცესის კოეფიციენტი ახასიათებს განაწილების კონცენტრაციის ხარისხს საშუალო მნიშვნელობის (μ-ს) ირგვლივ. რაც უფრო დიდია e, მით მეტადაა კონცენტრირებული განაწილება საშუალოს ირგვლივ, ანუ სიმკვრივეს μ წერტილში აქვს მაღალი პიკი, და პირიქით (იხ. ნახ. 1: შესაბამისად, a და b წირები).

ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

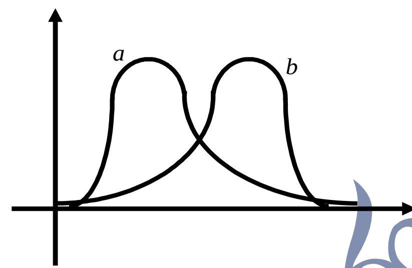
$$\alpha = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X-EX)^3}{[+\sqrt{E(X-EX)^2}\,]^3} .$$

ასიმეტრიის ზომას საფუძვლად უდევს საშუალო კუბური გადახრა, რომელიც საშუალებას იძლევა უფრო სრულად გავითვალისწინოთ შემთხვევითი სიდიდის დიდი გადახრები. განაწილების ასიმეტრიის შემთხვევაში განაწილების მრუდის ერთი მხარე იძლევა უფრო დიდ კუბურ გადახრას მეორე მხარესთან შედარებით და რადგან კუბური გადახრის დროს გადახრის ნიშანი ნარჩუნდება, ამიტომ კუბურ გადახრებს შორის განსხვავება აჩვენებს დადებით ან უარყოფით ასიმეტრიას.

თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილება სიმეტრიულია თავისი საშუალო მნიშვნელობის ($\mu = EX$ მათემატიკური ლოდინის) მიმართ, მაშინ X შემთხვევითი სიდიდის ყველა კენტი რიგის ცენტრალური მომენტი ნულის ტოლია ($\nu_{2n-1} = 0$). შესაბამისად, ამ შემთხვევაში ასიმეტრიის კოეფიციენტიც ნულის ტოლი იქნება. თუ $\alpha < 0$, მაშინ განაწილება მარცხნივ ასიმეტრიულია, ხოლო თუ $\alpha > 0$, მაშინ განაწილება მარჯვნივ ასიმეტრიულია. (იხ. ნახ. 2: შესაბამისად, a და b წირები).



ნახ. 1



ნახ. 2

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მოდის, მედიანის, კვანტილის, ზედა კრიტიკული წერტილის, ასიმეტრიისა და ექსცესის განმარტებები

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** ეწოდება იმ მნიშვნელობას, რომელსაც ყველაზე მეტი ალბათობა შესაბამება.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა** ეწოდება იმ უმცირეს არგუმენტს, როცა განაწილების ფუნქცია მეტია ან ტოლი ნახევარზე $Me = \min\{x : F_\xi(x) \ge 0.5\}$.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის α**-კვანტილი** ეწოდება იმ უმცირეს არგუმენტს, როცა განაწილების ფუნქცია მეტია ან ტოლი α-ზე $x_\alpha = \min\{x : F_\xi(x) \ge \alpha\}$.

შემთხვევითი სიდიდის **ზედა** α **კრიტიკული წერტილი** x^α ეწოდება მის $(1-\alpha)$-კვანტილს $x^\alpha = x_{1-\alpha}$.

შემთხვევითი სიდიდის **ასიმეტრიის კოეფიციენტი** ეწოდება $a = \dfrac{E(\xi - E\xi)^3}{\left(\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\right)^3}$.

შემთხვევითი სიდიდის **ექსცესის კოეფიციენტი** ეწოდება $e = \dfrac{E(\xi - E\xi)^4}{\left(\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\right)^4} - 3$.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიისა და ექსცესის გამოსათვლელი ფორმულები

თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$, მაშინ ასიმეტრიის კოეფიციენტი $a = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^3 p_k}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^2 p_k}\right)^3}$, ხოლო

ექსცესის კოეფიციენტი $e = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^4 p_k}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - E\xi)^2 p_k}\right)^4} - 4$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მოდის, მედიანის, კვანტილის, ზედა კრიტიკული წერტილის, ასიმეტრიისა და ექსცესის განმარტებები

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** ეწოდება განაწილების სიმკვრივის მაქსიმუმის წერტილს.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა** ეწოდება იმ უმცირეს არგუმენტს, როცა განაწილების ფუნქცია გაუტოლდება ნახევარს $Me = \min\{x : F_\xi(x) = 0.5\}$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის α**-კვანტილი** ეწოდება იმ უმცირეს არგუმენტს, როცა განაწილების გაუტოლდება α-ს $x_\alpha = \min\{x : F_\xi(x) = \alpha\}$.

შემთხვევითი სიდიდის **ზედა α კრიტიკული წერტილი** x^α ეწოდება მის $(1-\alpha)$-კვანტილს $x^\alpha = x_{1-\alpha}$.

შემთხვევითი სიდიდის **ასიმეტრიის კოეფიციენტი** ეწოდება $a = \dfrac{E(\xi - E\xi)^3}{\left(\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\right)^3}$.

შემთხვევითი სიდიდის **ექსცესის კოეფიციენტი** ეწოდება $e = \dfrac{E(\xi - E\xi)^4}{\left(\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\right)^4} - 3$.

ლექცია – მნიშვნელოვანი განაწილებები და მათი მახასიათებლები

ბერნულის განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

ბერნულის განაწილება პარამეტრით p აღინიშნება სიმბოლოთი $Bern(p)$ და განიმარტება: $P\{Bern(p) = k\} = p^k(1-p)^{1-k}$, $k = 0,1$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$EBern(p) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p,$$

$$DBern(p) = E(Bern(p))^2 - (EBern(p))^2 = EBern(p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

ბინომიალური განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

ბინომიალური განაწილება პარამეტრებით n და p აღინიშნება სიმბოლოთი $Bi(n,p)$ და განიმარტება: $P\{Bi(n,p) = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$.

ვატარებთ ერთიდაიგივე ცდას n-ჯერ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ცდის ერთ-ერთი შედეგის (აღვნიშნოთ ის პირობითად A-თი) მოხდენის ალბათობაა p, ანუ $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-p$. ბინომიალური კანონით განაწილებული იქნება შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აღნიშნავს n ცდაში A ხდომილების მოხდენათა რაოდენობას.

მეორეს მხრივ, $Bi(n,p)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ n ცალი დამოუკიდებელი ბერნულის $Bern(p)_i$ შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სახით, სადაც $Bern(p)_i=1$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა A ხდომილება და $Bern(p)_i=0$ წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამიტომ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობი ჯამის ლოდინისა და დისპერსიის თვისების ძალით:

$$EBi(n,p)=EBern(p)_1+\cdots+EBern(p)_n=\underbrace{p+\cdots+p}_{n-\text{ჯერ}}=np,$$

$$DBi(n,p)=DBern(p)_1+\cdots+DBern(p)_n=\underbrace{p(1-p)+\cdots+p(1-p)}_{n-\text{ჯერ}}=np(1-p),$$

$$MoBi(n,p)=[(n+1)p],\ MeBi(n,p)=[np].$$

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

ყუთში მოთავსებულია N ბურთი, რომელთაგან M თეთრია, ხოლო დანარჩენი $N-M$ კი შავი. ყუთიდან შემთხვევით (დაბრუნების გარეშე) იღებენ n რაოდენობის ბურთს. ალბათობა იმისა, რომ მასში m ცალი იქნება თეთრი და $n-m$ კი შავი ბურთი გამოითვლება ფორმულით $\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, $m=0,1,...,\min(M,n)$. ამ ალბათობების ერთობლიობას ეწოდება **ჰიპერგეომეტრილი** განაწილება და შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდე აღინიშნება სიმბოლოთი $Hi(N,M,n)$, ე.ი.

$$P\{Hi(N,M,n)=m\}=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,...,\min(M,n).$$

$$EHi(N,M,n)=n\frac{M}{N},\quad DHi(N,M,n)=n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}.$$

$$MoHi(N,M,n)=\left[\frac{(M+1)(n+1)}{N+2}\right].$$

გეომეტრიული განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

გეომეტრიული განაწილება პარამეტრით p აღინიშნება სიმბოლოთი $Geo(p)$ და განიმარტება: $P\{Geo(p)=k\}=pq^{k-1}$, $k=1,2,3...$.

თუ ვისარგებლებთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულითა და კრებადი მწკრივის გაწარმოების წესით, გვექნება:

$$EGeo(p)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'_q=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'_q=p(\frac{q}{1-q})'_q=p\frac{1-q+q}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

$$DGeo(p)=EGeo(p)^2-(EGeo(p))^2=EGeo(p)(Geo(p)-1)+EGeo(p)-(\frac{1}{p})^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)pq^{k-1}+\frac{1}{p}-(\frac{1}{p})^2=pq\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)''_{qq}+\frac{1}{p}-(\frac{1}{p})^2=pq(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)''_{qq}+\frac{1}{p}-(\frac{1}{p})^2=$$

$$= pq\left(\frac{q}{1-q}\right)''_{qq} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = pq\left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2}\right)'_q + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = pq\frac{2(1-q)}{(1-q)^4} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2},$$

$$MoGeo(p) = 1, \quad MeGeo(p) = \left[\frac{-1}{\log_2(1-p)}\right]$$

ვატარებთ ერთიდაიგივე ცდას ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ცდის ერთ-ერთი შედეგის (აღვნიშნოთ ის პირობითად A-თი) მოხდენის ალბათობაა p, ანუ $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p \equiv q$. გეომეტრიული კანონით განაწილებული იქნება შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აღნიშნავს იმ ცდის ნომერს, რომელშიც პირველად მოხდება A ხდომილება.

პუასონის განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

პუასონის განაწილება პარამეტრით λ აღინიშნება სიმბოლოთი $Po(\lambda)$ და განიმარტება: $P\{Po(\lambda) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

თუ ვისარგებლებთ წარმოდგენით $e^x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$, მაშინ გვექნება:

$$EPo(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda .$$

$$DPo(\lambda) = EPo(\lambda)^2 - (EPo(\lambda))^2 = EPo(\lambda)(Po(\lambda)-1) + EPo(\lambda) - \lambda^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

$$MoPo(\lambda) = [\lambda] - 1, \quad MePo(\lambda) = \left[\lambda + \frac{1}{3} - \frac{0.02}{\lambda}\right].$$

ე. ი. პუასონის განაწილების როგორც მათემატიკური ლოდინი, ისე დისპერსია ტოლია ამ განაწილების λ პარამეტრის.

პუასონის განაწილება ადექვატური მოდელია იმ ხდომილებებისათვის, რომლებიც:

- ხდებიან შემთხვევით სივრცეში ან დროში;
- ხდებიან ცალ-ცალკე (ერთდროულად მოხდენა არ შეიძლება);
- ხდებიან დამოუკიდებლად, და
- ხდებიან მუდმივი ინტენსივობით (ხდომილებათა რაოდენობა მოცემულ დროის ინტერვალში ამ ინტერვალის სიგრძის პროპორციულია).

თანაბარი განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases}$$

სადაც a და b $(a < b)$ ნებისმიერ რიცხვებია, მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება თანაბარი კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება სიმბოლოთი $U([a,b])$. $U([a,b])$-ს განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$F_{U([a,b])}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

$U([a,b])$-ს რიცხვითი მახასიათებლებია:

$$EU([a,b])=MeU([a,b])=\frac{a+b}{2},\ \ DU([a,b])=\frac{(a-b)^2}{12},\ \ x_\alpha=a+\alpha(b-a).$$

გამოვთვალოთ მედიანა. ამოვხსნათ განტოლება $\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{1}{2}$, $x-a=\dfrac{1}{2}(b-a)$, $x=\dfrac{a+b}{2}$.

გამოვთვალოთ α-კვანტილი. ამოვხსნათ განტოლება $\dfrac{x-a}{b-a}=\alpha$, $x-a=\alpha(b-a)$, $x=a+\alpha(b-a)$.

ექსპონენციალური განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

სადაც λ დადებითი რიცხვია, მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება ექსპონენციალური (ანუ მაჩვენებლიანი) კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე პარამეტრით λ და აღინიშნება სიმბოლოთი $Exp(\lambda)$. $Exp(\lambda)$-ს განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$F_{Exp(\lambda)}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$Exp(\lambda)$-ის რიცხვითი მახასიათებლებია:

$$E(Exp(\lambda))=\frac{1}{\lambda},\ \ D(Exp(\lambda))=\frac{1}{\lambda^2},\ \ Me(Exp(\lambda))=\frac{\ln 2}{\lambda},\ \ Mo(Exp(\lambda))=0,\ \ x_\alpha=-\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}.$$

გამოვთვალოთ მედიანა. ამოვხსნათ განტოლება $1-e^{-\lambda x}=\dfrac{1}{2}$, $e^{-\lambda x}=\dfrac{1}{2}$, $-\lambda x=-\ln 2$, $x=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

გამოვთვალოთ α-კვანტილი. ამოვხსნათ განტოლება $1-e^{-\lambda x}=\alpha$, $e^{-\lambda x}=1-\alpha$, $-\lambda x=\ln(1-\alpha)$, $x=-\dfrac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}$.

ნორმალური განაწილება და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

სადაც a ნებისმიერი რიცხვია, ხოლო σ დადებითი რიცხვი, მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდეს ეწოდება ნორმალური (ანუ გაუსის) კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე პარამეტრებით a და σ^2 და აღინიშნება სიმბოლოთი $N(a,\sigma^2)$ (თუ $a=0$ და $\sigma^2=1$, მაშ-

ინ შესაბამის განაწილებას ეწოდება სტანდარტული ნრრმალური განაწილება და აღინიშნება სიმბოლოთი $N(0,1)$). $N(a,\sigma^2)$-ის რიცხვითი მახასიათებლებია:

$$EN(a,\sigma^2)=MoN(a,\sigma^2)=MeN(a,\sigma^2)=a\,,\ DN(a,\sigma^2)=\sigma^2\,.$$

აღვნიშნოთ x_α^{a,σ^2} სიმბოლოთი $N(a,\sigma^2)-$ის α რიგის კვანტილი (შესაბამისად. $x_\alpha^{0,1}$ იქნება $N(0,1)-$ის α რიგის კვანტილი). სამართლიანია თანაფარდობა $x_\alpha^{a,\sigma^2}=\sigma\cdot x_\alpha^{0,1}+a$ ($x_\alpha^{0,1}=(x_\alpha^{a,\sigma^2}-a)/\sigma$).

$N(a,\sigma^2)$ ღებულობს მნიშვნელობას $\langle c,d\rangle$ ინტერვალიდან ალბათობით $P\{N(a,\sigma^2)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi(\dfrac{d-a}{\sigma})-\Phi(\dfrac{s-a}{\sigma})$, სადაც Φ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა ($\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$).

ხი-კვადრატ, სტიუდენტისა და ფიშერის განაწილებები

n ცალი სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის კვადრატების ჯამს ეწოდება **ხი-კვადრატ კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე თავისუფლების ხარისხით** n და აღინიშნება სიმბოლოთი $\chi^2(n)$.

სტიუდენტის განაწილება თავისუფლების ხარისხით n აღინიშნება სიმბოლოთი $t(n)$ და ეწოდება შეფარდებას $t(n)=\dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$, სადაც $N(0,1)$ და $\chi^2(n)$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

ფიშერის განაწილება თავისუფლების ხარისხებით n **და** m აღინიშნება სიმბოლოთი $F(n,m)$ და ეწოდება შეფარდებას $F(n,m)=\dfrac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}$, სადაც $\chi^2(n)$ და $\chi^2(m)$ დამოუკიდებელი ხი-კვადრატ შემთხვევითი სიდიდეებია.

ლექცია – შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი მახასიათებლები

განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია, კავშირი განაწილების კანონსა და განაწილების ფუნქციას შორის

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონი** ეწოდება მისი მნიშვნელობებისა და ამ მნიშვნელობების მიღების ალბათობების ერთობლიობას:

$$p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}\,.$$

შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია** ეწოდება ფუნქციას

$$F_\xi(x):=P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}\,.$$

ა) თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$, მაშინ მისი განაწილების ფუნქცია იქნება:

$$F_\xi(\omega)=\sum_{x_k\le x}P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}\,;$$

ბ) თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F_\xi(x):=P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}$, მაშინ მისი განაწილების კანონი იქნება:

$$p_k = F_\xi(x_k) - F_\xi(x_{k-1}) = \Delta F_\xi(x_k),$$

ანუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს თავის კონკრეტულ მნიშვნელობას ტოლია ამ მნიშვნელობაზე განაწილების ფუნქციის ნახტომის სიდიდის (სადაც იგულისხმება, რომ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები დალაგებულია ზრდადობის მიხედვით: $x_1 < x_2 < \cdots$ და $F(x_0) \equiv 0$).

მართლაც,

ა) ცხადია, რომ ხდომილება $\{\omega : \xi(\omega) \le x\}$ წარმოიდგინება უთავსებადი $\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$ ხდომილებების გაერთიანების სახით $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = \bigcup_{x_k \le x} \{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$. ამიტომ უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = P\{\bigcup_{x_k \le x} (\omega : \xi(\omega) = x_k)\} = \sum_{x_k \le x} P(\omega : \xi(\omega) = x_k) = \sum_{x_k \le x} p_k .$$

ბ) ცხადია, რომ $\{\omega : \xi(\omega) = x_k\} = \{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) \le x_{k-1}\}$. ამიტომ სხვაობის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = x_k\} = P\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} - P\{\omega : \xi(\omega) \le x_{k-1}\} = F(x_k) - F(x_{k-1}) := \Delta F(x_k)).$$

განაწილების ფუნქციის არაკლებადობა

განაწილების ფუნქცია **არაკლებადია**: თუ $x' < x''$, მაშინ $F_\xi(x') \le F_\xi(x'')$.

მართლაც, თუ $x' < x''$, მაშინ ხდომილება $\{\omega : \xi(\omega) \le x'\}$ იწვევს ხდომილებას $\{\omega : \xi(\omega) \le x''\}$, ამიტომ გვაქვს:

$$F_\xi(x') = P\{\omega : \xi(\omega) \le x'\} \le P\{\omega : \xi(\omega) \le x''\} = F_\xi(x'') .$$

განაწილების ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობა

განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან: $F(x) = F(x+0) := \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n})$.

ვისარგებლოთ ე.წ. **ალბათობის უწყვეტობის თვისებით**: თუ $\{A_n\}_{n\ge1}$ ხდომილებათა კლებადი მიმდევრობაა $A_n \supset A_{n+1}$, მაშინ ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) .$$

აღვნიშნოთ $A_n := \{\omega : \xi(\omega) \le x + \frac{1}{n}\}$, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) \le x + \frac{1}{n}\} = \{\omega : \xi(\omega) \le x\}$, ადვილად დავრწმუნდებით განაწილების ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობაში:

$$F(x+0) = \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} P\{\omega : \xi(\omega) \le x + \frac{1}{n}\} = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) \le x + \frac{1}{n}\}) = P\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = F(x) .$$

შემთხვევითი სიდიდის ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა

ა) თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$, მაშინ მისი $\langle a, b \rangle$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება:

$$P\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=\sum_{x_k\in\langle a,b\rangle}p_k\,;$$

ბ) თუ მოცემულია უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F_\xi(x):=P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}$, მაშინ მისი $\langle a,b\rangle$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება:

$$P\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=F_\xi(b)-F_\xi(a)\,.$$

მართლაც,

ა) ცხადია, რომ ხდომილება $\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}$ წარმოიდგინება უთავსებადი $\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$ ხდომილებების გაერთიანების სახით

$$\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=\bigcup_{x_k\in\langle a,b\rangle}\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}\,.$$

ამიტომ უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=P\Big(\bigcup_{x_k\in\langle a,b\rangle}\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}\Big)=\sum_{x_k\in\langle a,b\rangle}P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}=\sum_{x_k\in\langle a,b\rangle}p_k\,;$$

ბ) ცხადია, რომ ხდომილება $\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}$ წარმოიდგინება ხდომილებათა სხვაობის სახით:

$$\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,b\rangle\}\setminus\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,a)\}\,,$$

როცა $\langle a,b\rangle$ ინტერვალი მარცხნიდან ჩაკეტილია (შესაბამისად,

$$\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,b\rangle\}\setminus\{\omega:\xi(\omega)\in(-\infty,a]\}\,,$$

როცა $\langle a,b\rangle$ ინტერვალი მარცხნიდან ღიაა). ორივე შემთხვევაში ($F_\xi(x)$ უწყვეტობის ძალით), სხვაობის ალბათობის ფორმულა გვაძლევს საძიებელ თანაფარდობას:

$$P\{\omega:\xi(\omega)\in\langle a,b\rangle\}=F_\xi(b)-F_\xi(a)\,.$$

კავშირი ორგანზომილებიან განაწილების კანონსა და მარგინალურ განაწილების კანონებს შორის

ა) თუ მოცემულია **ორგანზომილებიანი განაწილების კანონი**

$$p_{i,j}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}\,,$$

მაშინ მარგინალური განაწილების კანონი, მაგალითად ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის იქნება: $p_i=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}=\sum_j p_{i,j}\,;$

ბ) თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $p_{i,j}=p_i\cdot q_j$, სადაც $q_j=P\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}$. საზოგადოდ, კი $p_{i,j}=p_i\cdot P\{\omega:\eta(\omega)=y_j\,|\,(\omega:\xi(\omega)=x_i)\}$.

მართლაც,

ა) დემორგანის კანონისა და ჯამის ალბათობის ფორმულის ძალით ვღებულობთ:

$$p_i=P\{\xi=x_i\}=P\{(\xi=x_i)\cap[\bigcup_j(\eta=y_j)]\}=P\{\bigcup_j[(\xi=x_i)\cap(\eta=y_j)]\}=$$

$$=\sum_j P\{(\xi=x_i)\cap(\eta=y_j)\}=\sum_j p_{i,j}\,;$$

ბ) ξ და η **შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი**, თუ ნებისმიერი i,j-სათვის დამოუკიდებელია ხდომილებები: $\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}$ და $\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}$, ანუ

$$p_{i,j}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}P\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}=p_i\cdot q_j.$$

საზოგადოდ ვსარგებლობთ ნამრავლის ალბათობის ფორმულით: $P(AB)=P(A)P(B|A)$ და ვღებულობთ:

$$p_{i,j}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}=$$
$$=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}P\{\omega:\eta(\omega)=y_j\,|\,(\omega:\xi(\omega)=x_i)\}.$$

კავშირი ორგანზომილებიან განაწილების ფუნქციასა და მარგინალურ განაწილების ფუნქციებს შორის

ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების **ორგანზომილებიანი (ანუ ერთობლივი) განაწილების ფუნქცია** ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციას

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=P\{\omega:\xi(\omega)\le x,\eta(\omega)\le y\}.$$

ორგანზომილებიანი განაწილების კანონიდან თითოეული შემთხვევითი სიდიდის (მარგინალური) განაწილების კანონები მიიღება შემდეგნაირად:

$$F_{\xi,\eta}(x,+\infty)=F_\xi(x) \quad \text{და} \quad F_{\xi,\eta}(+\infty,y)=F_\eta(y).$$

მართლაც,

$$F_{\xi,\eta}(x,+\infty)=P\{\omega:\xi(\omega)\le x,\eta(\omega)\le+\infty\}=P\{(\omega:\xi(\omega)\le x)\cap\Omega\}=P\{\omega:\xi(\omega)\le x\}=F_\xi(x).$$

რაც შეეხება პირიქით, თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y).$$

მათემატიკური ლოდინის განმარტება და თვისებები

თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი ასე განიმარტება:

$$E\xi=\sum_k x_k p_k.$$

თვისებები:

1. $Ec=c$, სადაც c მუდმივია;
2. $E(c\xi)=cE\xi$, სადაც c მუდმივია;
3. $E(\xi\pm\eta)=E\xi\pm E\eta$;
4. თუ $\xi\ge0$, მაშინ $E\xi\ge0$;
5. თუ h დეტერმინისტული ფუნქციაა, მაშინ $Eh(\xi)=\sum_k h(x_k)p_k$;
6. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდებია, მაშინ $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$.

დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის ლოდინის ფორმულის გამოყვანა

თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდებია, მაშინ მათი ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი თითოეულის მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია:

$$E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია $x_1,x_2,\dots,x_n$, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდე კი ღებულობს მნიშვნელობებს $y_1,y_2,\dots,y_m$. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A_i=\{\xi=x_i\}$ და $B_j=\{\eta=y_j\}$. მაშინ ცხადია, რომ

$A_iB_j=\{\xi=x_i,\eta=y_j\}$. შესაბამისად, შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობის განმარტების თანახმად: $P(A_iB_j)=P(A_i)P(B_j)$. ამიტომ მათემატიკური ლოდინის განმარტების საფუძველზე გვაქვს:

$$E(\xi\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jP(A_iB_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jP(A_i)P(B_j)=\sum_{i=1}^{n}[x_iP(A_i)]\cdot\{\sum_{j=1}^{m}y_jP(B_j)\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[x_iP(A_i)]\cdot\{E\eta\}=E\xi\cdot E\eta.$$

დისპერსიის განმარტებები და გამოსათვლელი ფორმულები

ξ **შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია** აღინიშნება $D\xi$ სიმბოლოთი და განიმარტება როგორც $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$ ან რაც ეკვივალენტურია $D\xi=E\xi^2-E(\xi)^2$.

შესაბამისად, გვაქვს დისპერსიის ორი გამოსათვლელი ფორმულა. თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$,

მაშინ დისპერსია გამოითვლება: $D\xi=\sum_{k=1}^{n}(x_k-E\xi)^2p_k$ ან $D\xi=\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2p_k-\left(\sum_{k=1}^{n}x_kp_k\right)^2$.

დისპერსიის ორი განმარტების ეკვივალენტურობა

I) $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$; **II)** $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით ადვილად დავინახავთ, რომ:

$$D\xi=E(\xi-E\xi)^2=E[\xi^2-2\xi E\xi+(E\xi)^2]=E\xi^2-2E\xi\cdot E\xi+(E\xi)^2=E\xi^2-(E\xi)^2.$$

კოვარიაციის განმარტებები, გამოსათვლელი ფორმულები, თვისებები

ξ და η **შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაციის ფუნქცია** აღინიშნება $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ სიმბოლოთი და განიმარტება როგორც $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]$ ან რაც ეკვივალენტურია $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta$.

შესაბამისად, გვაქვს კოვარიაციის ორი გამოსათვლელი ფორმულა. თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი $p_{i,j}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}$ ($i=1,...,n$, $j=1,...,m$), მაშინ კოვარიაცია გამოითვლება:

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-E\xi)^2(y_j-E\eta)^2p_{i,j}\quad\text{ან}\quad\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_{i,j}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}y_jq_j\right),$$

სადაც $p_i=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}$ და $q_j=P\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}$.

თვისებები:

1. $\mathrm{cov}(\xi,\xi)=D\xi$;
2. $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(\eta,\xi)$;
3. $\mathrm{cov}(c\cdot\xi,\eta)=c\cdot\mathrm{cov}(\xi,\eta)$;
4. $\mathrm{cov}(\xi\pm\eta,\varsigma)=\mathrm{cov}(\xi,\varsigma)\pm\mathrm{cov}(\eta,\varsigma)$;
5. $D(\xi\pm\eta)=D\xi\pm2\,\mathrm{cov}(\xi,\eta)+D\eta$;
6. $|\mathrm{cov}(\xi,\eta)|\le\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$.

კოვარიაციის ორი განმარტების ეკვივალენტურობა

I) $\text{cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]$; II) $\text{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta$.

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით ადვილად დავინახავთ, რომ:

$$\text{cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]=E[\xi\cdot\eta-\xi\cdot E\eta-\eta\cdot E\xi+E\xi\cdot E\eta]=$$
$$=E(\xi\cdot\eta)-E\eta\cdot E\xi-E\xi\cdot E\eta+E\xi\cdot E\eta=E(\xi\cdot\eta)-E\xi\cdot E\eta.$$

კორელაციის კოეფიციენტი

ξ და η **შემთხვევითი სიდიდეებს შორის კორელაციის კოეფიციენტი** აღინიშნება $\rho(\xi,\eta)$ სიმბოლოთი და განიმარტება როგორც $\rho(\xi,\eta)=\dfrac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$.

კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები:

1. $-1\le\rho(\xi,\eta)\le1$;
2. $|\rho(\xi,\eta)|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\eta=k\xi+b$. ამასთანავე თუ $\rho(\xi,\eta)=1$, მაშინ $k>0$, ხოლო თუ $\rho(\xi,\eta)=-1$, მაშინ $k<0$.
3. ξ და η თუ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\rho(\xi,\eta)=1$.

განმარტება. ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **არაკორელირებული** თუ $\rho(\xi,\eta)=0$ (ან რაც იგივეა $\text{cov}(\xi,\eta)=0$).

შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა და არაკორელირებულობა

განმარტება 1. ξ და η დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **დამოუკიდებელი**, თუ ნებისმიერი i,j-სათვის დამოუკიდებელია ხდომილებები: $\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}$ და $\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}$, ანუ $p_{i,j}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}=P\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}P\{\omega:\eta(\omega)=y_j\}=p_i\cdot q_j$

(საზოგადოდ, შემთხვევითი დიდიდეები დამოუკიდებელია, თუ $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$)

განმარტება 2. ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **არაკორელირებული** თუ $\rho(\xi,\eta)=0$ (ან რაც იგივეა $\text{cov}(\xi,\eta)=0$).

დამოუკიდებლობა იწვევს არაკორელირებულობას, მაგრამ საზოგადოდ არა პირიქით.

შემთხვევით სიდიდეთა ჯამისა და სხვაობის დისპერსია

ა) ზოგადი შემთხვევა $D(\xi\pm\eta)=D\xi\pm2\text{cov}(\xi,\eta)+D\eta$

ბ) თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მათი ჯამის ან სხვაობის დისპერსია თითოეულის დისპერსიების ჯამია

$$D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta.$$

დამტკიცება. ა) მაშინ მათემატიკური ლოდინის თვისებების ძალით, ვღებულობთ:

$$D(\xi\pm\eta)=E[(\xi\pm\eta)-E(\xi\pm\eta)]^2=E[(\xi-E\xi)\pm(\eta-E\eta)]^2=$$
$$=E[(\xi-E\xi)^2\pm2(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)+(\eta-E\eta)^2]=$$
$$=E(\xi-E\xi)^2\pm2E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]+E(\eta-E\eta)^2=D\xi\pm2\text{cov}(\xi,\eta)+D\eta$$

ბ) თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\text{cov}(\xi,\eta)=0$, ამიტომ ა) პუნქტის თანახმად გვაქვს: $D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta$.

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის განაწილების კანონი და მათემატიკური ლოდინი

თუ h დეტერმინისტული ფუნქციაა, ხოლო რაიმე ξ შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ $\eta(\omega)=h(\xi(\omega))$ აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდე იქნება. თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$, მაშინ ცხადია, რომ $\eta(\omega)=h(\xi(\omega))$ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები იქნება $h(x_k))$ და $P\{\omega:h(\xi(\omega))=h(x_k)\}=p_k$. თუ კი ახალი შემთხვევითი სიდიდის რომელიმე მნიშვნელობები ერთმანეთს დაემთხვა, მაშინ მხოლოდ ერთჯერ ამოვწერთ ამ მნიშვნელობას და შესაბამის ალბათობებს შევკრიბავთ.

$h(\xi(\omega))$-ს მათემატიკური ლოდინი ასე გამოითვლება:

$$Eh(\xi)=\sum_{k=1}^{n}h(x_k)p_k .$$

პირობითი განაწილება. რეგრესიის მრუდი

თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი $p_k=P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}$ და რაიმე B ($P(B)>0$) ხდომილებაა, მაშინ $P\{\omega:\xi(\omega)=x_k \mid B\}$ ალბათობების ერთობლიობას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი განაწილება** B ხდომილების მიმართ.

ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი მათემატიკური ლოდინი** B ხდომილების მიმართ ეწოდება სიდიდეს

$$E(\xi\mid B)=\sum_{k=1}^{n}x_k P\{\xi=x_k\mid B\} .$$

ξ შემთხვევითი სიდიდის η შემთხვევით სიდიდეზე **რეგრესიის მრუდი (ფუნქცია)** ეწოდება სიდიდეს $R(y)=E(\xi\mid\eta=y)$.

დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულის განაწილების კანონი, როცა დისპერსია ა) ცნობილია; ბ) უცნობია

ა) თუ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული $N(a,\sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\dfrac{\bar{\xi}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\cong N(0,1)$, სადაც $\bar{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ და $N(0,1)$ სტანდარტული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა.

ბ) თუ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული $N(a,\sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\dfrac{\bar{\xi}-a}{S'/\sqrt{n}}\cong t(n-1)$, სადაც $\bar{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $S'=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}$ და $t(n-1)$ სტიუდენტის განაწილებაა თავისუფლების ხარისხით $n-1$.

დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულისგან ჯამური კვადრატული გადახრის განაწილების კანონი, როცა საშუალო ა) ცნობილია; ბ) უცნობია

ა) თუ $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული $N(a,\sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)^2}{\sigma^2}\cong\chi^2(n)$, სადაც $\chi^2(n)$ -- ხი-კვადრატ განაწილებაა თავისუფლების ხარისხით n.

ბ) თუ $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული $N(a,\sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\sigma^2}\cong\chi^2(n-1)$, სადაც $\bar{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, ხოლო $\chi^2(n-1)$ -- ხი-კვადრატ განაწილებაა თავისუფლების ხარისხით $n-1$.

ლექცია – ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები

ჩებიშევის უტოლობა

ჩებიშევის უტოლობა აფასებს შემთხვევითი სიდიდის გადახრას თავისი მათემატიკური ლოდინიდან. თუ ξ რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$P(|\xi-E\xi|\ge\varepsilon)\le D\xi/\varepsilon^2 \text{ ანუ } P(|\xi-E\xi|<\varepsilon)\ge 1-D\xi/\varepsilon^2 .$$

დიდ რიცხვთა კანონი

ჩებიშევის უტოლობა საშუალებას იძლევა დავამტკიცოთ ფუნდამენტური შედეგი, რომელიც საფუძვლად უდევს მათემატიკურ სტატისტიკას – ე. წ. *დიდ რიცხვთა კანონი.* ამ შედეგის თანახმად შერჩევითი მახასიათებლები ცდების (ექსპერიმენტების) რიცხვთა ზრდისას უახლოვდება თეორიულ მახასიათებლებს, რაც საშუალებას იძლევა ამა თუ იმ რეალური მოვლენის ალბათური მოდელების პარამეტრები შევაფასოთ ცდების მიერ მიღებული შედეგების გამოყენებით.

განმარტება. ამბობენ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1,\xi_2,\dots$ აკმაყოფილებს **დიდ რიცხვთა კანონს**, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის სამართლიანია თანაფარდობა:

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n}-\frac{E\xi_1+E\xi_2+\dots+E\xi_n}{n}|<\varepsilon\}=1.$$

ჩებიშევის თეორემა. თუ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1,\xi_2,\dots$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია ($E\xi_i<\infty$) და არსებობს ისეთი რიცხვი C, რომ $D\xi_i\le C$, $i=1,2,\dots$, მაშინ ეს მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ: $\eta_n=(\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n)/n$. მაშინ ცხადია, რომ:

$$D\eta_n=(D\xi_1+D\xi_2+\dots+D\xi_n)/n^2\le(\underbrace{C+C+\dots+C}_{n-\text{ჯერ}})/n^2=nC/n^2=C/n .$$

ამიტომ, ჩებიშევის უტოლობის თანახმად, გვაქვს:

$$P(|\eta_n-E\eta_n|<\varepsilon)\ge 1-D\eta_n/\varepsilon^2\ge 1-C/n\varepsilon^2\to 1,\ \text{როცა}\ n\to\infty,$$

ანუ სამართლიანია დიდ რიცხვთა კანონი.

ბერნულის თეორემა. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებიაა ($P\{\xi_i = k\} = p^k (1-p)^{1-k}$, $k = 0{,}1$), მაშინ ეს მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს, კერძოდ:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} p, \text{ როცა } n \to \infty.$$

დამტკიცება. როგორც ცნობილია: $EBern(p) = p$, $DBern(p) = p(1-p)$. ე. ი. შესრულებულია ჩებიშევის თეორემის პირობები, სადაც $C = p(1-p)$. ამიტომ, იმის გავითვალისწინებთ, რომ $E\eta_n = (E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_n)/n = (\underbrace{p + p + \cdots + p}_{n-\text{ჯერ}})/n = p$, ჩებიშევის თეორემის თანახმად, დავასკვნით, რომ ბერნულის თეორემა სამართლიანია.

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა

დიდ რიცხვთა კანონი არ იკვლევს შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონის სახეს. ეს საკითხი შეისწავლება თეორემების ჯგუფში, რომლებსაც **ცენტრალური ზღვარითი თეორემა** ეწოდება. ეს თეორემა ამტკიცებს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონი, რომელთაგან ცალკეულ შესაკრებს შეიძლება ჰქონდეს განსხვავებული განაწილება, უახლოვდება ნორმალურს შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რიცხვის შემთხვევაში. ამით აიხსნება ნორმალური განაწილების კანონის უაღრესად დიდი მნიშვნელობა პრაქტიკულ გამოყენებებში.

განმარტება. ამბობენ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ აკმაყოფილებს **ცენტრალურ ზღვარით თეორემას**, თუ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le x\} = \Phi(x),$$

სადაც $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, ხოლო $\Phi(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია.

თეორემა. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა, ერთიდაიგივე განაწილების კანონით, მათემატიკური ლოდინით a და დისპერსიით σ^2, მაშინ n-ის უსასრულოდ ზრდისას სტანდარტიზებული $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ ჯამის განაწილების კანონი უახლოვდება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილების კანონს:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x\} = \Phi(x),$$

სადაც $\Phi(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია.

მუავრ-ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური თეორემა

მუავრ-ლაპლასის ლოკალური თეორემა. მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემის პირობებში (ანუ ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში და როცა $np > 15$) $p_n(k)$ -- ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება n ცდაში მოხდება ზუსტად k –ჯერ, შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

სადაც $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, ხოლო $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა. თუ ტარდება n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა p, მაშინ ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში, თუ ამასთანავე $np>15$, სამართლიანია თანაფარდობა:

$$P\{a<S_n\le b\}\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

სადაც S_n – A ხდომილების მოხდენათა რიცხვია n ცდაში, $q=1-p$, ხოლო $\Phi(x)$ კი სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა.

ლექცია – სტატისტიკის ძირითადი ცნებები, წერტილოვანი შეფასებები

პოპულაციის შერჩევითი მახასიათებლები და მათი განაწილების კანონები

პოპულაცია შედგება ყველა იმ ობიექტისაგან, რომელიც შეისწავლება (ის არის დაკვირვების ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე).

უმეტეს შემთხვევაში, რიგი მიზეზების გამო (მაგალითად, დანახარჯების სიძვირე, დროის სიმცირე, პოპულაციის მოცულობის სიდიდე, სამედიცინო პრობლემები და ა. შ.) მკვლევარს არა აქვს შესაძლებლობა სტატისტიკური კვლევისათვის გამოიყენოს მთლიანი პოპულაცია. ამიტომ მკვლევარი, როგორც წესი, იყენებს შერჩევას.

შერჩევა არის ობიექტების გარკვეული ჯგუფი (ნაწილი) ამორჩეული პოპულაციიდან.

შერჩევითი საშუალო: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; **შერჩევითი დისპერსია:** $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$;

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია: $s'^2=\dfrac{n}{n-1}s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

შერჩევითი სტანდარტული გადახრა (შესაბამისად, **შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა**) ეწოდება არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან $s=\sqrt{s^2}$ (შესაბამისად, შესწორებული შერჩევითი დისპერსიიდან $s'=\sqrt{s'^2}$).

შერჩევითი ასიმეტრიის კოეფიციენტი	შერჩევითი ექსცესის კოეფიციენტი
$a_{შერ}=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^3}$	$e_{შერ}=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^4}-3$

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$r_{xy}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{s_x s_y},\qquad \text{სადაც}\qquad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ ;$$

$$s_x=\sqrt{s_x^{\,2}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\ ;\ s_y=\sqrt{s_y^{\,2}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}\ .$$

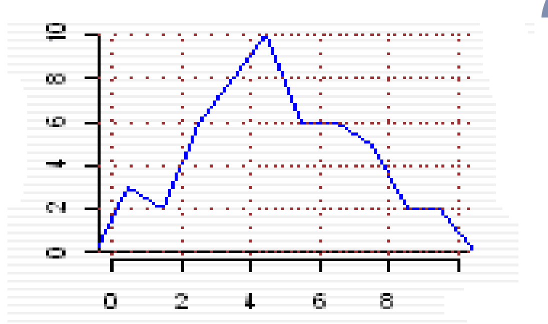
თუ $X_1, X_2, ..., X_n$ წარმოადგენს შერჩევას ნორმალური პოპულაციიდან, $X_i \cong N(a,\sigma^2)$ $(i=1,2,...,n)$, მაშინ $\overline{X}$ და S^2 ($S^{'2}$) დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და

$$\overline{X} \cong N(a,\sigma^2/n);\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\sigma^2 \cong \chi^2(n);\ \frac{(n-1)S^{'2}}{\sigma^2} \cong \chi^2(n-1);$$

$$Z=\frac{\overline{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \cong N(0,1);\ T=\frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n-1}}=\frac{\overline{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}} \cong t(n-1).$$

ემპირიული განაწილების ფუნქცია

გამოსაკვლევი შემთხვევითი სიდიდის თვალსაჩინო წარმოსახვისათვის შერჩევის მიხედვით შესაძლებელია აიგოს სხვადასხვა გრაფიკები. ერთ-ერთიასეთი გრაფიკია – **სიხშირეთა პოლიგონი**: ტეხილი, რომლის მონაკვეთები აერთებენ წერტილებს კოორდინატებით $(x_1, n_1), (x_2, n_2),..., (x_k, n_k)$, სად-აც x_i გადაიზომება აბსცისთა ღერძზე, ხოლო n_i – ორდინატთა ღერძზე. თუ ორდინატთა ღერძზე გადავზომავთ არ აბსულუტურ (n_i), არამედ ფარდობით (w_i) სიხშირეებს, მაშინ მივიღებთ **გარდობით სიხშირეთა პოლიგონს:**



შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის ანალოგიით, შეიძლება განსაზღრულ იქნეს გარკვეული ფუნქცია, კერძოდ, $X \le x$ ხდომილების ფარდობითი სიხშირე.

განმარტება. შერჩევით (ემპირიულ) განაწილების ფუნქციას უწოდებენ ფუნქციას $F^*(x)$, რომელიც x–ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის განსაზღვრავს $X \le x$ ხდომილების ფარდობით სიხშირეს. ამრიგად,

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

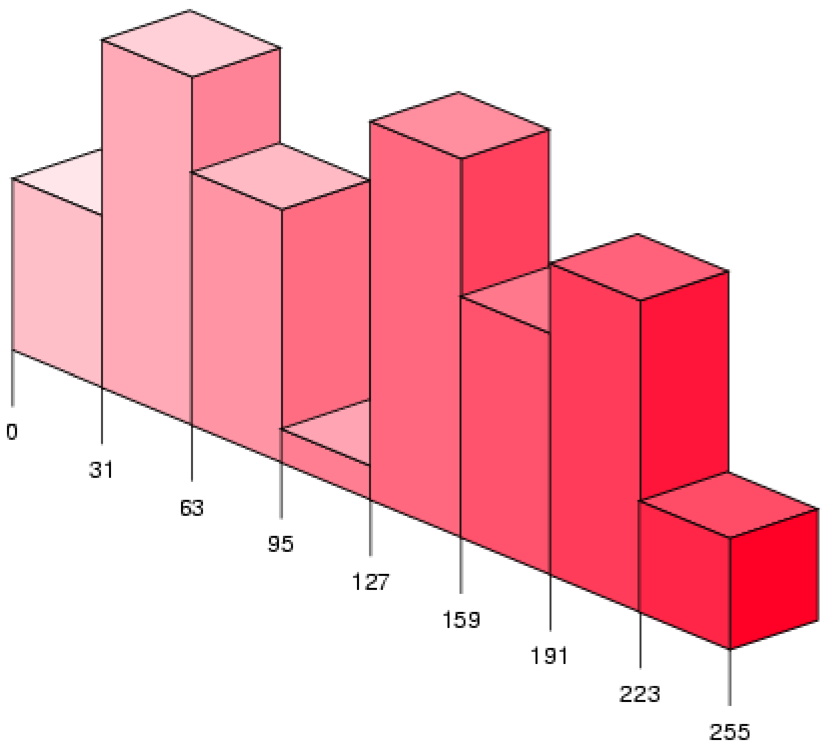
სადაც n_x – ვარიანტების რიცხვია, რომლებიც არ არემატება x –ს, ხოლო n – შერჩევის მოცულობა.

განსხვავებით ემპირიული განაწილების ფუნქციისაგან, რომელიც იგება შერჩევის მიხედვით, გენერალური ერთობლიობის $F(x)$ განაწილების ფუნქციას *თეორიული განაწილების ფუნქციას* უწოდებენ. იგი განსაზღვრავს $X \le x$ ხდომილების ალბათობას, ხოლო $F^*(x)$ -- მის ფარდობით სიხშირეს. საკმაოდ დიდი n–ებისათვის, როგორც ამას ამტკიცებს დიდ რიცხვთა კანონი, $F^*(x)$ ფუნქცია კრებადია ალბათობით $F(x)$ ფუნქციისაკენ.

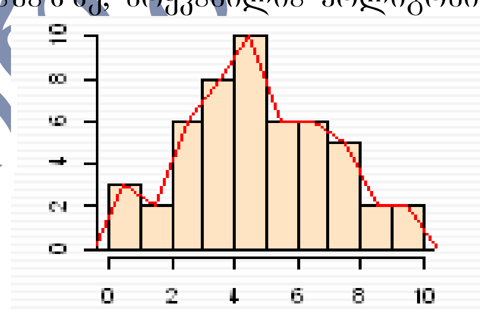
ემპირიული განაწილების ფუნქციის განმარტებიდან ადვილი დასანახია, რომ მისი თვისებები ემთხვევა $F(x)$ ფუნქციის თვისებებს, კერძოდ:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$.
2. $F^*(x)$ – არაკლებადი ფუნქციაა.
3. თუ x_1 – უმცირესი ვარიანტია, მაშინ $F^*(x) = 0$, როცა $x < x_1$; თუ $x_к$ – უდიდესი ვარიანტია, მაშინ $F^*(x) = 1$, როცა $x \ge x_к$.
4. $F^*(x)$ – მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა.

უწყვეტი მონაცემების შემთხვევაში გრაფიკულ ილუსტრაციას წარმოადგენს ე. წ. **ჰისტოგრამა,** ე. ი. საფეხურა ფიგურა, რომელიც შედგება მართკუთხედებისაგან, რომელთა ფუძეებია h სიგრძის ინტერვალები, ხოლო სიმაღლეები – მონაკვეთები სიგრძით n_i/h (სიხშირეების ჰისტოგრამა) ან w_i/h (ფარდობითი სიხშირეების ჰისტოგრამა). პირველ შემთხვევაში ჰისტოგრამის ფართობი ტოლია შერჩევის მოცულობის, ხოლო მეორე შემთხვევაში – ერთის.



ჰისტოგრამა წარმოდგენას გვაძლევს გენერალური ერთობლიობის განაწილების სიმკვრივეზე. შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში ის ახლოსაა თეორიულ სიმკვრივესთან. ქვემოთ, ერთ ნახაზზე, მიყვანილია პოლიგონი და ჰისტოგრამა.



უცნობი პარამეტრის შეფასებები და მათი აგების მეთოდები

შერჩევის ნებისმიერ $T_n(X)=T_n(X_1,\dots,X_n)$ ფუნქციას სტატისტიკა (შეფასება) ეწოდება. წერტილოვანი შეფასების ამოცანაა მოიძებნოს ისეთი სტატისტიკა $T_n(X_1,\dots,X_n)$, რომლის შერჩევითი მნიშვნელობა $T_n(x_1,\dots,x_n)$, გარკვეული აზრით, შეიძლება ჩაითვალოს უცნობი θ პარამეტრის ჭეშმარიტი (რეალური) მნიშვნელობის მიახლოებად (შეფასებად) და გამოყენებული იქნას მის ნაცვლად. ასეთ სტატისტიკას (შეფასებას) წერტილოვანი სტატისტიკა (შეფასება) ეწოდება.

$T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებას ეწოდება ჩაუნაცვლებელი (ანუ გადაუადგილებადი), თუ $E_\theta T(X)=\theta$.

$T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებას ეწოდება ძალმოსილი (ანუ ძალდებული), თუ $T_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ (T_n ალბათობით კრებადია θ-სკენ), როცა $n\to\infty$.

ჩაუნაცვლებელ შეფასებას ეწოდება ოპტიმალური (ანუ ეფექტური), თუ მას სხვა ჩაუნაცვლებელ შეფასებებს შორის გააჩნია უმცირესი დისპერსია.

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი: ვთქვათ, $p(x_i,\theta)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x_i მნიშვნელობას. მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქცია ეწოდება θ არგუმენტის ფუნქციას: $L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta)=p(x_1,\ \theta)p(x_2,\ \theta)\ldots p(x_n,\ \theta)$ ($\ln L$ ფუნქციას მაქსიმალური დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება). მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას უწოდებენ θ-ს იმ მნიშვნელობას, სადაც მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქცია (ან რაც იგივეა $\ln L$) აღწევს თავის მაქსიმუმს. მის მოსაძებნად საჭიროა: 1). ვიპოვოთ წარმოებული $\partial \ln L/\partial\theta$; 2). გავუტოლოთ წარმოებული ნულს (მივიღებთ ე. წ. მაქსიმალური დასაჯერობის ლოგარითმულ განტოლებას) და ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები; 3). ვიპოვოთ მეორე წარმოებული $\partial^2 \ln L/\partial\theta^2$; თუ ის უარყოფითია კრიტიკულ წერტილში, მაშინ ეს წერტილი – მაქსიმუმის წერტილია.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში, რომლის $f(x,\ \theta)$ განაწილების სიმკვრივის სახე ცნობილია, მაგრამ იგი შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს, მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე: $L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$. უცნობი პარამეტრის მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების საპოვნელად უნდა ჩავატაროთ იგივე პროცედურები, რაც დისკრეტულ შემთხვევაში.

მომენტთა მეთოდი: მომენტთა მეთოდი დაფუძნებულია იმ გარემოებაზე, რომ საწყისი და ცენტრალური ემპირიული (შერჩევითი) მომენტები წარმოადგენენ შესაბამისი საწყისი და ცენტრალური თეორიული მომენტების ძალმოსილ შეფასებებს. ამიტომ ამა თუ იმ შეფასების მისაღებად თეორიული მომენტები უნდა გავუტოლოთ იმავე რიგის შესაბამის ემპირიულ მომენტებს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება ან განტოლებათა სისტემა.

ლექცია – ინტერვალური შეფასებები, ნდობის ინტერვალი

მითითება! $1-\alpha$ ***საიმედოობის ნებისმიერი ნდობის ინტერვალის ასაგებად გამოიყენება ერთიდაიგივე პრინციპი: უცნობი პარამეტრის შემცველი გარკვეული სტანდარტული განაწილებისათვის იწერება ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობაა*** $1-\alpha$***, ხოლო საზღვარია (ან საზღვრებია) ამ განაწილების კრიტიკული წერტილი (ან წერტილები) და იქიდან ამოიხსნება უცნობი პარამეტრი (რა თქმა უნდა უტოლობის სახით).***

θ უცნობი პარამეტრის γ (ან $1-\alpha$) **საიმედოობის მქონე ანუ** $100\gamma\%$**-იანი (ან** $100(1-\alpha)\%$**-იანი) ნდობის ინტერვალი** ეწოდება. ინტერვალს (T_1,T_2), რომლისთვისაც: $P\{T_1<\theta<T_2\}=\gamma$ (ან $1-\alpha$), სადაც T_1 და T_2 θ პარამეტრის გარკვეული წერტილოვანი შეფასებებია, $\gamma\in(0,1)$ ($\alpha\in(0,1)$); α-ს **მნიშვნელოვნების დონე** ეწოდება; ნდობის ინტერვალის სიგრძის ნახევარს **შეფასების სიზუსტე** ეწოდება.

ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში

$1-\alpha$ საიმედოობის (α მნიშვნელოვნების დონის მქონე) ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში აქვს სახე:

$$(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \qquad (1)$$

სადაც $\bar{x}$ – შერჩევითი საშუალოა, n არის შერჩევის მოცულობა, σ – პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა, ხოლო $z_{\alpha/2}$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია.

შერჩევის მინიმალური მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს მოცემულ $1-\alpha$ საიმედოობას და l სიზუსტეს:

$$n^{*}=[(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{l})^{2}]+1.$$

როგორც ცნობილია, ნორმალური $N(a,\sigma^2)$ პოპულაციისათვის, ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში $\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}$-ს გააჩნია სტანდარტული ნორმალური განაწილება ($\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\cong N(0,1)$). სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად $P\{\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_{\alpha/2}\}=\alpha/2$, ხოლო $N(0,1)$-ის სიმეტრიულობის გამო $P\{\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -z_{\alpha/2}\}=\alpha/2$. შესაბამისად, $P\{-z_{\alpha/2}<\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$. ეს უკანასკნელი ტოლფასია თანაფარდობის $P\{\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}=1-\alpha$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) საძიებელი ნდობის ინტერვალია.

ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში

$1-\alpha$ საიმედოობის (α მნიშვნელოვნების დონის მქონე) ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში აქვს სახე:

$$(\bar{x}-t_{n-1,\alpha/2}\cdot\frac{s'}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{n-1,\alpha/2}\cdot\frac{s'}{\sqrt{n}}), \qquad (1)$$

სადაც n არის შერჩევის მოცულობა, s' არის შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა – $s'=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ (რომელშიც $\bar{x}$ შერჩევითი საშუალოა – $\bar{x}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$), ხოლო $t_{n-1,\alpha/2}$ არის თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილი.

როგორც ცნობილია, ნორმალური $N(a,\sigma^2)$ პოპულაციისათვის, უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში $\dfrac{\overline{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}}$-ს გააჩნია სტიუდენტის განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-1$ ($\dfrac{\overline{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}} \cong t(n-1)$). სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად $P\{\dfrac{\overline{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}} \ge t_{n-1,\alpha/2}\} = \alpha/2$, ხოლო $t(n-1)$-ის სიმეტრიულობის გამო $P\{\dfrac{\overline{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}} \le -t_{n-1,\alpha/2}\} = \alpha/2$. შესაბამისად, $P\{-t_{n-1,\alpha/2} < \dfrac{\overline{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}} < t_{n-1,\alpha/2}\} = 1-\alpha$. ეს უკანასკნელი ტოლფასია თანაფარდობის $P\{\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\cdot\dfrac{S^{'}}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\cdot\dfrac{S^{'}}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) საძიებელი ნდობის ინტერვალია.

ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში

$1-\alpha$ საიმედოობის (α მნიშვნელოვნების დონის მქონე) ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\right), \qquad (1)$$

სადაც n არის შერჩევის მოცულობა, a პოპულაციის საშუალოა, ხოლო $\chi^2_{n,\alpha/2}$ (შესაბამისად $\chi^2_{n,1-\alpha/2}$) არის თავისუფლების n ხარისხის მქონე ხი-კვადრატ განაწილების ზედა $\alpha/2$ (შესაბამისად, $1-\alpha/2$) კრიტიკული წერტილი.

როგორც ცნობილია, ნორმალური $N(a,\sigma^2)$ პოპულაციისათვის, ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში $\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\sigma^2$-ს გააჩნია ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით n ($\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\sigma^2 \cong \chi^2(n)$). ამიტომ $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილის ($\chi^2_{n,\alpha/2}$) განმარტების თანახმად: $P\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\sigma^2 \ge \chi^2_{n,\alpha/2}\} = \alpha/2$, ასევე $P\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\sigma^2 \le \chi^2_{n,1-\alpha/2}\} = \alpha/2$. შესაბამისად, $P\{\chi^2_{n,1-\alpha/2} < \sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\sigma^2 < \chi^2_{n,\alpha/2}\} = 1-\alpha$. ან რაც იგივეა $P\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\chi^2_{n,\alpha/2} < \sigma^2 < \sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2/\chi^2_{n,1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (1) საძიებელი ნდობის ინტერვალია.

ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში

$1-\alpha$ საიმედოობის (α მნიშვნელოვნების დონის მქონე) ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\left(\frac{(n-1)s'^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)s'^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right), \qquad (1)$$

სადაც n არის შერჩევის მოცულობა, s'^2 არის შესწორებული შერჩევითი დისპერსია – $s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (რომელშიც $\bar{x}$ შერჩევითი საშუალოა – $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$), ხოლო $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ (შესაბამისად $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$) არის თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე ხი-კვადრატ განაწილების ზედა $\alpha/2$ (შესაბამისად, $1-\alpha/2$)-კრიტიკული წერტილი.

როგორც ცნობილია, ნორმალური $N(a,\sigma^2)$ პოპულაციისათვის, უცნობი საშუალოს შემთხვევაში $\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2}$-ს გააჩნია ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-1$ ($\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2} \cong \chi^2(n-1)$). ამიტომ $\chi^2(n-1)$ განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილის ($\chi^2_{n-1,\alpha/2}$) განმარტების თანახმად: $P\{\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2} \ge \chi^2_{n-1,\alpha/2}\} = \alpha/2$, ასევე $P\{\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\} = \alpha/2$. შესაბამისად, $P\{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\alpha/2}\} = 1-\alpha$. ეს უკანასკნელი ტოლფასია თანაფარდობის $P\{\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\} = 1-\alpha$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) საძიებელი ნდობის ინტერვალია.

ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი ბერნულის სქემაში

$1-\alpha$ საიმედოობის (α მნიშვნელოვნების დონის მქონე) ასიმპტოტურ ნდობის ინტერვალს ბერნულის სქემაში უცნობი p ალბათობისათვის (პროპორციისათვის) აქვს სახე:

$$(w_n - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n}}, w_n + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n}}), \qquad (1)$$

სადაც n არის შერჩევის მოცულობა, w_n არის ფარდობითი სიხშირე ($w_n = S_n/n$, სადაც $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – წარმატებათა რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ცდაში ($X_i = 1$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა წარმატება, და $X_i = 0$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა მარცხი). $z_{\alpha/2}$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილი.

შერჩევის მინიმალური მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს მოცემულ $1-\alpha$ საიმედოობას და l სიზუსტეს:

$$n^* = [(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sqrt{w_n(1-w_n)}}{l})^2] + 1.$$

თუ w_n არა გვაქვს, მაშინ მის როლში ვიღებთ 0.5-ს ($w_n = 0.5$) და ვითვლით: $n^* = [(z_{\alpha/2}\cdot\frac{0.5}{l})^2] + 1.$

როგორც ცნობილია, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად $\frac{w_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ ნორმალურადაა განაწილებული ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით.

რადგან სტატისტიკის მნიშვნელშიც შედის შესაფასებელი p პარამეტრი, იყენებენ გამარტივებულ მიდგომას – მნიშვნელში p პარამეტრს ცვლიან მისი w_n შეფასებით. მაშინ გვექნება, რომ $\frac{w_n - p}{\sqrt{w_n(1-w_n)/n}} \overset{a.s.}{\cong} N(0,1)$. ამიტომ $N(0,1)$ განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილის ($z_{\alpha/2}$) განმარტების თანახმად: $P\{\frac{w_n - p}{\sqrt{w_n(1-w_n)/n}} \geq z_{\alpha/2}\} = \alpha/2$, ასევე $P\{\frac{w_n - p}{\sqrt{w_n(1-w_n)/n}} \leq -z_{\alpha/2}\} = \alpha/2$. შესაბამისად, $P\{-z_{\alpha/2} < \frac{w_n - p}{\sqrt{w_n(1-w_n)/n}} < z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$. ეს უკანასკნელი ტოლფასია თანაფარდობის $P\{w_n - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n}} < p < w_n + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n}}\} = 1-\alpha$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) საძიებელი ნდობის ინტერვალია.

ლექცია – ჰიპოთეზების შემოწმება I:

მითითება! ***ნებისმიერი ჰიპოთეზის შემოწმებისას კრიტიკული არის დადგენა ხდება ერთიდაიგივე სქემით: I) ალტერნატიული ჰიპოთეზა განსაზღვრავს კრიტიკული არის სახეს (კერძოდ, ის არის*** $(-\infty, x_{კრ}]$, $(-\infty, x_{კრ.1}]\cup[x_{კრ.2},+\infty)$ ***ან*** $[x_{კრ},+\infty)$ ***სახის შესაბამისად, იმის მიხედვით ალტერნატივა მარცხენა ცალმხრივია, ორმხრივია თუ მარჯვენა ცალმხრივია); II) კრიტიკული წერტილი (წერტილები) გამოითვლება I გვარის შეცდომის განმარტების საფუძველზე კრიტერიუმის სტატისტიკის ზედა კრიტიკული წერტილის საშუალებით.***

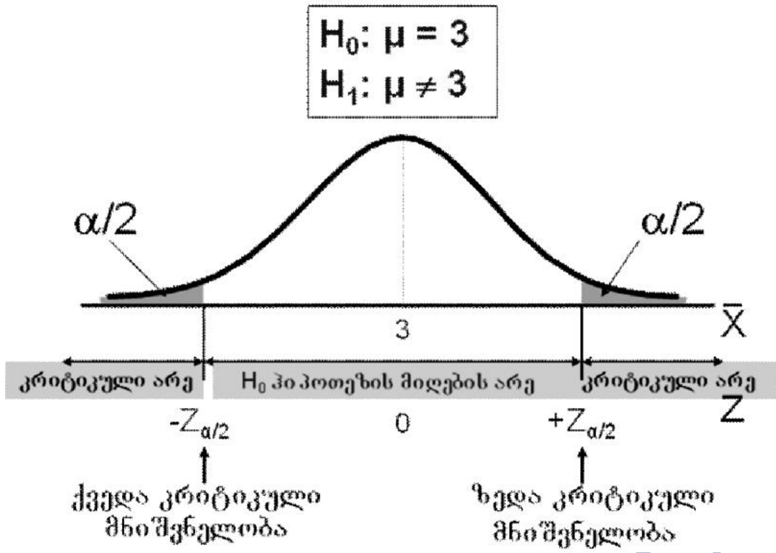
განაწილების პარამეტრების მნიშვნელობების შესახებ ან ორი განაწილების პარამეტრების სიდიდეების შედარების ჰიპოთეზებს **პარამეტრული ჰიპოთეზები** ეწოდება. ჰიპოთეზებს განაწილების სახის შესახებ კი **არაპარამეტრული ჰიპოთეზები** ეწოდება. ჰიპოთეზას, რომელიც წამოყენებულია შერჩევით მონაცემებთან მისი თანხმობის შესამოწმებლად, **ნულოვანი ჰიპოთეზა** ეწოდება და აღინიშნება H_0-ით (H_0 ამტკიცებს, რომ არ არსებობს განსხვავება პარამეტრსა და მის კონკრეტულ მნიშვნელობას შორის ან არ არსებობს განსხვავება ორ პარამეტრს შორის). H_0 ჰიპოთეზასთან ერთად იხილავენ (წამოაყენებენ) **ალტერნატიულ** ანუ **საწინააღმდეგო** ჰიპოთეზასაც, რომელსაც H_1-ით აღნიშნავენ (H_1 ამტკიცებს, რომ არსებობს განსხვავება პარამეტრსა და მის კონკრეტულ მნიშვნელობას შორის ან არსებობს განსხვავება ორ პარამეტრს შორის). ნულოვანი ჰიპოთეზა მოიცავს ტოლობის ნიშანს:

კრიტერიუმი:

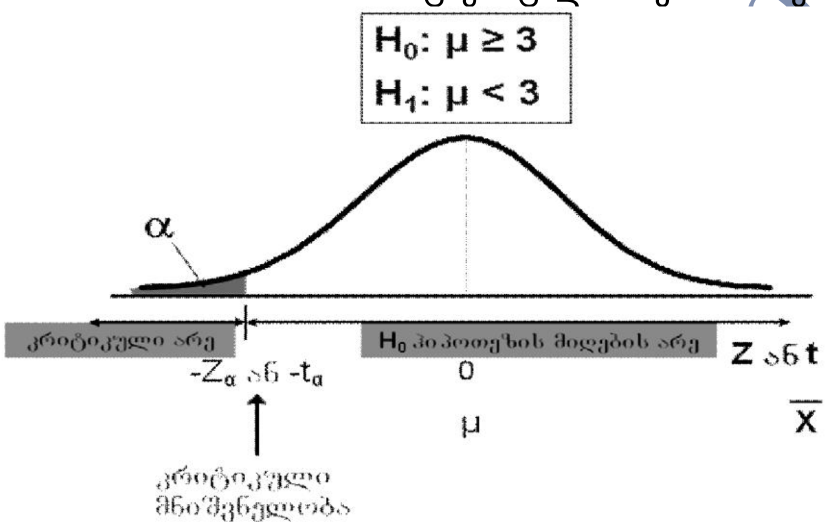
ორმხრივი	**მარჯვენა ცალმხრივი**	**მარცხენა ცალმხრივი**
$H_0: \theta = \theta_0$	$H_0: \theta \leq \theta_0$	$H_0: \theta \geq \theta_0$

$H_1:\theta\neq\theta_0$ $\qquad$ $H_1:\theta>\theta_0$ $\qquad$ $H_1:\theta<\theta_0$

ორმხრივი ჰიპოთეზა



მარცხენა ცალმხრივი ჰიპოთეზა



სამართლიანი ჰიპოთეზის უკუგდებას **პირველი გვარის შეცდომა** ეწოდება. პირველი გვარის შეცდომის დაშვების ალბათობას **მნიშვნელოვნების დონე** ეწოდება და α-თი აღინიშნება. არასამართლიანი ჰიპოთეზის მიღებას **მეორე გვარის შეცდომა** ეწოდება. მისი ალბათობა აღინიშნება β ასოთი. რიცხვს $1-\beta$, რომელიც ტოლია ალბათობის იმისა, რომ არ იქნება დაშვებული მეორე გვარის შეცდომა **კრიტერიუმის სიმძლავრე** ეწოდება.

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi\cong N(a,\sigma^2)$, $D\xi=\sigma^2$ ცნობილია, $E\xi$ უცნობია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0:E\xi=a_0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1:E\xi\neq a_0$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $Z=\dfrac{\overline{X}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\cong N(0,1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α.

კრიტიკული წერტილები: $C.V.=\pm z_{\alpha/2}$ (სადაც $z_{\alpha/2}$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty,-z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $\overline{X}$-ის მნიშვნელობა განსხვავებული იქნება a_0-სგან, შესაბამისად, Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ($N(0,1)$-ის სიმეტრიულობის გათვალისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]\cup[x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(Z\in C.R.\,|\,H_0)=2P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0)$, ანუ $P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0)=\alpha/2$, რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ}=z_{\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty,-z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$.

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი

პოპულაცია ნორმალურია $\xi\cong N(a,\sigma^2)$, $D\xi=\sigma^2$ ცნობილია, $E\xi$ უცნობია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: E\xi=a_0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: E\xi=a_1>a_0$ (შესაბამისად, $H_1: E\xi=a_1<a_0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $Z=\dfrac{\overline{X}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\cong N(0,1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V.=z_\alpha$ (შესაბამისად, $C.V.=-z_\alpha$). აქ z_α – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[z_\alpha,+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-z_\alpha]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $\overline{X}$-ის მნიშვნელობა ახლოს იქნება a_1-თთან, რომელიც მეტია (შესაბამისად, ნაკლებია) a_0-ზე, ამიტომ Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(Z\in C.R.\,|\,H_0)=P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0),\ \text{ანუ}\ P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0)=\alpha$$

(შესაბამისად, $\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(Z\in C.R.\,|\,H_0)=P(Z\leq -x_{კრ}\,|\,H_0)=\Phi(-x_{კრ})$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ}=z_\alpha$ (შესაბამისად, $-x_{კრ}=-z_\alpha$), ანუ C.R. = $[z_\alpha,+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-z_\alpha]$).

შერჩევის მინიმალური მოცულობა, რომლისთვისაც პირველი გვარის შეცდომის ალბათობაა α, ხოლო II გვარის შეცდომის ალბათობა ნაკლებია β–ზე:

$$n^* = [\sigma^2 (z_\alpha + z_\beta)^2 / (a_1 - a_0)^2] + 1.$$

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $D\xi$ უცნობია, $E\xi$ უცნობია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : E\xi = a_0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : E\xi \neq a_0$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $T = \dfrac{\overline{X} - a_0}{S' / \sqrt{n}} \cong t(n-1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = \pm t_{n-1,\alpha/2}$ (სადაც $t_{n-1,\alpha/2}$ – თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty,-t_{n-1,\alpha/2}] \cup [t_{n-1,\alpha/2},+\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $\overline{X}$-ის მნიშვნელობა განსხვავებული იქნება a_0-სგან, შესაბამისად, T-ს დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ (სტიუდენტის განაწილების სიმეტრიულობის გათვალისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}] \cup [x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = 2P(T \geq x_{კრ} \mid H_0)$, ანუ $P(T \geq x_{კრ} \mid H_0) = \alpha/2$, რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = t_{n-1,\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty,-t_{n-1,\alpha/2}] \cup [t_{n-1,\alpha/2},+\infty)$.

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $D\xi$ უცნობია, $E\xi$ უცნობია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : E\xi = a_0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : E\xi = a_1 > a_0$ (შესაბამისად, $H_1 : E\xi = a_1 < a_0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $T = \dfrac{\overline{X} - a_0}{S' / \sqrt{n}} \cong t(n-1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = t_{n-1,\alpha}$ (შესაბამისად, $C.V. = -t_{n-1,\alpha}$). აქ $t_{n-1,\alpha}$ – თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[t_{n-1,\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-t_{n-1,\alpha}]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $\overline{X}$-ის მნიშვნელობა ახლოს იქნება a_1-თან, რომელიც მეტია (შესაბამისად, ნაკლებია) a_0-ზე, ამიტომ T-ს დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = P(T \geq x_{კრ} \mid H_0),\ \text{ანუ}\ P(T \geq x_{კრ} \mid H_0) = \alpha$$

(შესაბამისად, $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = P(T \leq -x_{კრ} \mid H_0) = F_T(-x_{კრ})$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = t_{n-1,\alpha}$ (შესაბამისად, $-x_{კრ} = -t_{n-1,\alpha}$), ანუ C.R. = $[t_{n-1,\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-t_{n-1,\alpha}]$).

ჰიპოთეზათა შემოწმება ბერნულის სქემაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაცია ბერნულისაა უცნობი p ალბათობით. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: p = p_0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: p \neq p_0$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $Z = \dfrac{w_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{a.s.}{\cong} N(0,1)$. აქ $w_n = S_n / n$, სადაც $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ($X_i = 1$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა წარმატება, და $X_i = 0$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა მარცხი). მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: C.V. $= \pm z_{\alpha/2}$ ($z_{\alpha/2}$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty,-z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2},+\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში w_n-ის მნიშვნელობა განსხვავებული იქნება p_0-სგან, შესაბამისად, Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ($N(0,1)$-ის სიმეტრიულობის გათვალისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}] \cup [x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(Z \in C.R. \mid H_0) = 2P(Z \geq x_{კრ} \mid H_0)$, ანუ $P(Z \geq x_{კრ} \mid H_0) = \alpha/2$ რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = z_{\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty,-z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2},+\infty)$.

ჰიპოთეზათა შემოწმება ბერნულის სქემაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაცია ბერნულისაა უცნობი p ალბათობით. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: p = p_0$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: p = p_1 > p_0$ (შესაბამისად, $H_1: p = p_1 < p_0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $Z = \dfrac{w_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{a.s.}{\cong} N(0,1)$. აქ

$w_n = S_n / n$, სადაც $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ($X_i = 1$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა წარმატება, და $X_i = 0$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა მარცხი). მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = z_\alpha$ (შესაბამისად, $C.V. = -z_\alpha$), სადაც z_α − სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[z_\alpha, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty, -z_\alpha]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში w_n-ის მნიშვნელობა ახლოს იქნება p_1-თთან, რომელიც მეტია (შესაბამისად, ნაკლებია) p_0-ზე, ამიტომ Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty, -x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$\alpha = P(H_1 | H_0) = P(Z \in C.R. | H_0) = P(Z \ge x_{კრ} | H_0)$, ანუ $P(Z \ge x_{კრ} | H_0) = \alpha$ (შესაბამისად, $\alpha = P(H_1 | H_0) = P(Z \in C.R. | H_0) = P(Z \le -x_{კრ} | H_0) = \Phi(-x_{კრ})$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = z_\alpha$ (შესაბამისად, $-x_{კრ} = -z_\alpha$), ანუ C.R. = $[z_\alpha, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty, -z_\alpha]$).

ლექცია – ჰიპოთეზების შემოწმება II:

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi \cong N(a, \sigma^2)$, $D\xi$ უცნობია, $E\xi = a$ ცნობილია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : D\xi = \sigma_0^2$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : D\xi \ne \sigma_0^2$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 / \sigma_0^2 \cong \chi^2(n)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$ და $\chi^2_{n,\alpha/2}$, სადაც $\chi^2_{n,\alpha/2}$ − თავისუფლების n ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. $= (0, \chi^2_{n,1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n,\alpha/2}, +\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: რადგანაც შერჩევითი დისპერსია (ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა, შერჩევითი დისპერსიის მნიშვნელოვანი გადახრა σ_0^2-სგან მეტყველებს ალტერნატიული ჰიპოთეზის სასარგებლოდ. ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს შემდეგი სახის ინტერვალი C.R. = C.R. $_1$ $\cup$ C.R. $_2$ =

$(0, x_{კრ,\,1}] \cup [x_{კრ,\,2}, +\infty)$. კრიტიკულ წერტილებს არჩევენ ისე, რომ ამ არეებში მოხვედრის ალბათობები ტოლი იყოს $\alpha/2$-ის. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R. \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R._1 \mid H_0) + P(\chi^2 \in C.R._2 \mid H_0).$$

ამასთანავე,

$$\alpha/2 = P(\chi^2 \in C.R._1 \mid H_0) = 1 - P(\chi^2 > x_{კრ,\,1} \mid H_0), \text{ ანუ } P(\chi^2 > x_{კრ,\,1} \mid H_0) = 1 - \alpha/2$$

და
$$\alpha/2 = P(\chi^2 \in C.R._2 \mid H_0) = P(\chi^2 \ge x_{კრ,\,2} \mid H_0),$$

რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ,\,1} = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$ და $x_{კრ,\,2} = \chi^2_{n,\alpha/2}$, ანუ C.R. $= (0, \chi^2_{n,1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n,\alpha/2}, +\infty)$.

შენიშვნა: $H_0: D\xi = \sigma_0^2$ ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში შერჩევითი დისპერსია $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$ ახლოსაა σ_0^2-თან. შესაბამისად, $\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2/\sigma_0^2$ ახლოსაა n-თან. ამიტომ ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკა $\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2/\sigma_0^2$ გადაიხრება n-სგან.

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi \cong N(a, \sigma^2)$, $D\xi$ უცნობია, $E\xi = a$ ცნობილია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: D\xi = \sigma_0^2$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: D\xi = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$ (შესაბამისად, $H_1: D\xi = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2/\sigma_0^2 \cong \chi^2(n)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = \chi^2_{n,\alpha}$ (შესაბამისად, $\chi^2_{n,1-\alpha}$), სადაც $\chi^2_{n,\alpha}$ – თავისუფლების n ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[\chi^2_{n,\alpha}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0, \chi^2_{n,1-\alpha}]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: რადგანაც შერჩევითი დისპერსია (ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა, შერჩევითი დისპერსიის მნიშვნელოვანი გადახრა მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) σ_0^2-სგან მეტყველებს ალტერნატიული ჰიპოთეზის სასარგებლოდ. ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს შემდეგი სახის ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0, x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R. \mid H_0) = P(\chi^2 \ge x_{კრ} \mid H_0)$$

(შესაბამისად, $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R. \mid H_0) = P(0 < \chi^2 \le x_{კრ} \mid H_0) = 1 - P(\chi^2 > x_{კრ} \mid H_0)$, ანუ $P(\chi^2 > x_{კრ} \mid H_0) = 1 - \alpha$). რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად

ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = \chi^2_{n,\alpha}$ (შესაბამისად, $x_{კრ} = \chi^2_{n,1-\alpha}$), ანუ C.R. = $[\chi^2_{n,\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0,\chi^2_{n,1-\alpha}]$).

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $D\xi$ უცნობია, $E\xi$ უცნობია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : D\xi = \sigma_0^2$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : D\xi \neq \sigma_0^2$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S_n^{'2}}{\sigma_0^2} \cong \chi^2(n-1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ და $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ (აქ $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ – თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $(0,\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n-1,\alpha/2},+\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: რადგანაც შესწორებული შერჩევითი დისპერსია (უცნობი საშუალოს შემთხვევაში) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა, შესწორებული შერჩევითი დისპერსიის მნიშვნელოვანი გადახრა σ_0^2-სგან მეტყველებს ალტერნატიული ჰიპოთეზის სასარგებლოდ. ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს შემდეგი სახის ინტერვალი C.R. = C.R. $_1$ $\cup$ C.R. $_2$ = $(0,x_{კრ,\,1}] \cup [x_{კრ,\,2},+\infty)$. კრიტიკულ წერტილებს არჩევენ ისე, რომ ამ არეებში მოხვედრის ალბათობები ტოლი იყოს $\alpha/2$-ის. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R. \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R._1 \mid H_0) + P(\chi^2 \in C.R._2 \mid H_0).$$

ამასთანავე,

$$\alpha/2 = P(\chi^2 \in C.R._1 \mid H_0) = 1 - P(\chi^2 > x_{კრ,\,1} \mid H_0), \text{ ანუ } P(\chi^2 > x_{კრ,\,1} \mid H_0) = 1-\alpha/2$$

და
$$\alpha/2 = P(\chi^2 \in C.R._2 \mid H_0) = P(\chi^2 \geq x_{კრ,\,2} \mid H_0),$$

რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ,\,1} = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ და $x_{კრ,\,2} = \chi^2_{n-1,\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(0,\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n-1,\alpha/2},+\infty)$.

შენიშვნა: $H_0 : D\xi = \sigma_0^2$ ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში შესწორებული შერჩევითი დისპერსია $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ახლოსაა σ_0^2-თან. შესაბამისად, $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma_0^2 = \dfrac{(n-1)S_n^{'2}}{\sigma_0^2}$ ახლოსაა $(n-1)$-თან. ამიტომ ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკა $\dfrac{(n-1)S_n^{'2}}{\sigma_0^2}$ გადაიხრება $(n-1)$-სგან.

ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაცია ნორმალურია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $D\xi$ უცნობია, $E\xi$ უცნობია. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : D\xi = \sigma_0^2$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : D\xi = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$ (შესაბამისად, $H_1 : D\xi = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^{'2}}{\sigma_0^2} \cong \chi^2(n-1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = \chi^2_{n-1,\alpha}$ (შესაბამისად, $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$), სადაც $\chi^2_{n-1,\alpha}$ – თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0, \chi^2_{n-1,1-\alpha}]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: რადგანაც შესწორებული შერჩევითი დისპერსია (უცნობი საშუალოს შემთხვევაში) დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა, შესწორებული შერჩევითი დისპერსიის მნიშვნელოვანი გადახრა მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) σ_0^2-სგან მეტყველებს ალტერნატიული ჰიპოთეზის სასარგებლოდ. ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს შემდეგი სახის ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0, x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R. \mid H_0) = P(\chi^2 \geq x_{კრ} \mid H_0)$$

(შესაბამისად, $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(\chi^2 \in C.R. \mid H_0) = P(0 < \chi^2 \leq x_{კრ} \mid H_0) = 1 - P(\chi^2 > x_{კრ} \mid H_0)$, ანუ $P(\chi^2 > x_{კრ} \mid H_0) = 1-\alpha$). რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = \chi^2_{n-1,\alpha}$ (შესაბამისად, $x_{კრ} = \chi^2_{n-1,1-\alpha}$), ანუ C.R. = $[\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0, \chi^2_{n-1,1-\alpha}]$).

ჰიპოთეზის შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიების შემთხვევაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi \cong N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \cong N(a_2, \sigma_2^2)$ (ან ორივე შერჩევის მოცულობა ≥ 30) და დამოუკიდებელი, σ_1^2 და σ_2^2 ცნობილია. $X_1,\ldots,X_n$ და $Y_1,\ldots,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : a_1 - a_2 = 0$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : a_1 - a_2 \neq 0$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $Z = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \cong N(0,1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = \pm z_{\alpha/2}$ ($z_{\alpha/2}$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, +\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(a_1-a_2)$-ის მნიშვნელობა განსხვავებული იქნება ნულისაგან, შესაბამისად, Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ($N(0,1)$-ის სიმეტრიულობის გათვალისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]\cup[x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(Z\in C.R.\,|\,H_0)=2P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0),\ \text{ანუ}\ P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0)=\alpha/2,$$

რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ}=z_{\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty,-z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\overline{x}_n-\overline{y}_m)-z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}<a_1-a_2<(\overline{x}_n-\overline{y}_m)+z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}\,.$$

ჰიპოთეზის შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ცნობილი დისპერსიების შემთხვევაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია.

პოპულაციები ნორმალურია $\xi\cong N(a_1,\sigma_1^2)$, $\eta\cong N(a_2,\sigma_2^2)$ (ან ორივე შერჩევის მოცულობა ≥ 30) და დამოუკიდებელი, σ_1^2 და σ_2^2 ცნობილია. $X_1,...,X_n$ და $Y_1,...,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0:a_1-a_2\leq 0$ (შესაბამისად, $H_0:a_1-a_2\geq 0$). ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1:a_1-a_2>0$ (შესაბამისად, $H_1:a_1-a_2<0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $Z=\dfrac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}\cong N(0,1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V.=z_\alpha$ (შესაბამისად, $C.V.=-z_\alpha$), სადაც z_α – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[z_\alpha,+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-z_\alpha]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)$-ის მნიშვნელობა მეტი (შესაბამისად, ნაკლები) იქნება (a_1-a_2)-ზე, ამიტომ, Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(Z\in C.R.\,|\,H_0)=P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0)$, ანუ $P(Z\geq x_{კრ}\,|\,H_0)=\alpha$ (შესაბამისად,

$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(Z \in C.R. \mid H_0) = P(Z \le -x_{კრ} \mid H_0) = \Phi(-x_{კრ})$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = z_\alpha$ (შესაბამისად, $-x_{კრ} = -z_\alpha$), ანუ C.R. = $[z_\alpha, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty, -z_\alpha]$).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m} < a_1 - a_2 < (\bar{x}_n - \bar{y}_m) + z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}\,.$$

ჰიპოთეზის შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ტოლი მაგრამ უცნობი დისპერსიების შემთხვევაში, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi \cong N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \cong N(a_2, \sigma_2^2)$ და დამოუკიდებელი, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ უცნობია. $X_1, ..., X_n$ და $Y_1, ..., Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : a_1 - a_2 = 0$, ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : a_1 - a_2 \ne 0$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $T = \dfrac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{S'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}} \cong t(n+m-2)$, სადაც $S'^2_{n,m} = \dfrac{1}{n+m-2}[(n-1)S'^2_1 + (m-1)S'^2_2] =$

$= \dfrac{1}{n+m-2}[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_m)^2]$, $(n+m-2)\dfrac{S'^2_{n,m}}{\sigma^2} \cong \chi^2(n+m-2)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = \pm t_{n+m-2,\alpha/2}$ ($t_{n+m-2,\alpha/2}$ – თავისუფლების $n+m-2$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty, -t_{n+m-2,\alpha/2}] \cup [t_{n+m-2,\alpha/2}, +\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - -(a_1 - a_2)$-ის მნიშვნელობა განსხვავებული იქნება ნულისაგან, შესაბამისად, T-ს დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ (სტიუდენტის განაწილების სიმეტრიულობის გათვალისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty, -x_{კრ}] \cup [x_{კრ}, +\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = 2P(T \ge x_{კრ} \mid H_0),\ \text{ანუ}\ P(T \ge x_{კრ} \mid H_0) = \alpha/2\,,$$

რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = t_{n+m-2,\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty, -t_{n+m-2,\alpha/2}] \cup [t_{n+m-2,\alpha/2}, +\infty)$.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m} < a_1 - a_2 < (\bar{x}_n - \bar{y}_m) + t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}\,.$$

ჰიპოთეზის შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ტოლი მაგრამ უცნობი დისპერსიების შემთხვევაში, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi \cong N(a_1,\sigma_1^2)$, $\eta \cong N(a_2,\sigma_2^2)$ და დამოუკიდებელი, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ უცნობია. $X_1,...,X_n$ და $Y_1,...,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: a_1-a_2 \le 0$ (შესაბამისად, $H_0: a_1-a_2 \ge 0$). ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: a_1-a_2>0$ (შესაბამისად, $H_1: a_1-a_2<0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $T=\dfrac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(a_1-a_2)}{S'_{n,m}\sqrt{1/n+1/m}} \cong t(n+m-2)$, სადაც

$$S'^2_{n,m}=\frac{1}{n+m-2}[(n-1)S'^2_1+(m-1)S'^2_2]=\frac{1}{n+m-2}[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y}_m)^2],$$

$(n+m-2)\dfrac{S'^2_{n,m}}{\sigma^2} \cong \chi^2(n+m-2)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V.=t_{n+m-2,\alpha}$ (შესაბამისად, $C.V.=-t_{n+m-2,\alpha}$) ($t_{n+m-2,\alpha}$ – თავისუფლების $n+m-2$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია). კრიტიკული არე: C.R. = $[t_{n+m-2,\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-t_{n+m-2,\alpha}]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)$-ის მნიშვნელობა მეტი (შესაბამისად, ნაკლები) იქნება (a_1-a_2)-ზე, ამიტომ, T-ს დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(T\in C.R.\,|\,H_0)=P(T\ge x_{კრ}\,|\,H_0)$ (შესაბამისად, $\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(T\in C.R.\,|\,H_0)=P(T\le -x_{კრ}\,|\,H_0)$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ}=t_{n+m-2,\alpha}$ (შესაბამისად, $-x_{კრ}=-t_{n+m-2,\alpha}$), ანუ C.R. = $[t_{n+m-2,\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-t_{n+m-2,\alpha}]$).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\overline{x}_n-\overline{y}_m)-t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n+1/m}<a_1-a_2<(\overline{x}_n-\overline{y}_m)+t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n+1/m}.$$

ლექცია – ჰიპოთეზების შემოწმება III:

ორამოკრეფიანი t–კრიტერიუმი არატოლი უცნობი დისპერსიების შემთხვევაში (სატერტვაიტის მეთოდი), კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi \cong N(a_1,\sigma_1^2)$, $\eta \cong N(a_2,\sigma_2^2)$ და დამოუკიდებელი, σ_1^2 და σ_2^2 უცნობებია და არატოლი ($\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$). $X_1,...,X_n$ და $Y_1,...,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: a_1-a_2=0$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: a_1-a_2\ne 0$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$T=\dfrac{(\overline{X}_n-\overline{Y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{S'^2_1/n+S'^2_2/m}} \cong t([c])$, სადაც $S'^2_1=\dfrac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2]$, $S'^2_2=\dfrac{1}{m-1}[\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y}_m)^2]$,

$c = \dfrac{(s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m)^2}{(s_1^{'2}/n)^2/(n-1) + (s_2^{'2}/m)^2/(m-1)}$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = \pm t_{[c],\alpha/2}$, სადაც $t_{[c],\alpha/2}$ – თავისუფლების $[c]$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty, -t_{[c],\alpha/2}] \cup [t_{[c],\alpha/2}, +\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (a_1 - a_2)$-ის მნიშვნელობა განსხვავებული იქნება ნულისაგან, შესაბამისად, T-ს დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ (სტიუდენტის განაწილების სიმეტრიულობის გათვალისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty, -x_{კრ}] \cup$ $\cup [x_{კრ}, +\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = 2P(T \ge x_{კრ} \mid H_0),\ \text{ანუ}\ P(T \ge x_{კრ} \mid H_0) = \alpha/2,$$

რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = t_{[c],\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty, -t_{[c],\alpha/2}] \cup [t_{[c],\alpha/2}, +\infty)$.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\overline{x}_n - \overline{y}_m - t_{[c].\alpha/2} \cdot \sqrt{s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m},\ \overline{x}_n - \overline{y}_m + t_{[c].\alpha/2}\sqrt{s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m}).$$

ორამოკრეფიანი t–კრიტერიუმი არატოლი უცნობი დისპერსიების შემთხვევაში (სატერტვაიტის მეთოდი), კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi \cong N(a_1, \sigma_1^2)$, $\eta \cong N(a_2, \sigma_2^2)$ და დამოუკიდებელი, σ_1^2 და σ_2^2 უცნობებია და არატოლი $(\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2)$. $X_1, \dots, X_n$ და $Y_1, \dots, Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : a_1 - a_2 \le 0$ (შესაბამისად, $H_0 : a_1 - a_2 \ge 0$). ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : a_1 - a_2 > 0$ (შესაბამისად, $H_1 : a_1 - a_2 < 0$).

რიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $T = \dfrac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{S_1^{'2}/n + S_2^{'2}/m}} \cong t([c])$,

სადაც $S_1^{'2} = \dfrac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2]$, $S_2^{'2} = \dfrac{1}{m-1}[\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}_m)^2]$, $c = \dfrac{(s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m)^2}{(s_1^{'2}/n)^2/(n-1) + (s_2^{'2}/m)^2/(m-1)}$.

მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = t_{[c],\alpha}$ (შესაბამისად, $C.V. = -t_{[c],\alpha}$), სადაც $t_{[c],\alpha}$ – თავისუფლების $[c]$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[t_{[c],\alpha}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty, -t_{[c],\alpha}]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{X}_n - \overline{Y}_m)$-ის მნიშვნელობა მეტი (შესაბამისად, ნაკლები) იქნება $(a_1 - a_2)$-ზე, ამიტომ, T-ს დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამის-

ად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = P(T \ge x_{კრ} \mid H_0)$ (შესაბამისად, $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(T \in C.R. \mid H_0) = P(T \le -x_{კრ} \mid H_0)$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = t_{[c],\alpha}$ (შესაბამისად, $-x_{კრ} = -t_{[c],\alpha}$), ანუ C.R. = $[t_{[c],\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-t_{[c],\alpha}]$).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\overline{x}_n - \overline{y}_m - t_{[c].\alpha/2} \cdot \sqrt{s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m},\ \overline{x}_n - \overline{y}_m + t_{[c].\alpha/2}\sqrt{s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m}).$$

შენიშვნა: საშუალოთა შესახებ ტოლობის შესამოწმებლად T კრიტერიუმის გამოყენებამდე წინასწარ უნდა გამოვიყენოთ F კრიტერიუმი, რათა გავარკვიოთ არის თუ არა დისპერსიები ტოლი. ამ უკანასკნელის გამოსაყენებლად კი აუცილებელია პოპულაციები იყოს ნორმალური ან დაახლოებით ნორმალური.

ჰიპოთეზის შემოწმება დისპერსიების ტოლობის შესახებ, კრიტერიუმი ორმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi \cong N(a_1,\sigma_1^2)$, $\eta \cong N(a_2,\sigma_2^2)$ და დამოუკიდებელი, ორივე პოპულაციის ორივე პარამეტრი უცნობია. $X_1,...,X_n$ და $Y_1,...,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \ne 1$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $F = \dfrac{S_1^{'2}/\sigma_1^2}{S_2^{'2}/\sigma_2^2} \cong F(n-1,m-1)$, სადაც $S_1^{'2} = \dfrac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2]$, $S_2^{'2} = \dfrac{1}{m-1}[\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}_m)^2]$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები: $C.V. = F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$ და $C.V. = F_{n-1,m-1,\alpha/2}$, სადაც $F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ – თავისუფლების $n-1$ და $m-1$ ხარისხების მქონე ფიშერის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $(0,F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}] \cup [F_{n-1,m-1,\alpha/2},+\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში F-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ერთიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს შემდეგი სახის ინტერვალი C.R. = C.R. $_1$ $\cup$ C.R. $_2$ = $(0,x_{კრ,\,1}] \cup [x_{კრ,\,2},+\infty)$. კრიტიკულ წერტილებს არჩევენ ისე, რომ ამ არეებში მოხვედრის ალბათობები ტოლი იყოს $\alpha/2$-ის. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(F \in C.R. \mid H_0) = P(F \in C.R._1 \mid H_0) + P(F \in C.R._2 \mid H_0)$. ამასთანავე, $\alpha/2 = P(F \in C.R._1 \mid H_0) = 1 - P(F > x_{კრ,\,1} \mid H_0)$, ანუ $P(F > x_{კრ,\,1} \mid H_0) = 1-\alpha/2$ და $\alpha/2 = P(F \in C.R._2 \mid H_0) = P(F \ge x_{კრ,\,2} \mid H_0)$, რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ

$$x_{კრ,\,1} = F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \text{ და } x_{კრ,\,2} = F_{n-1,m-1,\alpha/2}, \text{ ანუ}$$

$$\text{C.R.} = (0,F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}] \cup [F_{n-1,m-1,\alpha/2},+\infty).$$

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის:

$$F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}\cdot\frac{s_1^{'2}}{s_2^{'2}}<\sigma_1^2/\sigma_2^2<F_{m-1,n-1,\alpha/2}\cdot\frac{s_1^{'2}}{s_2^{'2}}.$$

შენიშვნა: გაითვალისწინეთ, რომ $F(k,l)=1/F(l,k)$; $F_{k,l,\alpha}=1/F_{l,k,1-\alpha}$.

გამარტივებული პროცედურა: ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2\neq 1$. კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა T.V.: $\overline{f}=\dfrac{\max\{s_1^{'2},s_2^{'2}\}}{\min\{s_1^{'2},s_2^{'2}\}}$. კრიტიკული არე: $\overline{f}\geq F_{k,l,\alpha/2}$, სადაც $F_{k,l,\alpha/2}$ არის k და l თავისუფლების ხარისხის მქონე ფიშერის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია, ამასთანავე, $k=n-1$ და $l=m-1$, თუ $s_1^{'2}>s_2^{'2}$, და პირიქით, $k=m-1$ და $l=n-1$, თუ $s_1^{'2}<s_2^{'2}$.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის:

$$(\overline{f}/F_{n-1,m-1,\alpha/2}=)\ \overline{f}\cdot F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}<\sigma_1^2/\sigma_2^2<\overline{f}\cdot F_{m-1,n-1,\alpha/2},\ \text{თუ}\ s_1^{'2}>s_2^{'2};$$

$$(1/[\overline{f}\cdot F_{n-1,m-1,\alpha/2}]=)\ F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}/\overline{f}<\sigma_1^2/\sigma_2^2<F_{m-1,n-1,\alpha/2}/\overline{f},\ \text{თუ}\ s_1^{'2}<s_2^{'2}.$$

ჰიპოთეზის შემოწმება დისპერსიების ტოლობის შესახებ, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

პოპულაციები ნორმალურია $\xi\cong N(a_1,\sigma_1^2)$, $\eta\cong N(a_2,\sigma_2^2)$ და დამოუკიდებელი, ორივე პოპულაციის ორივე პარამეტრი უცნობია. $X_1,...,X_n$ და $Y_1,...,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2>1$ (შესაბამისად, $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2<1$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $F=\dfrac{S_1^{'2}/\sigma_1^2}{S_2^{'2}/\sigma_2^2}\cong F(n-1,m-1)$, სადაც $S_1^{'2}=\dfrac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2]$, $S_2^{'2}=\dfrac{1}{m-1}[\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y}_m)^2]$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V.=F_{n-1,m-1,\alpha}$ (შესაბამისად, $C.V.=F_{n-1,m-1,1-\alpha}$), სადაც $F_{n-1,m-1,\alpha}$ – თავისუფლების $n-1$ და $m-1$ ხარისხების მქონე ფიშერის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[F_{n-1,m-1,\alpha},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0,F_{n-1,m-1,1-\alpha}]$).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში F-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ერთიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს შემდეგი სახის ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0,x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(F\in C.R.\,|\,H_0)=P(F\geq x_{კრ}\,|\,H_0)$$

(შესაბამისად, $\alpha=P(H_1\,|\,H_0)=P(F\in C.R.\,|\,H_0)=P(0<F\leq x_{კრ}\,|\,H_0)=1-P(F>x_{კრ}\,|\,H_0)$, ანუ $P(F>x_{კრ}\,|\,H_0)=1-\alpha$). რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნ-

ავს, რომ $x_{კრ} = F_{n-1,m-1,\alpha}$ (შესაბამისად, $x_{კრ} = F_{n-1,m-1,1-\alpha}$), ანუ C.R. = $[F_{n-1,m-1,\alpha}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(0, F_{n-1,m-1,1-\alpha}]$).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის:

$$F_{m-1,n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s_1^{'2}}{s_2^{'2}} < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < F_{m-1,n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s_1^{'2}}{s_2^{'2}}.$$

შენიშვნა: გაითვალისწინეთ, რომ $F(k,l) = 1/F(l,k)$; $F_{k,l,\alpha} = 1/F_{l,k,1-\alpha}$.

გამარტივებული პროცედურა: ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$. კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა T.V.: $\overline{f} = \dfrac{\max\{s_1^{'2}, s_2^{'2}\}}{\min\{s_1^{'2}, s_2^{'2}\}}$. კრიტიკული არე: $\overline{f} \geq F_{k,l,\alpha}$ (შესაბამისად, $0 \leq \overline{f} \leq F_{k,l,1-\alpha}$]), სადაც $F_{k,l,\alpha}$ არის k და l თავისუფლების ხარისხის მქონე ფიშერის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია, ამასთანავე, $k = n-1$ და $l = m-1$, თუ $s_1^{'2} > s_2^{'2}$, და პირიქით, $k = m-1$ და $l = n-1$, თუ $s_1^{'2} < s_2^{'2}$.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის

$$(\overline{f}/F_{n-1,m-1,\alpha/2} =)\ \overline{f} \cdot F_{m-1,n-1,1-\alpha/2} < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \overline{f} \cdot F_{m-1,n-1,\alpha/2},\ \text{თუ}\ s_1^{'2} > s_2^{'2};$$

$$(1/[\overline{f} \cdot F_{n-1,m-1,\alpha/2}] =)\ F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}/\overline{f} < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < F_{m-1,n-1,\alpha/2}/\overline{f},\ \text{თუ}\ s_1^{'2} < s_2^{'2}.$$

ჰიპოთეზათა შემოწმება წარმატებათა ალბათობებისათვის ბერნულის ცდათა ორი დამოუკიდებელი მიმდევრობისათვის, კრიტერიუმი ორმხრივია

$X_1,\ldots,X_n$ და $Y_1,\ldots,Y_m$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა ბერნულის კანონით განაწილებული პოპულაციიდან შესაბამისად წარმატების უცნობი p_1 და p_2 ალბათობებით; $q_1 = 1-p_1$, $q_2 = 1-p_2$; $S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_2 = \sum_{i=1}^{m} Y_i$; $\overline{P}_1 = \dfrac{S_1}{n}$, $\overline{P}_2 = \dfrac{S_2}{m}$; $\overline{P} = \dfrac{n}{n+m}\overline{P}_1 + \dfrac{m}{n+m}\overline{P}_2$; $\overline{Q} = 1-\overline{P}$. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : p_1 = p_2$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : p_1 \neq p_2$. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილება: $Z = \dfrac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\overline{P}\,\overline{Q}(1/n + 1/m)}} \overset{as}{\cong} N(0,1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილები **C.V.** = $\pm z_{\alpha/2}$, სადაც $z_{\alpha/2}$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $(-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, +\infty)$.

შეზღუდვები: $n\overline{p}_1, n\overline{q}_1, m\overline{p}_2, m\overline{q}_2 \geq 5$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{P}_1 - \overline{P}_2)$-ის მნიშვნელობა ახლოს იქნება $(p_1 - p_2)$-თან, რომელიც განსხვავდება ნულისაგან, შესაბამისად, Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან როგორც მარჯვნივ, ისე მარცხნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ($N(0,1)$-ის სიმეტრიულობის გათვა-

ლისწინებით) ის უნდა იყოს ორმხრივი სიმეტრიული ინტერვალი C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]\cup[x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(Z \in C.R. \mid H_0) = 2P(Z \ge x_{კრ} \mid H_0),\ \text{ანუ}\ P(Z \ge x_{კრ} \mid H_0) = \alpha/2,$$

რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = z_{\alpha/2}$, ანუ C.R. = $(-\infty,-z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი $p_1 - p_2$ სხვაობისათვის:

$$((\overline{p}_1-\overline{p}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1\overline{q}_1}{n}+\frac{\overline{p}_2\overline{q}_2}{m}},\ (\overline{p}_1-\overline{p}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1\overline{q}_1}{n}+\frac{\overline{p}_2\overline{q}_2}{m}}),$$

სადაც $\overline{q}_1 = 1-\overline{p}_1$, $\overline{q}_2 = 1-\overline{p}_2$.

ჰიპოთეზათა შემოწმება წარმატებათა ალბათობებისათვის ბერნულის ცდათა ორი დამოუკიდებელი მიმდევრობისათვის, კრიტერიუმი მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივია

$X_1,\ldots,X_n$ და $Y_1,\ldots,Y_m$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა ბერნულის კანონით განაწილებული პოპულაციიდან შესაბამისად წარმატების უცნობი p_1 და p_2 ალბათობებით; $q_1 = 1-p_1$, $q_2 = 1-p_2$; $S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_2 = \sum_{i=1}^{m} Y_i$; $\overline{P}_1 = \frac{S_1}{n}$, $\overline{P}_2 = \frac{S_2}{m}$; $\overline{P} = \frac{n}{n+m}\overline{P}_1 + \frac{m}{n+m}\overline{P}_2$; $\overline{Q} = 1-\overline{P}$. ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: p_1 - p_2 \le 0$ (შესაბამისად, $H_0: p_1 - p_2 \ge 0$). ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1: p_1 - p_2 > 0$ (შესაბამისად, $H_1: p_1 - p_2 < 0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილება: $Z = \frac{\overline{P}_1-\overline{P}_2}{\sqrt{\overline{P}\,\overline{Q}(1/n+1/m)}} \overset{as}{\cong} N(0,1)$. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი **C.V. =** z_α (შესაბამისად, **C.V. =** $-z_\alpha$), სადაც z_α – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[z_\alpha,+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-z_\alpha]$).

შეზღუდვები: $n\overline{p}_1, n\overline{q}_1, m\overline{p}_2, m\overline{q}_2 \ge 5$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არე: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში $(\overline{P}_1-\overline{P}_2)$-ის მნიშვნელობა ახლოს იქნება (p_1-p_2)-თან, რომელიც მეტია (შესაბამისად, ნაკლებია) ნულზე. ამიტომ Z-ის დაკვირვებული მნიშვნელობა შეიძლება გადაიხაროს ნულიდან მარჯვნივ (შესაბამისად, მარცხნივ) და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა (შესაბამისად, მარცხენა) ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-x_{კრ}]$). I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(Z \in C.R. \mid H_0) = P(Z \ge x_{კრ} \mid H_0)$ (შესაბამისად, $\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(Z \in C.R. \mid H_0) = P(Z \le -x_{კრ} \mid H_0)$), რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = z_\alpha$ (შესაბამისად, $-x_{კრ} = -z_\alpha$), ანუ C.R. = $[z_\alpha,+\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $(-\infty,-z_\alpha]$).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი $p_1 - p_2$ სხვაობისათვის:

$$((\bar{p}_1-\bar{p}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n}+\frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{m}},(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n}+\frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{m}}),$$

სადაც $\bar{q}_1=1-\bar{p}_1$, $\bar{q}_2=1-\bar{p}_2$.

ლექცია – არაპარამეტრული ჰიპოთეზები, თანხმობის კრიტერიუმები

ჰიპოთეზის შემოწმება განაწილების ნორმალურობის შესახებ (თანხმობის ხი-კვადრატ კრიტერიუმი).

ვიგულისხმოთ, რომ მიღებულია საკმარისად დიდი n მოცულობის შერჩევა განსხვავებული ვარიანტების დიდი რიცხვით. მისი დამუშავების მოხერხებულობის მიზნით ვარიანტების უმცირესი მნიშვნელობიდან უდი-დეს მნიშვნელობამდე ინტერვალი დავყოთ s ტოლ ნაწილად და ჩავთვალოთ, რომ ვარიანტების მნიშვნელობები, რომლებიც მოხვდნენ ცალკეულ ინტერვალში დაახლოებით ტოლია ამ ინტერვალის შუაწერტილის მომცემი რიცხვის. დავთვალოთ თითოეულ ინტერვალში მოხვედრილი ვარიანტების რაოდენობა და შევადგინოთ ე. წ. დაჯგუფებული შერჩევა

ვარიანტები	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
სიხშირე	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

სადაც x_i – ინტერვალის შუაწერტილის მნიშვნელობაა, ხოლო n_i – ვარიანტების რიცხვია, რომლებიც მოხვდნენ i –ურ ინტერვალში (ემპირიული სიხშირეები).

მიღებული მონაცემებით გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო $\bar{x}_ფ$ და შერჩევითი საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma_ფ$. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა, რომ გენერალური ერთობლიობა განაწილებულია ნორმალური კანონით პარამეტრებით $E\xi=\bar{x}_ფ$ და $D\xi=\sigma_ფ$. ჩვენ შეგვიძლია დავთვალოთ მონაცემების რაოდენობა n მოცულობის შერჩევიდან, რამდენიც უნდა აღმოჩნდეს თითოეულ ინტერვალში ამ დაშვების დროს (ე. ი. თეორიული სიხშირეები). ამ მიზნით, ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილიდან ვპოულობთ i –ურ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას:

$$p_i=\Phi\left(\frac{b_i-\bar{x}_ფ}{\sigma_ფ}\right)-\Phi\left(\frac{a_i-\bar{x}_ფ}{\sigma_ფ}\right)$$

სადაც a_i და b_i -- i -ური ინტერვალის საზღვრებია. მიღებული ალბათობების შერჩევის მოცულობაზე გამრავლებით ვპოულობთ თეორიულ სიხშირეებს: $n_i'=n\cdot p_i$. ჩვენი მიზანია – შევადაროთ ემპირიული და თეორიული სიხშირეები და გავარკვიოთ, არის თუ არა ეს განსხვავებები არაარსებითი, რომლებიც არ უარყოფენ ჰიპოთეზას გამოსაკვლევი შემთხვევითი სიდიდის ნორმალური განაწილების შესახებ, ან ეს განსხვავებები იმდენად დიდია, რომ ეწინააღმდეგებიან ამ ჰიპოთეზას. ამ მიზნით გამოიყენება კრიტერიუმი შემდეგი შემთხვევითი სიდიდის სახით

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{s}\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}. \qquad (1)$$

შეზღუდვები: ყველა $n_i'\geq 5$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდება დაჯგუფება).

ამ კრიტერიუმის აღების აზრი შემდეგში მდგომარეობს: იკრიბება ის წილები, რასაც შეადგენს ემპირიული სიხშირეების თეორიული სიხშირეებისაგან გადახრის კვადრატები, შესაბამისი თეორიული სიხშირეებისაგან. მტკიცდება, რომ გენერალური ერთობლიობის რეალური განაწილების კანონისაგან დამოუკიდებლად (1) შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი უახლოვდება (მიისწრაფის) χ^2 განაწილებისაკენ თავისუფლებ-

ის ხარისხით $k=s-1-r$, (როცა $n\to\infty$), სადაც r – შერჩევის მონაცემებით შესაფასებელი სავარაუდო განაწილების პარამეტრების რაოდენობაა.

ნორმალური განაწილება ხასიათდება ორი პარამეტრით, ამიტომ $k=s-3$. არჩეული კრიტერიუმისათვის იგება მარჯვენა ცალმხრივი კრიტიკული არე, რომელიც განისაზღვრება უტოლობით

$$p(\chi^2>\chi^2_{\text{კრ}}(\alpha,k))=\alpha,$$

სადაც α –მნიშვნელოვნების დონეა. შესაბამისად, კრიტიკული არე მოიცემა უტოლობით $\chi^2>\chi^2_{\text{კრ}}(\alpha,k)$, ხოლო ჰიპოთეზის მიღების არეა -- $\chi^2<\chi^2_{\text{კრ}}(\alpha,k)$.

ამრიგად, იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა H_0: გენერალური ერთობლიობა განაწილებულია ნორმალურად – უნდა გამოვთვალოთ შერჩევის მიხედვით კრიტერიუმიდს დაკვირვებული მნიშვნელობა:

$$\chi^2_{\text{ფ}}=\sum_{i=1}^{s}\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'},$$

ხოლო χ^2 განაწილების კრიტიკული წერტილების ცხრილიდან ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილი $\chi^2_{\text{კრ}}(\alpha,k)$ ცნობილი α და $k=s-3$ მნიშვნელობებისათვის. თუ აღმოჩნდა, რომ $\chi^2_{\text{ფ}}<\chi^2_{\text{კრ}}(\alpha,k)$ -- ვღებულობთ ნულოვან ჰიპოთეზას, თუ $\chi^2_{\text{ფ}}>\chi^2_{\text{კრ}}(\alpha,k)$, მაშინ – უკუვაგდებთ.

პირსონის კრიტერიუმი (ხი კვადრატ კრიტერიუმი). ჰიპოთეზის შემოწმება ბინომიალური განაწილების შესახებ

მოწმდება ჰიპოთეზა: $H_0:F(x)=F_0(x)$. პოპულაციის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე (ან სიმარტივისათვის რიცხვითი ღერძი) იყოფა თანაუკვეთ ინტერვალებად: $\Delta_1=(-\infty,a_1]$, $\Delta_2=(a_1,a_2]$, . . . , $\Delta_{k-1}=(a_{k-2},a_{k-1}]$, $\Delta_k=(a_{k-1},+\infty)$. ვითვლით დაკვირვებულ სიხშირეებს O_i – თითოეულ Δ_i ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობას. ვითვლით თითოეულ Δ_i ინტერვალში $F_0(x)$ განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობას – $p_i=F_0(a_i)-F_0(a_{i-1})$ და მათი საშუალებით ვპოულობთ მოსალოდნელ სიხშირეებს E_i – $E_i=n\cdot p_i$, სადაც n არის შერჩევის მოცულობაა. კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი: $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\cong\chi^2(k-1)$.

მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V.=\chi^2_{k-1,\alpha}$, სადაც $\chi^2_{k-1,\alpha}$ – თავისუფლების $k-1$ ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია. კრიტიკული არე: C.R. = $[\chi^2_{k-1,\alpha},+\infty)$.

შეზღუდვები: **1.** მონაცემები მიღებულია შემთხვევითი შერჩევიდან; **2.** ყველა $E_i\ge 5$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდება დაჯგუფება).

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობა ახლოს უნდა იყოს ნულთან, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი გადაიხრება ნულიდან მარჯვნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს H_0 ჰიპო-

თეზის უარყოფის არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$$\alpha = P(\overline{H_0}\,|\,H_0) = P(\chi^2(k-1)\in C.R.\,|\,H_0) = P(\chi^2(k-1)\ge x_{კრ}\,|\,H_0)$$

რაც ზედა კრიტიკულის წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = \chi^2_{k-1,\alpha}$ ანუ C.R. = $[\chi^2_{k-1,\alpha},+\infty)$.

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა პოპულაციის ბინომიალური კანონით $Bi(N,p)$ განაწილებულობის შესახებ. ავღნიშნოთ ν_i-თი იმ x-ების რაოდენობა $x_1,\dots,x_n$ შერჩევიდან, რომელთათვისაც $x=i,\ \ i=0,1,\dots,N$. ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში:

$$p_i = P(X_j = i) = C_N^i p^i (1-p)^{N-i},\ i=0,1,\dots,N;\ j=1,\dots,n.$$

ბინომიალური განაწილების ცხრილებიდან მოცემული p-სათვის მიღებული p_i ალბათობებით გამოვიანგარიშოთ პირსონის სტატისტიკის რიცხვითი მნიშვნელობა:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{\nu_i^2}{p_i} - n.$$

თუ აღმოჩნდა, რომ $\chi^2 < \chi^2_{k-1,\alpha}$, მაშინ ჰიპოთეზას ვღებულობთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში – უკავაგდებთ.

იმ შემთხვევაში, როცა წარმატების p ალბათობა უცნობია, p_i ალბათობების როლში უნდა ავიღოთ მათი შეფასებები:

$$\overline{p}_i = P(X_j = i) = C_N^i\, \overline{p}^{\,i} (1-\overline{p})^{N-i}\quad (\text{სადაც}\ \ \overline{p} = \frac{1}{Nn}\sum_{j=1}^{n} x_j\ ),$$

ხოლო გადაწყვეტილების მიღების წესი რჩება იგივე.

კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმი

ამ კრიტერიუმის გამოყენება მიზანშეწონილია მცირე შერჩევების დროს.

ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : F(x) = F_0(x)$. ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1 : \max\limits_{|x|<\infty} |F(x) - F_0(x)| > 0$ (ცალმხრივი ალტერნატივები: $H_1^+ : \max\limits_{|x|<\infty}(F(x) - F_0(x)) > 0$ და $H_1^- : \max\limits_{|x|<\infty}(F(x) - F_0(x)) < 0$). კრიტერიუმის სტატისტიკა $D_n = \max\limits_{|x|<\infty} |F_n(x) - F_0(x)|$ (შესაბამისად, $D_n^+ = \max\limits_{|x|<\infty}(F_n(x) - F_0(x))$ და $D_n^- = -\min\limits_{|x|<\infty}(F_n(x) - F_0(x))$) სადაც $F_n(x)$ ემპირიული განაწილების ფუნქციაა. მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = k_{n,\alpha}$ (შესაბამისად, $C.V. = k_{n,\alpha}^+$ და $k_{n,\alpha}^+$), სადაც $k_{n,\alpha}$ (შესაბამისად, $k_{n,\alpha}^+$ და $k_{n,\alpha}^-$) – D_n (შესაბამისად, D_n^+ და D_n^-) სტატისტიკის ზედა α-კრიტიკული წერტილია.

კრიტიკული არე: თუ $F_0(x)$ განაწილების ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ მტკიცდება, რომ როცა $n\to\infty$, $P(\sqrt{n}D_n < \lambda)\to K(\lambda),\ \lambda>0,$ სადაც $K(\lambda) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{-2m^2\lambda^2}$ კოლმოგოროვის განაწილების ფუნქციაა (ანუ სტატისტიკა ასიმპტოტურად კოლმოგოროვისაა). H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა გადაიხრება ნულიდან მარჯვნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა ცალმხრივი ინტერვალი C.R. = $[x_{კრ},+\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად

$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = P(K \in C.R. \mid H_0) = P(K \geq x_{კრ} \mid H_0)$ რაც ზედა კრიტიკული წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = k_{n,\alpha}$ (შესაბამისად, $x_{კრ} = k^{+}_{n,\alpha}$ და $k^{-}_{n,\alpha}$), ანუ C.R. = $[k_{n,\alpha}, +\infty)$ (შესაბამისად, C.R. = $[k^{+}_{n,\alpha}, +\infty)$ და C.R. = $[k^{-}_{n,\alpha}, +\infty)$). აქვე შევნიშნავთ, რომ $k_{n,\alpha} = k_{\alpha} / \sqrt{n}$ (სადაც k_{α} – კოლმოგოროვის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია), H_0-ის სამართლიანობის შემთხვევაში D^{+}_{n} და D^{-}_{n} ერთნაირადაა განაწილებული და თუ $\alpha < 0.2$, მაშინ $k^{+}_{n,\alpha} \approx k_{n,2\alpha}$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

განაწილების ნორმალურობის შემოწმების მიახლოებითი მეთოდი

ცნობილია, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის ასიმეტრია და ექსცესი ნულია. ამიტომ, თუ შესაბამისი ემპირიული სიდიდეები საკმარისად მცირეა, შეიძლება დავუშვათ, რომ გენერალური ერთობლიობა განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით.

ემპირიული (შერჩევითი) განაწილების ასიმეტრია	ემპირიული (შერჩევითი) განაწილების ექსცესი
$a_{შერ} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)^3}$	$e_{შერ} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)^4} - 3$

ერთგვაროვნების შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი

ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0: p_1 = p_2 = \cdots = p_R$. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: $H_1:$ ერთი პროპორცია მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგან. კრიტერიუმის სტატისტიკა: ხი კვადრატი. კრიტერიუმის მნიშვნელობა **T.V.**$\equiv \chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}}$, სადაც $o_{i,j}$ -- დაკვირვებული სიხშირეებია, ხოლო $e_{i,j}$ კი მოსალოდნელი სიხშირეები – $e_{i,j} = \frac{\sum_i o_{i,j} \times \sum_j o_{i,j}}{\sum_{i,j} o_{i,j}}$.

მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = \chi^2_{k,\alpha} \equiv \chi^2_{(R-1)(C-1),\alpha}$, სადაც R წარმოადგენს შერჩევათა რაოდენობას, ხოლო C კი კლასების რაოდენობაა (აქ $\chi^2_{k,\alpha}$ – თავისუფლების k ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია). შეზღუდვა: ყველა $e_{i,j} \geq 5$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდება დაჯგუფება). კრიტიკული არე: C.R. = $[\chi^2_{k,\alpha}, +\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობა გადაიხრება ნულიდან მარჯვნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე

წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა ცალმხრივი ინტერვალი C.R. $= [x_{კრ}, +\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 | H_0) = P(\chi^2(k) \in C.R. | H_0) = P(\chi^2(k) \geq x_{კრ} | H_0)$ რაც ზედა კრიტიკულის წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = \chi^2_{k,\alpha}$ ანუ C.R. $= [\chi^2_{k,\alpha}, +\infty)$.

დამოუკიდებლობის შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი

ძირითადი ჰიპოთეზა: H_0 : A და B ნიშნები დამოუკიდებელია. ალტერნატიული ჰიპოთეზა: H_1 : A და B ნიშნები დამოკიდებელია. კრიტერიუმის სტატისტიკა: ხი კვადრატი. კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.$\equiv \chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}}$, სადაც $o_{i,j}$ -- დაკვირვებული სიხშირეებია, ხოლო $e_{i,j}$ კი მოსალოდნელი სიხშირეები – $e_{i,j} = \frac{\sum_i o_{i,j} \times \sum_j o_{i,j}}{\sum_{i,j} o_{i,j}}$.

მნიშვნელოვნების დონე: α. კრიტიკული წერტილი: $C.V. = \chi^2_{k,\alpha} \equiv \chi^2_{(R-1)(C-1),\alpha}$, სადაც R და C წარმოადგენენ შესაბამისად A და B ნიშნების კატეგორიათა რაოდენობებს (აქ $\chi^2_{k,\alpha}$ – თავისუფლების k ხარისხის მქონე ხი კვადრატ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია). შეზღუდვა: ყველა $e_{i,j} \geq 5$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდება დაჯგუფება). კრიტიკული არე: C.R. $= [\chi^2_{k,\alpha}, +\infty)$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის დაკვირვებული მნიშვნელობა **T.V.**$\in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

კრიტიკული არის დადგენა: H_1 ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობა გადაიხრება ნულიდან მარჯვნივ და ვინაიდან კრიტიკული არე წარმოადგენს ალტერნატიული ჰიპოთეზის მიღების არეს, გასაგებია, რომ ის უნდა იყოს მარჯვენა ცალმხრივი ინტერვალი C.R. $= [x_{კრ}, +\infty)$. I გვარის შეცდომის განმარტების თანახმად $\alpha = P(H_1 | H_0) = P(\chi^2(k) \in C.R. | H_0) = P(\chi^2(k) \geq x_{კრ} | H_0)$ რაც ზედა კრიტიკულის წერტილის განმარტების თანახმად ნიშნავს, რომ $x_{კრ} = \chi^2_{k,\alpha}$ ანუ C.R. $= [\chi^2_{k,\alpha}, +\infty)$.