ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ალექსანდრე აპლაკოვი, უშანგი გოგინავა, თამაზ ზერეკიძე, შალვა ზვიადაძე, ბაჩუკი მესაბლიშვილი, რუსუდან მესხია,

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის

თბილისი 2021

სარჩევი

1 სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები **6**
1.1 სიმრავლის ცნება 6
1.2 მოქმედებები სიმრავლეებზე 8
1.3 სავარჯიშოები: 11

2 ნამდვილ რიცხვთა ღერძი. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა **14**
2.1 რიცხვითი ღერძი. რიცხვითი შუალედები. ნამდვილი რიცხვის მოდული და მისი თვისებები. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა 14
2.2 წრფივი და კვადრატული განტოლებები 21
2.3 სავარჯიშოები: 23

3 ფუნქციები **26**
3.1 ფუნქციის ცნება 26
3.2 ეკონომიკური ფუნქციები 28
3.3 ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი და ფარდობა 30
3.4 ფუნქციათა კომპოზიცია 31
3.5 შექცეული ფუნქცია 34
3.6 ფუნქციის გრაფიკის ცნება 36
3.7 ზრდადი და კლებადი ფუნქციები 41
3.8 ფუნქციის ექსტრემუმი 42
3.9 სავარჯიშოები: 45

4 წრფივი ფუნქცია და მისი გამოყენება ეკონომიკაში **51**
4.1 წრფე.წრფის დახრის კოეფიციენტი. წრფის განტოლებათა სახეები. 51
4.2 წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის ნიშნები. კუთხე ორ წრფეს შორის. 56
4.3 ორი წრფის გადაკვეთა. 60
4.4 მოთხოვნა-მიწოდების ანალიზი. წონასწორული ფასის განსაზღვრა. . . . 61
4.5 ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემა. 64
4.6 წრფივი ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკაში. 66
4.7 სავარჯიშოები: 68

5 წრფივი პროგრამირების ელემენტები და მისი გამოყენება ეკონომიკაში **74**
5.1 წრფივ ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. 74
5.2 წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი. . . . 77
5.3 წრფივი პროგრამირების გამოყენებები ეკონომიკურ ამოცანებში. 83
5.4 სავარჯიშოები: 89

6 კვადრატული ფუნქცია და მისი გამოყენება ეკონომიკაში 92
6.1 კვადრატული ფუნქცია. 92
6.2 კვადრატული ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში. 95
6.3 ხარისხოვანი და რაციონალური ფუნქციები. 100
6.4 სავარჯიშოები: 101

7 ფუნქციონალური მოდელები ეკონომიკაში 104
7.1 სავარჯიშოები: 108

8 მატრიცები და დეტერმინანტები. 111
8.1 მატრიცის ცნება. 111
8.2 მატრიცის ტრანსპონირება. 112
8.3 მატრიცების შეკრება და გამოკლება. 113
8.4 მატრიცის რიცხვზე გამრავლება. 115
8.5 მატრიცების ნამრავლი. 115
8.6 დეტერმინანტი. მინორი და ალგებრული დამატება. 118
8.7 სავარჯიშოები: 121

9 შებრუნებული მატრიცა და მისი გამოსათვლელი ფორმულა. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები 124
9.1 შებრუნებული მატრიცა 124
9.2 წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები 127
9.3 კვადრატული სისტემის ამოხსნის მატრიცული ხერხი 128
9.4 კვადრატული სისტემების ამოხსნის კრამერის წესი 130
9.5 წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით 133
9.6 სავარჯიშოები 137

10 ვექტორები 140
10.1 ვექტორის ცნება 140
10.2 ოპერაციები ვექტორებზე 144
10.2.1 ვექტორების შეკრება. 144
10.2.2 ვექტორის სკალარზე გამრავლება. 146
10.2.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი 147
10.3 ვექტორების ინტერპრეტაცია სიბრტყეზე და სივრცეში 149
10.4 ვექტორული სივრცეები 152
10.5 ბაზისი და განზომილება 155
10.6 ვექტორების გამოყენება საბუღალტრო აღრიცხვაში 156
10.7 პროდუქციის სივრცე. ფასების ვექტორი. 161
10.8 სავარჯიშოები 162

11 ეკონომიკასა და ბიზნესში წრფივი ალგებრის გამოყენების ზოგიერთი მაგალითი 167
11.1 წარმოების დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა 167
11.2 წარმოებაში დასაქმების განსაზღვრა. 172
11.3 საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი 173
11.4 სავარჯიშოები 175

12 ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა **178**
12.1 ინტუიციური წარმოდგენა ფუნქციის ზღვრის შესახებ 178
12.2 ფუნქციის ზღვრის თვისებები 181
12.3 ცალმხრივი ზღვრები 182
12.4 ფუნქციის უწყვეტობა 187
12.5 უსასრულო ზღვრები და ზღვარი უსასრულობაში 193
12.6 ფუნქციის ზღვრის მკაცრი განსაზღვრება 196
12.7 სენდვიჩის თეორემა 197
12.8 სავარჯიშოები: 198

13 ფუნქციის წარმოებული. გაწარმოების წესები **206**
13.1 წირის მხები. წირის დახრა 206
13.2 ფუნქციის წარმოებული 209
13.3 წარმოებულის ეკონომიკური შინაარსი 214
13.4 წარმოებულის კავშირი უწყვეტობასთან 215
13.5 გაწარმოების წესები 215
13.6 ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულები 218
13.7 სავარჯიშოები 220

14 მაღალი რიგის წარმოებულები. ფუნქციის დიფერენციალი. მარგინალური ანალიზის ელემენტები **224**
14.1 მაღალი რიგის წარმოებულები 224
14.2 ფუნქციის დიფერენციალი 226
14.3 ლოპიტალის წესი 227
14.4 მარგინალური ფუნქციები 229
14.5 სავარჯიშოები 232

15 არაცხადი ფუნქცია. არაცხადი ფუნქციის წარმოებული. არაცხადი ფუნქციის გამოყენება ბიზნესის ამოცანებში **236**
15.1 არაცხადი ფუნქციები 236
15.2 არაცხადი ფუნქციის წარმოებული 236
15.3 არაცხადი ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკაში 238
15.4 სავარჯიშოები 241

16 წარმოებულის გამოყენება ფუნქციის გამოსაკვლევად **244**
16.1 ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების დადგენა 244
16.2 ფუნქციის ექსტრემუმები 245
16.3 ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი 252
16.4 ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები 254
16.5 ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება 256
16.6 სავარჯიშოები 257

17 ეკონომიკური ფუნქციების ოპტიმიზაცია. მარგინალური ანალიზის კრიტერიუმები მაქსიმალური მოგებისა და მინიმალური დანახარჯისთვის. ფუნქციის ელასტიკურობა. მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ **262**
17.1 ფუნქციის ელასტიკურობა 267
17.2 მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ 268
17.3 სავარჯიშოები 270

18 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები. ფინანსური მათემატიკის ელემენტები 273
18.1 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები 273
18.2 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების წარმოებულები 279
18.3 ფინანსური მათემატიკის ელემენტები 280
18.4 სავარჯიშოები: 285

19 განუსაზღვრელი ინტეგრალი 288
19.1 პირველადი ფუნქციის ცნება 288
19.2 განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის წესები 292
19.3 სავარჯიშოები 294

20 განსაზღვრული ინტეგრალი 297
20.1 მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი 297
20.2 განსაზღვრული ინტეგრალი 299
20.3 კალკულუსის ძირითადი თეორემა 300
20.4 განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის წესები 302
20.5 ორ წირს შორის მოქცეული არის ფართობი 304
20.6 ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა 305
20.7 სავარჯიშოები 307

21 არასაკუთრივი ინტეგრალი 312
21.1 არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრით 312
21.2 არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოყენება 315
21.3 სავარჯიშოები 316

22 დიფერენციალური განტოლებები 318
22.1 დიფერენციალური განტოლების ცნება 318
22.2 განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება 319
22.3 პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება 320
22.4 მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება 321
22.5 დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება ეკონომიკაში 322
22.6 სავარჯიშოები 324

23 მრავალი ცვლადის ფუნქციები 326
23.1 ორი ცვლადის ფუნქცია 326
23.2 ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი 329
23.3 დონის წირები და მათი გამოყენება ეკონომიკაში 330
23.4 სავარჯიშოები 332

24 ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი 335
24.1 კერძო წარმოებულები 336
24.2 მარგინალური ანალიზი 337
24.3 მეორე რიგის კერძო წარმოებულები 339
24.4 რთული ფუნქციის კერძო წარმოებული 340
24.5 ორი ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაცია 341
24.6 სავარჯიშოები 345

ლექცია 1

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

1.1 სიმრავლის ცნება

სიმრავლე მათემატიკის ერთ–ერთი ძირითადი ცნებაა. ამ ცნების მნიშვნელობას ხაზს უსვამს მათემატიკის, როგორც მეცნიერების, ერთ–ერთი განსაზღვრება: მათემატიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გარკვეულ სტრუქტურებს სიმრავლეებზე.

სიმრავლე არის გარკვეულ ობიექტთა ერთობლიობა, კლასი.

სიმრავლე და ობიექტთა ერთობლიობა სინონიმებია. ობიექტებს, რომლებისგანაც შედგება მოცემული სიმრავლე, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. ჩვეულებრივ, სიმრავლეები ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღინიშნება: $A, B, C, D, ...$, ხოლო სიმრავლის ელემენტები–პატარა ასოებით: $a, b, c, d, ...$ თუ a ობიექტი A სიმრავლის ელემენტია, მაშინ ჩავწერთ $a \in A$ და უკანასკნელ ჩანაწერს ასე წავიკითხავთ: "a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს". ჩანაწერი $a \notin A$ ან $a \overline{\in} A$ ნიშნავს, რომ a ელემენტი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, ანუ A სიმრავლის ელემენტთა შორის არ არის a.

როდესაც სიმრავლეზე ვსაუბრობთ, ვგულისხმობთ, რომ ყოველი ობიექტის მიმართ ჭეშმარიტია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი ორი შესაძლებლობიდან: ობიექტი ეკუთვნის მოცემულ სიმრავლეს, როგორც მისი ელემენტი ან არა.

მაგალითი 1.1 *ვთქვათ,* $\mathbb{N}$ *არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ განსაზღვრების ძალით* $5 \in \mathbb{N}$*, ხოლო* $2/3 \notin \mathbb{N}$*.*

სიმრავლე შედგება მხოლოდ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ობიექტებისაგან. თუ A სიმრავლის ელემენტებია $a, b, c, d, ...$, მაშინ A სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად $A = \{a, b, c, d, ...\}$. მაგალითად, თუ $2, 4, 5, 9$ არის A სიმრავლის ელემენტები და ის სხვა ელემენტს არ შეიცავს, მაშინ შეგვიძლია, ჩავწეროთ $A = \{2, 4, 5, 9\}$. შევნიშნოთ, რომ ჩაწერა $\{2, 4, 5, 2, 9\}$ არ არის კორექტული, რადგანაც 2, როგორც ობიექტი, შესაბამის ჩანაწერში უნდა მონაწილეობდეს მხოლოდ ერთხელ. ჩანაწერი: $\{2, 5, \{5\}\}$, ცხადია სიმრავლეს წარმოადგენს, რომელიც შეიცავს სამ ელემენტს (შევნიშნოთ, რომ $\{5\}$ და 5 განხილული სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტებია).

ხშირად გამოვიყენებთ სიმრავლის მოცემის ასეთ წესს: დავასახელებთ რაიმე თვისებას, რომელსაც აკმაყოფილებს აღსაწერი ერთობლიობის ყველა ობიექტი და მხოლოდ ისინი.

ვთქვათ, P არის თვისება, რომელიც გააჩნია გარკვეული ტიპის ობიექტებს, მაშინ ამ თვისების მქონე ყველა ობიექტთა A სიმრავლე ასე ჩაიწერება: $A = \{x : x$–ს აქვსPთვისება$\}$, ან ასე: $A = \{x \mid x$–ს აქვს P თვისება$\}$.

მაგალითი 1.2 *სიმრავლე $\{x : x > 0\}$ წარმოადგენს ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლეს.*

N,Z, Q, I და R სიმბოლოებით აღნიშნავენ, შესაბამისად, ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეებს.

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლე. A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ნაწილი ანუ ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლესაც ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში წერენ $A \subset B$. ეს უკანასკნელი იკითხება ასე: A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა. განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი B სიმრავლისთვის სამართლიანია ჩართვა $B \subset B$. მათემატიკაში შემოტანილია ე.წ. ცარიელი სიმრავლის ცნებაც.

ცარიელი სიმრავლე ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი A სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

ცხადია, რომ $N \subset Z \subset Q \subset R$.

მაგალითი 1.3 *განვიხილოთ სიმრავლე $A = \{a, b, c\}$, სიმრავლეები $\varnothing$, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ არიან A სიმრავლის ქვესიმრავლეები, მაგრამ არ არან მისი ელემენტები.*

ვთქვათ, A და B ისეთი სიმრავლეებია, რომ $A \subset B$ და $B \subset A$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A და B ტოლი სიმრავლეებია და ვწერთ $A = B$.

მაგალითი 1.4 *ვთქვათ, $A = \{1, 7, 8\}$ და $B = \{7, 1, 8\}$. ცხადია, რომ $A = B$.*

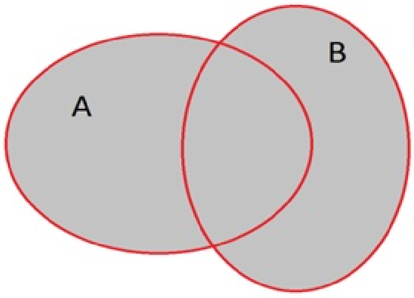
სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ მისი ელემენტების რაოდენობა არის რაიმე მთელი არაუარყოფითი რიცხვი. სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ ის სასრული არაა, ანუ შეიცავს ელემენტთა უსასრულო რაოდენობას.

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე უსასრულო სიმრავლის ერთ–ერთი მაგალითია.

მომავალში, ჩანაწერების გამარტივების მიზნით, ზოგჯერ, ნაცვლად სიტყვებისა „ან“, „და“, „არსებობს“, „ნებისმიერი“ გამოვიყენებთ, შესაბამისად, სიმბოლოებს $\vee$, $\wedge$, $\exists$, $\forall$.

1.2 მოქმედებები სიმრავლეებზე

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლე. A და B სიმრავლეების გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ–ერთს მაინც ეკუთვნის. A და B სიმრავლეების გაერთიანება აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი. ამგვარად $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (იხ. სურ 1.1).



სურ 1.1

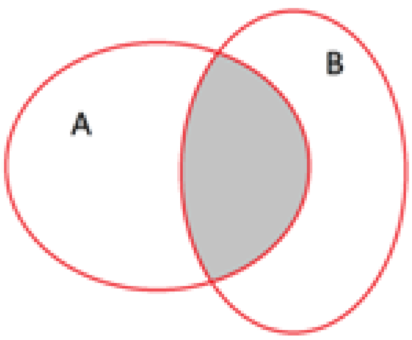
მაგალითი 1.5 *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 8\}$ *და* $B = \{7, 1, 10, 11\}$*. მაშინ*

$$A \cup B = \{1, 7, 8, 10, 11\}.$$

მომავალში, გარკვეული ობიექტების ჩამოთვლისას, აგრეთვე რიცხვითი შუალედების ჩაწერისას თანაბარი უფლებით გამოვიყენებთ როგორც მძიმეებს, ისე წერტილმძიმეებს.

A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს,რომლებიც ეკუთვნის A და B სიმრავლეებიდან თითოეულს. A და B სიმრავლეების თანაკვეთა აღინიშნება $A \cap B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ (იხ. სურ 1.2).

ცხადია, რომ თუ $A \subset B$, მაშინ $A \cup B = B$ და $A \cap B = A$.

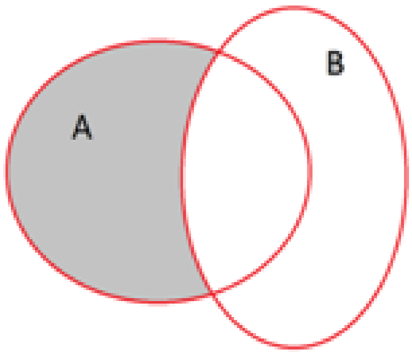


სურ 1.2

მაგალითი 1.6 *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 8\}$ *და* $B = \{7, 1, 10, 11\}$*. მაშინ*

$$A \cap B = \{1, 7\}.$$

A და B სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტისაგან შედგენილ სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნის. A და B სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება $A \backslash B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ (იხ. სურ 1.3).



სურ 1.3

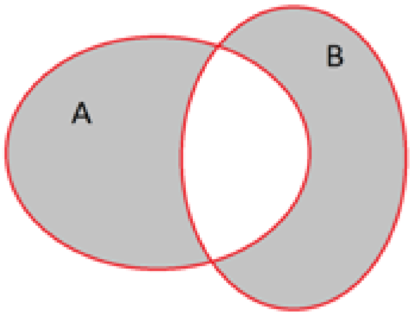
მაგალითი 1.7 *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 8\}$ *და* $B = \{7, 1, 10, 11\}$*. მაშინ* $A \backslash B = \{8\}$.

მაგალითი 1.8 *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 9\}$ *და* $B = \{1, 7, 10, 11\}$*. ცხადია, რომ* $A \backslash B = \{9\}$*, მაგრამ* $(A \backslash B) \cup B = \{1, 7, 9, 10, 11\} \neq A$

სიმრავლეების გაერთიანება და თანაკვეთა შეიძლება განისაზღვროს არა მარტო ორი, არამედ–რამდენიმე სიმრავლისთვისაც.

A და B სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა ეწოდება $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა აღინიშნება სიმბოლოთი $A \triangle B$ (იხ. სურ 1.4).

ბრტყელი ფიგურების საშუალებით სიმრავლეების გამოსახვის ასეთ დიაგრამებს **ვენის დიაგრამებს** უწოდებენ.



სურ 1.4

$n(S)$–ით აღვნიშნოთ სასრული S სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა. სამართლიანია ფორმულა:

$$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T).$$

ვთქვათ, M რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა და $A \subset M$. $C_M A$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $M \backslash A$ სიმრავლეს და ვუწოდებთ A სიმრავლის დამატებას M სიმრავლემდე.

თეორემა 1.1 (დე მორგანის კანონები) *ვთქვათ, $A \subset M$ და $B \subset M$. სამართლიანია ტოლობები:*

$$\begin{aligned} C_M(A \cup B) &= C_M A \cap C_M B, \\ C_M(A \cap B) &= C_M A \cup C_M B. \end{aligned}$$

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი. ვთქვათ, a და b რაიმე ობიექტებია. (a, b) სიმბოლოთი აღვნიშნოთ დალაგებული წყვილი, რომლის პირველი ელემენტია a, ხოლო მეორე - b. ვიტყვით, რომ ორი (a, b) და (c, d) დალაგებული წყვილი ტოლია, თუ $a = c$ და $b = d$.

შევნიშოთ, რომ (a, b) და $\{a, b\}$ სხვადასხვა ობიექტებია: (a, b) დალაგებული წყვილია, ხოლო $\{a, b\}$ - ორელემენტიანი სიმრავლე. დასაშვებია (a, a) წყვილი, ხოლო $\{a, a\}$ სიმბოლოს აზრი არ აქვს.

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლე. ყველა დალაგებული (a, b) წყვილის სიმრავლეს, სადაც $a \in A$ და $b \in B$, A და B სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება $A \times B$ სიმბოლოთი.

ამგვარად, $A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \text{და} \quad b \in B\}$. თუ $A = B$, მაშინ $A \times A$ დეკარტულ ნამრავლს ვუწოდებთ A სიმრავლის **დეკარტულ კვადრატს** და მას A^2 სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

მაგალითი 1.9 *ვთქვათ,* $A = \{1, 7, 9\}$ *და* $B = \{1, 7, 10, 11\}$*. მაშინ*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1),(1,7),(1,10),(1,11),(7,1),(7,7),\\ &\quad (7,10),(7,11),(9,1),(9,7),(9,10),(9,11)\}. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის განსაზღვრების ძალით, თუ მოცემული სიმრავლეებიდან ერთი მაინც ცარიელია, მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი ცარიელი სიმრავლეა.

1.3 სავარჯიშოები:

1. ვთქვათ, $A = \{1\}$ და $B = \{1, 2\}$. ჭეშმარიტია თუ მცდარი?:

   ა)$A \subset B$; ბ) $1 \in A$; გ) $2 \in A$; დ) $2 \in B$; ე) $2 \subset B$; ვ) $A \in B$.

2. შეადგინეთ $A = \{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$ სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე.

3. ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ და $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. ჭეშმარიტია თუ მცდარი:

   ა) $A = B$; ბ) $A \subset B$; გ) $A \subset C$; დ) $A \in B$; ე) $A \in C$; ვ) $B \in D$

4. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \Delta B$, $A \times B$, თუ

   ა) $A = \{1, 2, 5, 9\}$, $B = \{2, 9, 7, 5, 1, 6\}$;

   ბ) $A = \{2n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2n + 1\ :\ n \in \mathbb{N}\}$;

5. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 7, 9\}$, $C = \{3, 8, 9\}$. იპოვეთ:

   ა) $(A \cup B) \cap C$; ბ) $(A \backslash B) \times (B \backslash C)$; გ) $(A \cap B) \cup C$; დ) $(A \cup B) \times (B \backslash C)$.

6. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{a; b\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ და $C = \{2; 3; 7; 9\}$. ჩაწერეთ სიმრავლე $A \times (B \cap C)$.

7. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{2, 4, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $C = \{7, 9\}$. იპოვეთ:

   ა) $(A \cap B) \cup C$; ბ) $(A \backslash B) \times (C \backslash B)$;
   გ) $(A \cup B) \cap C$; დ) $(A \backslash B) \times (B \backslash C)$.

8. მოცემულია სიმრავლეები: $A = \{-2; k\}$, $B = \{2; 5\}$ და $C = \{2; b\}$. ჩაწერეთ სიმრავლე $(B \cup C) \times A$

9. მიუთითეთ ცარიელი სიმრავლეები:

   ა) ევროპის ქვეყნების სიმრავლე, რომელთა დასახელება იწყება "ი"ასოზე.
   ბ) მარსზე მცხოვრები ადამიანების სიმრავლე.
   გ) ერთზე ნაკლები ნატურალური რიცხვების სიმრავლე.
   დ) საქართველოს ქალაქების სიმრავლე, რომელთა მოსახლეობა აღემატება 100000.

10. იპოვეთ:

    ა) $N \backslash Z$;

    ბ) $Z \backslash N$;

    გ) $N \cap Z$;

    დ) $R \backslash Q$;

    ე) $Q \cap Z$;

    ვ) $Q \cap I$.

11. მიუთითეთ ცარიელი სიმრავლეები:

    ა) საქართველოს ქალაქების სიმრავლე, რომელთა დასახელება იწყება "ს"ასოზე.
    ბ) $x^2 + 10 = 0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნთა სიმრავლე.
    გ) ლუწი მარტივი რიცხვების სიმრავლე.
    დ) $5x^2 > -1$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.

12. მართებულია თუ არა ტოლობა $A = B$, თუ $A = \{0; -1; 3\}$ და
    $B = \{x \,:\, x(x^2 - 2x - 3) = 0\}$?

13. მართებულია თუ არა ტოლობა $A = B$, თუ $A = \{-3; -1; 4\}$ და
    $B = \{x \,:\, x(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 4x + 3) = 0\}$?

14. ტურისტულ სააგენტოს მიაკითხა 64-მა ადამიანმა, რომელთაგან 26-ს სურს სამოგზაუროდ წასვლა ავსტრიაში, 43-ს - ესპანეთში, ხოლო 13-ს - ორივე ქვეყანაში.
    ა) რამდენ ადამიანს სურს სამოგზაუროდ წასვლა მხოლოდ ავსტრიაში?
    ბ) რამდენ ადამიანს სურს მოგზაურობა მხოლოდ ესპანეთში?
    გ) რამდენ ადამიანს სურს იმოგზაუროს ავსტრიაში ან ესპანეთში?
    დ) რამდენ ადამიანს არ სურს იმოგზაუროს არც ავსტრიასა და არც ესპანეთში?

15. გამოკითხული 92 სტუდენტიდან აღმოჩნდა, რომ 64 მათგანი სწავლობს ინგლისურ ენას, 45 - ფრანგულს, ხოლო 26 - ორივე უცხო ენას.
    ა) რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ ინგლისურს?
    ბ) რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ ფრანგულს?
    გ) რამდენი სტუდენტი სწავლობს ინგლისურ ან ფრანგულ ენებს?
    დ) რამდენი სტუდენტი არ სწავლობს არც ერთ უცხო ენას?

16. ვთქვათ, A არის სიმრავლე საქართველოში მცხოვრები ადამიანებისა, რომელთა ასაკი მეტია 17 წელზე და 35 წელს არ აღემატება, ხოლო B არის სიმრავლე ადამიანებისა, რომელთა ასაკი 22 წელს არ აღემატება. A და B სიმრავლეებზე ოპერაციების საშუალებით გამოსახეთ სიმრავლე ადამიანებისა:

    ა) რომელთა ასაკი 17 წელზე მეტია და 22 წელს არ აღემატება;

    ბ) რომელთა ასაკი 22 წელზე მეტია და არ აღემატება 35 წელს;

    გ) რომელთა ასაკი 17 წელს არ აღემატება;

    დ) რომელთა ასაკი 35 წელს არ აღემატება.

17. ჩაწერეთ რაიმე ისეთი A და B სიმრავლეები, რომელთათვისაც:

ა) $A \cap B = \{a; -1; 7\}$;
ბ) $A \cap B = \emptyset$;
გ) $A \cup B = \{4; 9; -3; b\}$;
დ) $A \cup B = \{5\}$;
ე) $A \backslash B = \{2; k\}$;
ვ) $A \backslash B = A$.

18. ვენის დიაგრამების გამოყენებით აჩვენეთ, თუ როდის არის სამართლიანი შემდეგი სიმრავლური ტოლობა $(A \backslash B) \cup B = A$.

19. ჩაწერეთ $A = \{a; b; 7\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისაგან შედგენილი სიმრავლე.

20. ჩაწერეთ $B = \{5; \{c\}; \emptyset\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისაგან შედგენილი სიმრავლე.

ლექცია 2

ნამდვილ რიცხვთა ღერძი. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

2.1 რიცხვითი ღერძი. რიცხვითი შუალედები. ნამდვილი რიცხვის მოდული და მისი თვისებები. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

განვიხილოთ წრფე და მასზე მდებარე ორი A და B განსხვავებული წერტილი. ამ წრფეზე შეიძლება ავირჩიოთ მოძრაობის ორი მიმართულება: A-დან B-სკენ, ან B-დან A-სკენ. მათგან ერთ–ერთი, მაგალითად, A-დან B-სკენ, მივიღოთ დადებით მიმართულებად. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და აღებულ წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის შეიძლება, დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შემდეგი წესით: ნულს შევუსაბამოთ წრფის რომელიმე O წერტილი, რომელსაც სათავე ვუწოდოთ. რაიმე მონაკვეთის სიგრძე მივიღოთ სიგრძის ერთეულად და ნამდვილი $\pm a(a > 0)$ რიცხვს შევუსაბამოთ წრფის წერტილი, რომელიც დაშორებულია O სათავიდან a მანძილით დადებითი მიმართულებით $+a$ რიცხვისათვის და უარყოფითი მიმართულებით $-a$ რიცხვისათვის. ცხადია, რომ ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა. ამ წესით მიღებულ წრფეს ვუწოდოთ რიცხვითი ღერძი ანუ საკოორდინატო ღერძი. საკოორდინატო ღერძის რაიმე წერტილის შესაბამის რიცხვს ამ წერტილის კოორდინატი ეწოდება.

მაშასადამე, წერტილის მდებარეობა ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განისაზღვრება ერთი კოორდინატით. შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ.

ვთქვათ: a და b ორი ნამდვილი რიცხვია და $a < b$.

განსაზღვრება 2.1 *ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას*

$$a \leq x \leq b,$$

ჩაკეტილი შუალედი (მონაკვეთი ან სეგმენტი) ეწოდება და $[a;b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ანუ

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

ანალოგიურად,

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება, ხოლო

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

სიმრავლეებს ნახევრად ღია შუალედები ეწოდებათ.

განსაზღვრება 2.2 *ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $x \geq a$, უსასრულო შუალედი ეწოდება და $[a; \infty)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ანუ*

$$[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები:

$$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

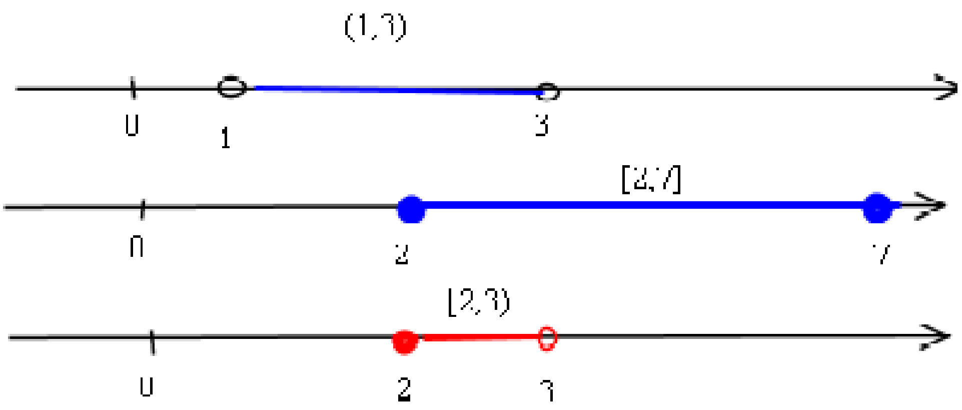
ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება

$$\mathbb{R} = (-\infty; \infty).$$

მაგალითი 2.1 *რიცხვით ღერძზე დავშტრიხოთ $(1; 3)$ და $[2; 7]$ სიმრავლეების თანაკვეთა (იხილეთ სურათი 2.1)*

განსაზღვრება 2.3 *ნამდვილი a რიცხვის მოდული ეწოდება თვით ამ a რიცხვს, თუ იგი არაუარყოფითია და მის მოპირდაპირე რიცხვს, თუ იგი უარყოფითია. რიცხვის მოდული $|a|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{როცა } a \geq 0, \\ -a, & \text{როცა } a < 0. \end{cases}$$



სურ 2.1

ცხადია, რომ გეომეტრიულად ნამდვილი რიცხვის მოდული წარმოადგენს მანძილს რიცხვითი ღერძის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე.

მაგალითად: $|5| = 5$, $|-2| = -(-2) = 2$. მოვიყვანოთ მოდულის ზოგიერთი თვისება:

თვისება 2.1 *ა) ნებისმიერი a ნამდვილი რიცხვის მოდული არაუარყოფითი სიდიდეა $|a| \geq 0$;*
ბ) მოპირდაპირე რიცხვების მოდულები ტოლია $|a| = |-a|$.

თვისება 2.2 *ორი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

თვისება 2.3 *თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|\,.$$

თვისება 2.4 *ორი რიცხვის ნამრავლის მოდული უდრის ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლს, ე. ი.*

$$|ab| = |a|\,|b|\,.$$

თვისება 2.5 *ორი რიცხვის შეფარდების მოდული ($b \neq 0$) უდრის ამ რიცხვების მოდულების შეფარდებას, ე. ი.*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა საკოორდინატო ღერძზე
ვთქვათ, a და b ორი ნამდვილი რიცხვია. მაშინ a და b წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$d(a,b) = |b-a|.$$

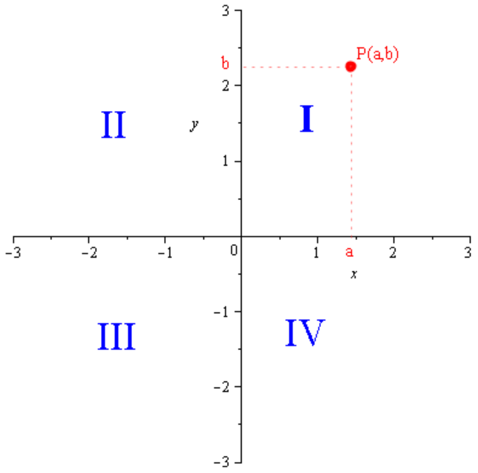
თვისება 2.1–ის ძალით მივიღებთ

$$|b-a| = |a-b|\,.$$

განვიხილოთ სიბრტყეზე ერთიდაიმავე მასშტაბის ორი ურთიერთმართობული და საერთო სათავის მქონე OX და OY საკოორდინატო ღერძი. OX ღერძს ვუწოდოთ აბსცისათა ღერძი, ხოლო OY ღერძს – ორდინატთა ღერძი. როგორც წესი,სიბრტყეზე აბსცისთა ღერძს იღებენ "ჰორიზონტალურად"და მასზე მოძრაობას ირჩევენ მარცხნიდან მარჯვნივ, ორდინატთა ღერძს კი იღებენ "ვერტიკალურად"და მასზე მიმართულებას ირჩევენ ქვემოდან ზემოთ. საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ყოფს ოთხ ნაწილად, რომელთაც მეოთხედები ეწოდება და ინომრებიან ისე, როგორც სურ. 2.2-ზეა ნაჩვენები. საკოორდინატო ღერძთა ასეთ სისტემას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ეწოდება, ხოლო ღერძების გადაკვეთის O წერტილს კოორდინატთა სისტემის სათავე. შევნიშნოთ, რომ თავად საკოორდინატო ღერძების წერტილებს არ მივაკუთვნებთ არცერთ მეოთხედს.

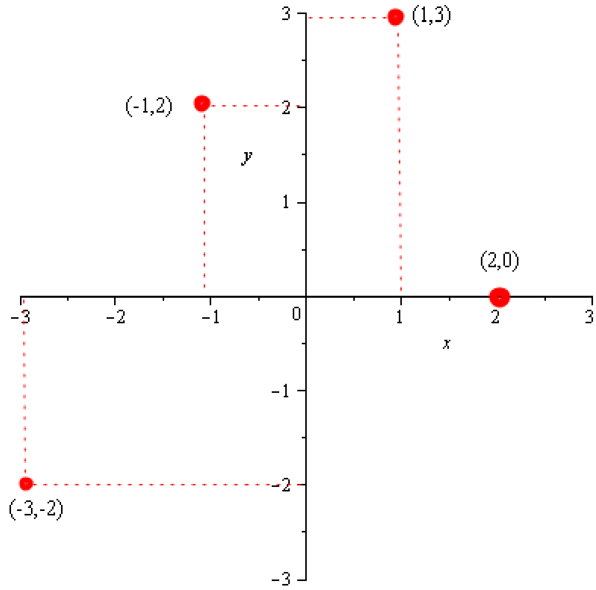
სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი A წერტილიდან OX და OY ღერძებისადმი გავავლოთ მართობები. OX ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი აღვნიშნოთ x–ით, ხოლო OY ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი კი– y–ით. ამგვარად, სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული (x, y) წყვილი. x-ს ეწოდება A წერტილის აბსცისა, ხოლო y–ს ორდინატი, x-ს და y–ს ეწოდება A წერტილის კოორდინატები და წერენ $A(x, y)$.

ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა (x, y) წყვილი. აბსცისათა ღერძის x წერტილსა და ორდინატთა ღერძის y წერტილზე გავავლოთ შესაბამისად OX და OY ღერძების მართობული წრფეები. ცხადია, რომ მოცემული (x, y) წყვილი შეესაბამება გავლებული პერპენდიკულარების გადაკვეთის A წერტილს. ამ წესით ნამდვილ რიცხვთა



სურ 2.2

ნებისმიერ (x,y) წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთადერთი წერტილი, რომლის კოორდინატებია x და y (იხ. სურ. 2.3).

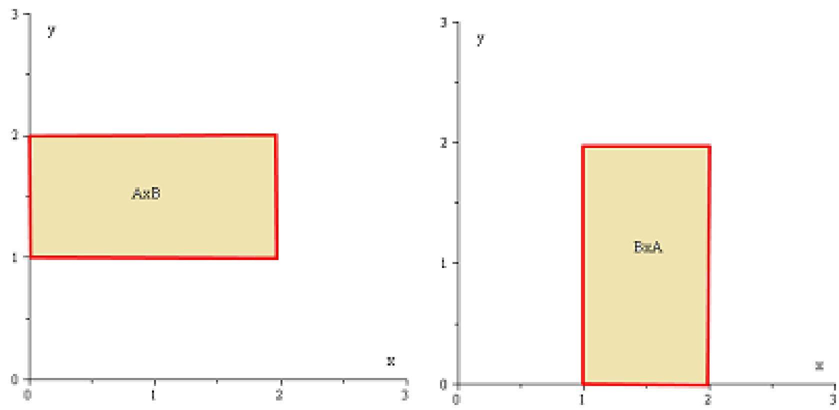


სურ 2.3

ამრიგად, სიბრტყის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

სიბრტყეს, რომლეზედაც არჩეულია კოორდინატთა სისტემა, საკოორდინატო სიბრტყე (ან დეკარტის საკოორდინატო სისტემა) ეწოდება და აღინიშნება $\mathbb{R}^2$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 2.2 *ვთქვათ,* $A=[0;2]$, $B=[1;2]$. *რადგან რიცხვთა ყოველ დალაგებულ* (a,b) *წყვილს სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი, რომლის პირველი კოორდინატია* a , *ხოლო მეორე -* b , *ამიტომ ამ სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს შეგვიძლია მოვუძებნოთ მარტივი ინტერპრეტაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე. როგორც სურ. 2.4-ზე ჩანს, საზოგადოდ,* $A\times B\neq B\times A$.



სურ 2.4

ვთქვათ, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ სიბრტყის ნებისმიერი ორი წერტილია. მაშინ, როგორც სურათი 2.5–დან ჩანს

$$d(A, C) = |x_2 - x_1|$$

და

$$d(B, C) = |y_2 - y_1|.$$

რადგანაც სამკუთხედი ACB მართკუთხაა, პითაგორას თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ

$$d^2(A, B) = d^2(A, C) + d^2(B, C).$$

აქედან ვასკვნით, რომ

საკოორდინატო სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს სახე:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

ვიპოვოთ სიბრტყეზე მოცემული $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის $M(x, y)$ შუაწერტილის კოორდინატები (იხ. სურათი 2.6). რადგანაც $d(A, P) = d(M, Q)$, მივიღებთ:

$$x - x_1 = x_2 - x$$

და

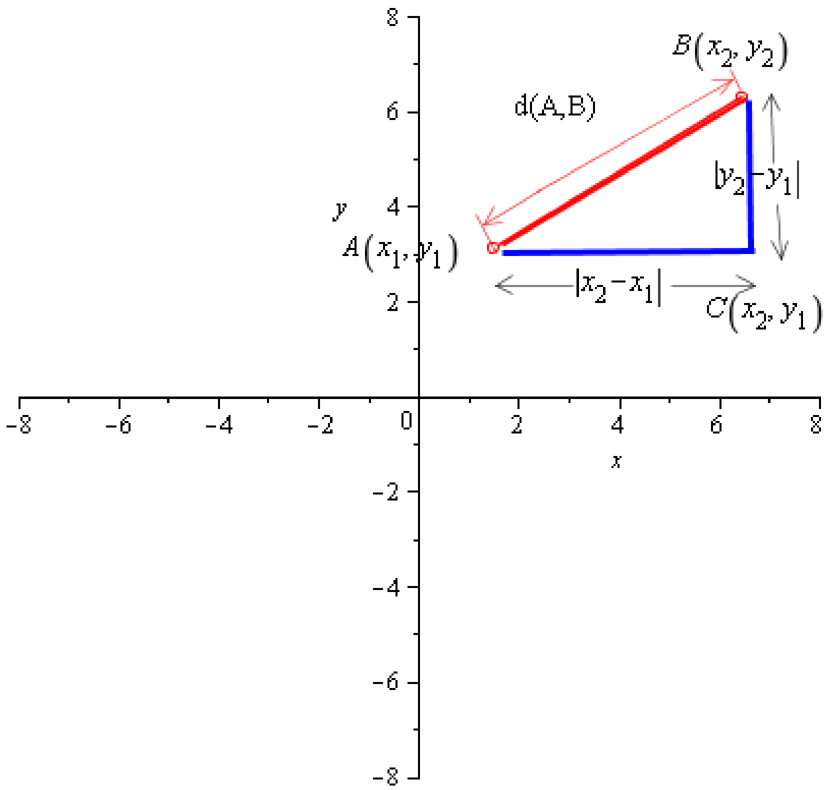
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

ამრიგად, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის $M(x, y)$ შუაწერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულით:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



სურ 2.5

მაგალითი 2.3 *ვთქვათ, მოცემულია ოთხკუთხედი, რომლის წვეროების კოორდინატებია: $P(1,2)$, $Q(4,4)$, $R(5,9)$ და $S(2,7)$. დაამტკიცეთ, რომ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.*

ამოხსნა: *როგორც ჩვენთვის ცნობილია, თუ ოთხკუთხედში დიაგონალები იკვეთება შუა წერტილში, მაშინ ასეთი ოთხკუთხედი პარალელოგრამს წარმოადგენს. შევამოწმოთ მოყვანილი თვისება. PR დიაგონალის შუაწერტილის კოორდინატებია:*

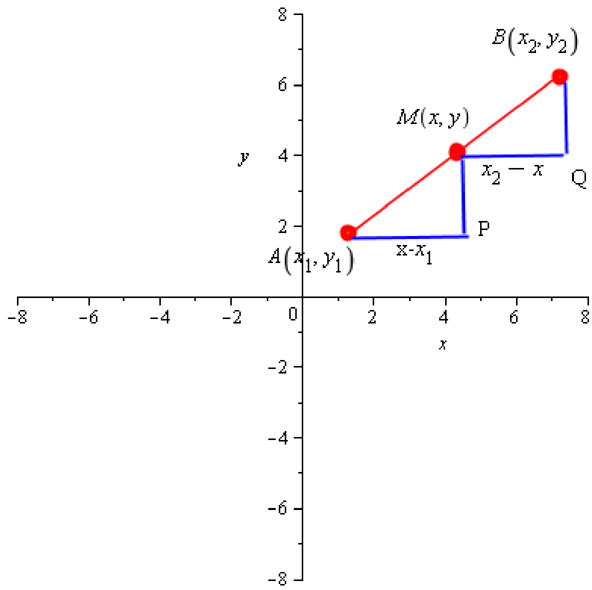
$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right).$$

ანალოგიურად, QS დიაგონალის შუაწერტილის კოორდინატებია

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+11}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right).$$

ვინაიდან, მოცემული ოთხკუთხედის დიაგონალები იკვეთება შუაწერტილში, ვასკვნით, რომ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავახასიათოთ წერტილის მდებარეობა სივრცეში. ამისათვის განვიხილოთ სივრცეში ერთ წერტილში თანამკვეთი სამი ურთიერთმართობული რიცხვითი ღერძი. მათი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ O ასოთი და ვუწოდოთ კოორდინატთა სათავე. რიცხვითი ღერძები აღვნიშნოთ OX-ით, OY-ით და OZ-ით და



სურ 2.6

ვუწოდოთ, შესაბამისად, აბსცისთა, ორდინატთა და აპლიკატთა ღერძები. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ სივრცის ნებისმიერი M წერტილის დაგეგმილებით საკოორდინატო ღერძებზე, მისი მდებარეობა სივრცეში ცალსახად განისაზღვრება დაგეგმილების შედეგად მიღებული x, y და z რიცხვებით, რომლებსაც M წერტილის კოორდინატები ეწოდებათ. ამ ფაქტს ჩაწერენ ასე $M = M(x, y, z)$ (იხ. სურათი 2.7)

2.2 წრფივი და კვადრატული განტოლებები

ა) წრფივი, ანუ პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლება ეწოდება

$$ax + b = 0 \tag{2.1}$$

სახის განტოლებას,სადაც x საძიებელი სიდიდეა, ხოლო a და b - მოცემული ნამდვილი რიცხვები. a რიცხვს ეწოდება უცნობის კოეფიციენტი, b-ს კი თავისუფალი წევრი.

ერთცვლადიანი (2.1) განტოლების ამონახსნი (ფესვი) ეწოდება x ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც (2.1) განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს.

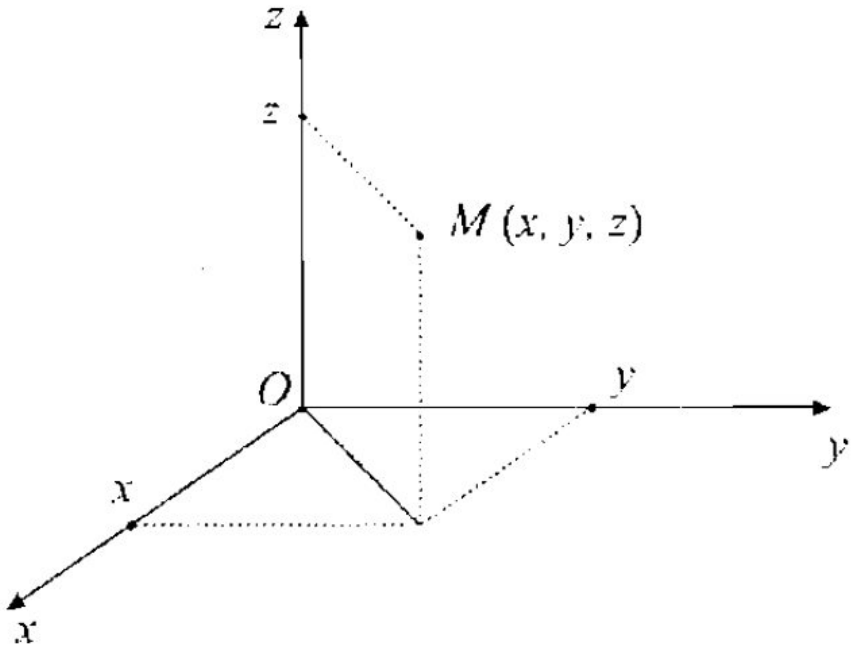
მარტივად ჩანს, რომ თუ $a \neq 0$, მაშინ (2.1) აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$x = -\frac{b}{a}$$

ასევე მარტივად დავასკვნით, რომ თუ $a = 0$ და $b \neq 0$, მაშინ მოცემულ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, ხოლო როცა a და b ერთდროულად ნულის ტოლია, მაშინ განტოლებას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა.

ბ) წრფივი ორუცნობიანი განტოლება ეწოდება

$$ax + by + c = 0 \tag{2.2}$$



სურ 2.7

სახის განტოლებას, სადაც x და y უცნობებია, ხოლო a, b და c მოცემული ნამდვილი რიცხვებია(იგულისხმება, რომ a და b კოეფიციენტები ერთდროულად არ უდრის ნულს).

ორუცნობიანი (2.2) განტოლების ამონახსნი ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ (x_0, y_0) წყვილს, რომელიც ამ განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს, ე.ი.

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

მარტივია იმის ჩვენება, რომ თუ $b \neq 0$, მაშინ ყველა

$$\left(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)$$

სახის წყვილი (2.2) განტოლების ამონახსნია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, ხოლო თუ $a \neq 0$, მაშინ

$$\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}, y\right)$$

წყვილი წარმოადგენს (2.2) განტოლების ამონახსნს y-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

ამრიგად, (2.2) განტოლებას გააჩნია ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა, თუ a და b კოეფიციენტები ერთდროულად არაა ნულის ტოლი. როგორც შემდგომში ვნახავთ, ამონახსნების ეს სიმრავლე განსაზღვრავს გარკვეულ წრფეს OXY საკოორდინატო სიბრტყეზე.

მაგალითი 2.4 *ვიპოვოთ $4x - 5y + 11 = 0$ განტოლების ყველა ამონახსნი. არის თუ არა $(-2, 3)$ წყვილი ამ განტოლების ამონახსნი?*

ამოხსნა: *რადგან უცნობებთან მდგომი ორივე კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისგან, ამოტომ შეგვიძლია ერთი ცვლადი გამოვსახოთ მეორეთი. კერძოდ, მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ:*

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$$

ამიტომ $\left(x, \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}\right)$ *წყვილი* x*-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის წარმოადგენს ამონახსნს.*

ვინაიდან, $4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 11 = -12 \neq 0$*, ამიტომ წყვილი* $(-2, 3)$ *არ არის განტოლების ამონახსნი.*

კვადრატული განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

სადაც a, b და c კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია და $a \neq 0$. გამოსახულებას $D = b^2 - 4ac$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ეწოდება. როდესაც $D \geqslant 0$, მაშინ კვადრატული განტოლების ამონახსნები მოიცემა ფორმულებით:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

როცა $D < 0$, მაშინ კვადრატულ განტოლებას ნამდვილ რიცხვებში ამონახსნი არ გააჩნია.

2.3 სავარჯიშოები:

1. რიცხვით ღერძზე დაშტრიხეთ მოცემული სიმრავლეების თანაკვეთა და გაერთიანება.

   ა) $[3; 7]$ და $[2; 5]$; ბ) $[-1; 3]$ და $[0; 2]$;
   გ) $[0; 5]$ და $[5; 9]$; დ) $(-\infty; 6]$ და $(6; 9)$;
   ე) $[-3; 6]$ და $[6; 12]$; ვ) $(-\infty; 2)$, და $(1; \infty)$.

2. გადაწერეთ გამოსახულება მოდულის გარეშე:

   ა) $|20|$; ბ) $|-14|$;
   გ) $\left|\sqrt{3} - 3\right|$; დ) $|10 - \pi|$.

3. გადაწერეთ გამოსახულება მოდულის გარეშე:

   ა) $|\pi - 3|$; ბ) $\left|1 - \sqrt{2}\right|$;
   გ) $|a - b|, a < b$; დ) $a + b + |a - b|, a < b$.

4. გამოთვალეთ:

   ა)$||-6| - |-3||$; ბ) $\frac{-2}{|-3|}$;
   გ) $|2 - |-15||$; დ) $-1 - |1 - |-1||$;

5. გამოთვალეთ მანძილი წერტილებს შორის:

ა) $A(2)$ და $B(11)$; ბ) $A(-3)$ და $B(21)$;
გ) $A\left(\frac{11}{3}\right)$ და $B\left(-\frac{3}{10}\right)$; დ) $A\left(\frac{7}{15}\right)$ და $B\left(\frac{-1}{21}\right)$;
ე) $A(-38)$ და $B(-57)$; ვ) $A(-21)$ და $B(-18)$.

6. დაამტკიცეთ:

ა) $\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$; ბ) $\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

7. დაამტკიცეთ სამკუთხედის უტოლობა:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \, .$$

8. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $|x| = 6$; ბ) $|x+2| = 5$;
გ) $|2x-3| = 9$; დ) $|1-t| = 1$.

9. დაადგინეთ, საკოორდინატო სიბრტყის რომელ ნაწილში მდებარეობს შემდეგი წერტილები:

$A(3,-2), B(-1,0), C(-5,2), D(-1,-3), E(0,2)$.

10. ვთქვათ, $M(6,8)$ წერტილი არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ A წერტილის კოორდინატებია $(2,3)$.

11. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები. იპოვეთ მანძილი მოცემულ წერტილებს შორის და ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები:

ა) $(0,8), (6,16)$; ბ) $(-2,5), (10,0)$;
გ) $(3,-2), (-4,5)$; დ) $(-1,1), (-6,-3)$;
ე) $(6,-2), (-6,2)$; ვ) $(0,-8), (5,0)$.

12. დახაზეთ ოთკუთხედი წვეროებით: $A(1,3)$, $B(5,3)$, $C(1,-3)$ და $D(5,-3)$. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი.

13. დახაზეთ პარალელოგრამი წვეროებით: $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(3,6)$ და $D(7,6)$. იპოვეთ მიღებული პარალელოგრამის ფართობი.

14. წერტილები $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(4,3)$ და $D(2,3)$ მონიშნეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. დახაზეთ მონაკვეთები AB, BC, CD და DA. რა სახის ოთხკუთხედია $ABCD$? იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი.

15. სიბრტყეზე მონიშნეთ წერტილები $P(5,1)$, $Q(0,6)$ და $R(-5,1)$. იპოვეთ იმ S წერტილის კოორდინატები, რომლისთვისაც ოთკუთხედი $PQRS$ იქნება კვადრატი.

16. $A(6,7)$ და $B(-5,8)$ წერტილებიდან რომელი უფრო ახლოსაა საკოორდინატო სისტემის სათავესთან?

17. $A(-6,3)$ და $B(3,0)$ წერტილებიდან რომელი უფრო ახლოსაა $C(-2,1)$ წერტილთან?

18. აჩვენეთ, რომ წერტილები (a,b) და (b,a) თანაბრადაა დაშორებული კოორდინატთა სისტემის სათავიდან.

19. აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი წვეროებით $A(0,2)$, $B(-3,-1)$ და $C(-4,3)$ ტოლფერდაა.

20. პითაგორას შებრუნებული თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი წვეროებით $A(6,-7)$, $B(11,-3)$ და $C(2,-2)$ მართკუთხაა.

21. მოცემულია სამკუთხედი წვეროებით $A(1,0)$, $B(3,6)$ და $C(8,2)$. იპოვეთ ABC სამკუთხედის მედიანათა სიგრძეები.

22. ააგეთ შემდეგი წერტილები: $P(-1,-4)$, $Q(1,1)$ და $R(4,2)$. იპოვეთ იმ S წერტილის კოორდინატები, რომლისთვისაც ფიგურა $PQRS$ იქნება პარალელოგრამი.

23. ააგეთ პარალელოგრამი წვეროებით: $A(-2,-1)$, $B(4,2)$, $C(7,7)$ და $D(1,4)$. იპოვეთ მისი დიაგონალების შუაწერტილების კოორდინატები.

24. იპოვეთ OX ღერძის მიმართ $A(2,-3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი ამ სიმეტრიული წერტილიდან $B(5,6)$ წერტილამდე.

25. იპოვეთ OY ღერძის მიმართ $A(3,-6)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი ამ სიმეტრიული წერტილიდან $B(5,7)$ წერტილამდე.

26. იპოვეთ საკოორდინატო სისტემის სათავის მიმართ $A(1,-4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი და გამოთვალეთ მანძილი ამ სიმეტრიული წერტილიდან $B(2,3)$ წერტილამდე.

27. იპოვეთ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $A\Delta B$, $A\times B$, თუ

    ა) $A=(1;6)$, $B=[1;6]$;

    ბ) $A=(1;+\infty)$, $B=(-\infty;6]$.

28. იპოვეთ $C_M(A\backslash B)\cap B$, თუ $M=R$, $A=[-5,1]$, $B=(-2,\infty)$.

29. დაშტრიხეთ $A\times B$, თუ

    ა) $A=[1;3]$, $B=[-1;4]$; ბ) $A=(2;4)$, $B=(-2;1)$;
    გ) $A=[1;4)$, $B=(2;5]$; დ) $A=[0;4]$, $B=(0;2)$;
    ე) $A=\{2\}$, $B=[3;4]$; ვ) $A=(2;4]$, $B=\{3\}$.

ლექცია 3

ფუნქციები

3.1 ფუნქციის ცნება

ფუნქციის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. მის გასააზრებლად მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ფიზიკური და გეომეტრიული კანონზომიერებები გამოისახება როგორც რიცხვებს შორის დამოკიდებულებები. პრაქტიკისათვის არსებითია ისეთი დამოკიდებულებები, როდესაც ერთი სიდიდის მოცემული მნიშვნელობით ცალსახად განისაზღვრება მეორე სიდიდის მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ კვადრატის გვერდის სიგრძე x ერთეულია, მაშინ მის ფართობს გამოვთვლით ცალსახად ფორმულით $S = x^2$. სწორედ ეს ფორმულა გამოხატავს ფუნქციურ (ანუ ცალსახა) დამოკიდებულებას x ცვლადსა (კვადრატის გვერდის სიგრძესა) და S ცვლადს (კვადრატის ფართობს) შორის. მაშასადამე, კანონზომიერებები, რომლის დროსაც ერთი სიდიდის მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვრავს მეორე სიდიდის მნიშვნელობას, აღიწერება რიცხვითი ფუნქციებით.

ვთქვათ, E არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლე. ვიტყვით, რომ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია (მოცემულია) ფუნქცია მნიშვნელობებით $\mathbb{R}$ სიმრავლეში, თუ ცნობილია წესი f, რომლის საშუალებითაც E სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი.

ფუნქციას სიმბოლურად ასე ჩავწერთ:$f : E \to \mathbb{R}$ ან $E \longrightarrow \mathbb{R}$. E სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება. შემდგომში ფუნქციის განსაზღვრის არეს აღვნიშნავთ $D(f)$ სიმბოლოთი. $x \in E$ (ელემენტს) ვუწოდებთ ფუნქციის არგუმენტს (ან დამოუკიდებელ ცვლადს). თუ არგუმენტის კონკრეტულ $x_0 \in E$ მნიშვნელობას მოცემული f წესით ეთანადება $y_0 \in \mathbb{R}$ რიცხვი, მაშინ y_0 -ს ვუწოდებთ ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში და ჩავწერთ $y_0 = f(x_0)$. საზოგადოდ, $x \in E$ არგუმენტისათვის ვწერთ $y = f(x)$. ამ შემთხვევაში y-ს დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება. მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი წესით მოცემული $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია: $f(x) = x^2$. განსაზღვრების თანახმად, განსაზღვრის არის ნებისმიერ x რიცხვს f წესით შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი, რომელიც უნდა გამოვთვალოთ $y = x^2$ ფორმულით. როგორც ზემოთ ვნახეთ, $y = x^2$ წესით შეგვიძლია დავითვალოთ კვადრატის ფართობი (x -კვადრატის გვერდია, ხოლო y - კვადრატის ფართობი). ამ შემთხვევაში, ბუნებრივია, ამ წესით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს $(0, +\infty)$ შუალედი. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის x არგუმენტისა და დამოკიდებული y ცვლადის ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვა ცვლადებიც. მაგ.,t და z, მაშინ და ცვლადებს შორის დამოკიდებულება ჩაიწერება $z = f(t)$ ფორმულით.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, ფუნქციის მოცემა ნიშნავს, როგორც განსაზღვრის E არის მითითებას, ასევე f შესაბამისობის (წესის) მოცემას. ზოგჯერ ფუნქციის მოცე-

მის დროს განსაზღვრის არეს არ უთითებენ. ასეთ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არის ქვეშ გულისხმობენ ყველა იმ x რიცხვთა ერთობლიობას, რომელთათვისაც $f(x)$ გამოსახულებას აზრი აქვს. მაგალითისათვის, ვთქვათ, განსაზღვრის არის მითითების გარეშე მოცემულია $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ფუნქცია. ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ, რომ მისი განსაზღვრის არეა $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ სიმრავლე. **მოცემულ კურსში ჩვენ ვიხელმძღვანელებთ აღნიშნული მოსაზრებით.**

როგორ ვიპოვოთ მოცემული $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა განსაზღვრის არის ამა თუ იმ წერტილში? განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 3.1 *ვთქვათ,* $f(x) = x^2 + 2x$ *. ვიპოვოთ* $f(2), f(x+5)$ *. ადვილი მისახვედრია, რომ*

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$$

და

$$f(x+5) = (x+5)^2 + 2(x+5) = x^2 + 12x + 35.$$

მაგალითი 3.2 *1)* $f(x) = \frac{1}{x-5}$*;* *2)* $g(x) = \sqrt{x-5}$. *ადვილი დასანახია, რომ* f *ფუნქციის განსაზღვრის არეა* $x \in (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$*, ხოლო* g *ფუნქციის-კი* $x \in [5, \infty)$ *.*

შემოვიღოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ცნება.

ვთქვათ მოცემულია $f : E \to \mathbb{R}$ ფუნქცია და $A \subset E$. $f(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა იმ y რიცხვისაგან, რომლისთვისაც არსებობს ერთი მაინც $x \in A$ რიცხვი ისეთი, რომ $f(x) = y\cdot$. მაშასადამე,$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x, x \in A \quad \text{და} \quad y = f(x)\}$ და , ან რაც იგივეა, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. კერძოდ, $f(E)$ სიმრავლეს ფუნქციის **მნიშვნელობათა სიმრავლეს (მნიშვნელობათა არეს) უწოდებენ**. შემდგომში მას $f(E)$ –თი აღვნიშნავთ. ხშირად ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არ ემთხვევა $\mathbb{R}$ –ს. ამ შემთხვევაში $f : E \to \mathbb{R}$ –ის ნაცვლად ჩავწერთ: $f : E \to f(E)$.

ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to \mathbb{R}$ ფუნქცია და $B \subset \mathbb{R}.E$ სიმრავლის ყველა იმ x ელემენტის ერთობლიობას, რომელთათვისაც $f(x) \in B$, ეწოდება B სიმრავლის **პირველსახე (წინარესახე, წინასახე)** ფუნქციის მიმართ და აღინიშნება სიმბოლოთი $f^{-1}(B)$.

ზემოთქმულის გამოყენებით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ წესი, თუ როგორ დავადგენთ ფიქსირებული $y \in \mathbb{R}$ რიცხვი ეკუთვნის თუ არა ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს. სახელდობრ, ფიქსირებული y რიცხვი ეკუთვნის ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა განტოლებას $f(x) = y$ (x -ცვლადის მიმართ) აქვს ერთი მაინც ამონახსნი.

ხშირ შემთხვევებში ფუნქცია შეიძლება არ იყოს განსაზღვრული ერთი ფორმულით და გამოყენებული იქნეს ორი ან მეტი ფორმულა. მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია.

მაგალითი 3.3 *ვთქვათ,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, \text{როცა } x < 2, \\ x^2, \text{როცა } 2 \le x < 3, \\ x^3 - 1, \ \text{როცა } x \ge 3 \end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ $f(1) = -1, f(2) = 4, f(5) = 124.$

3.2 ეკონომიკური ფუნქციები

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში ამა თუ იმ საქონელზე პროდუქციის ფასი მრავალ ფაქტორზეა დამოკიდებული, მათ შორის მოთხოვნისა და მიწოდების რაოდენობაზე. ზოგადად, მოთხოვნის ქვეშ გულისხმობენ მომხმარებლის სურვილსა და შესაძლებლობას შეიძინოს მოცემული პროდუქცია. ჩვენ ვიგულისხმებთ მოთხოვნის რაოდენობას, ე.ი. პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც გაიყიდება ბაზარზე მოცემულ ფასად, მოცემულ დროში.

ვთქვათ, ბაზრის მოთხოვნა რაიმე პროდუქტზე არის x. პროდუქციის ერთეულის საბაზრო ფასი აღვნიშნოთ p სიმბოლოთი. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში p ფასი დამოკიდულია მოთხოვნის x რაოდენობაზე, მაშასადამე

$$p = D(x) \tag{3.1}$$

D ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ან ეკონომიკური თეორიიდან, ან პრაქტიკული საბაზრო მონაცემებიდან. (3.1) დამოკიდებულებას უწოდებენ **მოთხოვნის ფუნქციას (მოთხოვნა-Demand)**. სხვა თანაბარ პირობებში ნაკლები ფასის დროს მეტია მოთხოვნა და პირიქით- მეტ მოთხოვნას ნაკლები ფასი შეესაბამება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფასი არის მოთხოვნის კლებადი ფუნქცია. მაშასადამე, (3.1) ფუნქცია კლებადი ფუნქციაა.

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში p ფასი დამოკიდებულია მიწოდებაზეც. ე.ი. პროდუქციის იმ რაოდენობაზე, რომლის ბაზარზე შეტანასაც გეგმავს მწარმოებელი. თუ x-ით ამჯერად მიწოდების რაოდენობას აღვნიშნავთ, ეს დამოკიდებულება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$p = S(x), \tag{3.2}$$

ამ ფუნქციას მიწოდების ფუნქცია ეწოდება**(Supply Function)**. როგორც წესი, მეტი ფასის დროს მეტია მიწოდება და პირიქით – მეტ მიწოდებას მეტი ფასი შეესაბამება. ე.ი. მიწოდების (3.2) ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა.

ვთქვათ, საქონლის ერთეულის ფასია p. **მთლიანი ამონაგები (TR)** (Total Revenue) არის საწარმოს მიერ x რაოდენობის საქონლის რეალიზაციით მიღებული თანხა. ამიტომ მთლიანი ამონაგების ფუნქციას აქვს სახე

$$TR = R(x) = xp(x). \tag{3.3}$$

მთლიანი დანახარჯი (TC) (Total Costs) არის თანხა, რომელიც დაიხარჯა საწარმოს მიერ x რაოდენობის პროდუქციის წარმოებისათვის. წარმოების მთლიანი დანახარჯი დროის მოკლე პერიოდში იყოფა ე.წ. ფიქსირებულ და ცვლად დანახარჯებად.

წარმოების ფიქსირებული, ანუ მუდმივი დანახარჯი (FC) (Fixed Costs) არაა დამოკიდებული წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე და იგი დაკავშირებულია მიწის გადასახადთან, რენტასთან, აღჭურვილობასთან. ცხადია, ამ ტიპის დანახარჯების მუდმივობა პირობითია, რადგან ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში მათ შეიძლება ცვლილება განიცადონ.

წარმოების ცვლადი დანახარჯი (VC) (Variable Costs) არის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის დახარჯული თანხა.

მთლიანი ცვლადი დანახარჯი (TVC) (Total Variable Costs), რომელიც შეესაბამება პროდუქციის x რაოდენობის წარმოებას, გამოითვლება ფორმულით

$$(TVC) = (VC) \cdot x.$$

ცხადია, წარმოების მთლიანი დანახარჯი ტოლია ფიქსირებული დანახარჯისა და მთლიანი ცვლადი დანახარჯის ჯამისა

$$(TC) = (FC) + (VC) \cdot x. \tag{3.4}$$

მოგების ფუნქცია P **(Profit function)** განისაზღვრება, როგორც სხვაობა მთლიან ამონაგებსა (TR) და მთლიან დანახარჯებს (TC) შორის

$$P = (TR) - (TC)$$

მაგალითი 3.4 *საწარმომ უნდა შეიძინოს გარკვეული სახის პროდუქცია. პროდუქციის x ერთეულის შეძენისას ერთი ერთეულის ფასია*

$$p(x) = -0.27x + 51$$

ლარი. ცნობილია, რომ მთლიანი დანახარჯია

$$TC(x) = 2.23x^2 + 3.5x + 85$$

ათასი ლარი.

ა) იპოვეთ მთლიანი ამონაგების და მოგების ფუნქციები;

ბ) იპოვეთ საქონლის ის x რაოდენობა, რომლის წარმოება მომგებიანია საწარმოსათვის.

ამოხსნა. *ა) მთლიანი ამონაგების ფუნქცია იქნება*

$$R(x) = xp(x) = -0.27x^2 + 51x$$

ათასი ლარი, და მოგების ფუნქციაა

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0.27x^2 + 51x - \big(2.23x^2 + 3.5x + 85\big) \\ &= -2.5x^2 + 47.5x - 85 \end{aligned}$$

ათასი ლარი.

ბ) ცხადია,საქონლის წარმოება რომ იყოს მომგებიანი, აუცილებელია, რომ

$$P(x) > 0.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} P(x) &= -2.5x^2 + 47.5x - 85 \\ &= -2.5\left(x^2 - 19x + 34\right) \\ &= -2.5(x-2)(x-17) > 0 \end{aligned}$$

რადგანაც კოეფიციენტი -2.5 უარყოფითია, ამიტომ $P(x) > 0$ პირობა სრულდება, როცა $(x-2)$ და $(x-17)$ აქვთ განსხვავებული ნიშნები. ეს კი მოხდება მაშინ, როცა $2 < x < 17$. მაშასადამე, საქონლის წარმოება მომგებიანი იქნება იმ შემთხვევაში, როდესაც წარმოებული პროდუქციის x რაოდენობა აკმაყოფილებს პირობებს $2 < x < 17$.

მაგალითი 3.5 *ვთქვათ, საწარმოს მთლიანი დანახარჯი q ერთეული პროდუქციის წარმოებაზე გამოითვლება ფორმულით $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.*

ა) გამოთვალეთ 10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯი;

ბ) გამოთვალეთ მე- 10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯი;

ამოხსნა: *ა) 10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯის მისაღებად უნდა გამოვთვალოთ $C(q)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $q = 10$.. მაშასადამე,*

$$\begin{aligned} \textit{ფასი}10\ \textit{ერთეულის} &= C(10) \\ &= (10)^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200 \\ &= 3200 \end{aligned}$$

ბ) მე-10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯია

$$C(10) - C(9) = 3200 - 2999 = 201$$

3.3 ფუნქციათა ჯამი, ნამრავლი და ფარდობა

თუ მოცემული გვაქვს ორი $f : E \to \mathbb{R}$ და $g : F \to \mathbb{R}$ ფუნქცია და $E \cap F$ არაცარიელი სიმრავლეა, მაშინ $E \cap F$ სიმრავლეზე (ანუ იმ წერტილთა სიმრავლეზე, რომლებზედაც ორივე ფუნქციაა განსაზღვრული) ბუნებრივად განისაზღვრება მოცემული ფუნქციების $f + g$ ჯამი და $f \cdot g$ ნამრავლი შემდეგი წესით:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in E \cap F$$

და

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in E \cap F.$$

თუ დამატებით ცნობილია, რომ $g(x) \neq 0$, როცა $x \in E \cap F$, მაშინ მოცემულ ფუნქციათა ფარდობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in E \cap F.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

მაგალითი 3.6 *ვთქვათ,* $f(x) = \frac{1}{x}$ *და* $g(x) = x$ *. მაშინ* $(f+g)(x) = \frac{1}{x} + x$ *და* $(f \cdot g)(x) = 1$ *. ცხადია, როგორც* $f+g$*, ისე* $f \cdot g$ *ფუნქციის განსაზღვრის არეა სიმრავლე* $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ *.*

საზოგადოდ, ფუნქციათა შეკრებისას, გამრავლებისას, შეფარდებისას განსაზღვრის არე შეიძლება "შემცირდეს".

მაგალითი 3.7 *ვთქვათ,*$f(x) = \sqrt{x}$ *და* $g(x) = \sqrt{-x}$ *. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ ფუნქციათა განსაზღვრის არეთა თანაკვეთა შედგება მხოლოდ* $x = 0$ *წერტილისაგან. ამიტომ* $f+g$ *ფუნქცია მხოლოდ ერთ წერტილზეა განსაზღვრული.*

მაგალითი 3.8 *ვთქვათ* $f(x) = \sqrt{x}$ *და* $g(x) = \sqrt{-x-1}$ *. მაშინ* $f+g$ *ფუნქციის განსაზღვრის არე ცარიელი სიმრავლეა (ანუ* $f+g$ *ფუნქცია არ არის განსაზღვრული).*

3.4 ფუნქციათა კომპოზიცია

მოცემული ფუნქციებიდან ახალი ფუნქციის მიღების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მეთოდს წარმოადგენს ფუნქციათა კომპოზიციის ოპერაცია. ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია $f: E \to \mathbb{R}$ და $g: F \to \mathbb{R}$. დავუშვათ, რომ f ფუნქციის განსაზღვრის $D(f) = E$ არეში არსებობს ისეთი x ელემენტი, რომ $f(x)$ რიცხვი ეკუთვნის g ფუნქციის განსაზღვრის $D(g) = F$ არეს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვიპოვოთ g ფუნქციის მნიშვნელობა $f(x)$ წერტილში, ანუ რიცხვი $g(f(x))$. ზემოთ მოყვანილი წესით (x -ს შეესაბამება რიცხვი $g(f(x))$) აღნიშნული თვისების მქონე $x \in E$ წერტილთა სიმრავლეზე ავაგებთ ახალ ფუნქციას, რომელსაც უწოდებენ f და g ფუნქციათა კომპოზიციას (ანუ რთულ ფუნქციას) და მას $g \circ f$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. მაშასადამე, ყველა იმ $x \in E$ წერტილთა სიმრავლეზე, რომელთათვისაც $f(x) \in F$ განისაზღვრება f და g ფუნქციების კომპოზიცია $g \circ f$ შემდეგი წესით:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

ანალოგიურად, ყველა იმ $x \in F$ წერტილთა სიმრავლეზე, რომელთათვისაც $g(x) \in E$ განისაზღვრება g და f ფუნქციათა კომპოზიცია $f \circ g$ შემდეგი წესით:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებებში არსებითია კომპოზიციის ოპერაციაში მონაწილე ფუნქციათა თანმიმდევრობა იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ორივე $f \circ g$ და $g \circ f$ ფუნქცია არსებობს (თუმცა შესაძლოა ერთი არსებობდეს, მეორე კი - არა, იხ. მაგალითები ქვემოთ).

მაგალითი 3.9 *იპოვეთ კომპოზიცია* $f(g(x))$, *სადაც* $f(u) = u^2 + 3u + 1$ *და* $g(x) = x + 1$

ამოხსნა:

$f(u)$*-ში* u *შევცვალოთ* $x + 1$*-ით. მივიღებთ:*

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x+1)^2 + 3(x+1) + 1 \\ &= \left(x^2 + 2x + 1\right) + (3x + 3) + 1 \\ &= x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

მაგალითი 3.10 *ვთქვათ,* $f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad g(x) = x + 3$

$$\begin{aligned} &(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + 2(x+3) + 3 = x^2 + 8x + 18 \\ &(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2 + 2x + 3\right) = x^2 + 2x + 3 + 3 = x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

ცხადია, რომ ასეთ შემთხვევაში

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

მაგალითი 3.11 *ვთქვათ,* $f(x) = 3x - 2, g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} &(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}\right) = 3\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}\right) - 2 = x, \\ &(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = \tfrac{1}{3}(3x - 2) + \tfrac{2}{3} = x. \end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში, როგორც ვხედავთ, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

საზოგადოდ, $f \circ g$ და $g \circ f$ სხვადასხვა ფუნქციებია.

მაგალითი 3.12 *ვთქვათ,* $f(x) = \sqrt{x}$ *და* $g(x) = x + 1$. *მოცემული ფუნქციების განსაზღვრის არეები შესაბამისად არის* $[0, +\infty)$ *და* $\mathbb{R}$. *ცხადია, რომ* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$ *და მისი განსაზღვრის არეა* $[0, +\infty)$.$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ *და მისი განსაზღვრის არეა* $[-1, +\infty)$. *როგორც ვხედავთ,* $f \circ g$ *და* $g \circ f$ *ფუნქციები შესაძლებელია არა თუ ტოლი არ აღმოჩნდეს, არამედ მათი განსაზღვრის არეებიც, საზოგადოდ, სხვადასხვა სიმრავლეები იყოს.*

მაგალითი 3.13 *ვთქვათ,* $f(x) = \sqrt{x}$ *და* $g(x) = \sqrt{-x-1}$. *მაშინ ადვილია იმის ჩვენება , რომ* $g \circ f$ *ფუნქცია არ განისაზღვრება, ანუ* $g \circ f$ *ფუნქციის განსაზღვრის არე ცარიელი სიმრავლეა, ხოლო* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\sqrt{-x-1}} = \sqrt[4]{-x-1}$ *და მისი განსაზღვრის არეა* $(-\infty, -1]$.

მაგალითი 3.14 *ვთქვათ,* $f(x) = x^2 - 3x$ *და ვიპოვოთ*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

ამოხსნა:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - [x^2 - 3x]}{h} \\
&= \frac{[x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h] - [x^2 - 3x]}{h} \\
&= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\
&= 2x + h - 3
\end{aligned}$$

მაგალითი 3.15 *ცნობილია, რომ ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის საშუალო დღიური დონე არის* $c(p) = 0.5p + 1$ *მემილიონედი, სადაც* p *არის მოსახლეობის რაოდენობა ათასებში. ასევე ცნობილია, რომ* t *წლის შემდეგ მოსახლეობის რაოდენობის ზრდა გამოისახება ფორმულით* $p(t) = 10 + 0.1t^2$.

ა) გამოსახეთ ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის დონე როგორც t *დროის ფუნქცია*

ბ) როდის მიაღწევს ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის დონე 6.8 მემილიონედს?

ამოხსნა:
ა) რადგანაც

$$c(p) = 0.5p + 1$$

და მეორეს მხრივ, p წარმოადგენს t ცვლადის ფუნქციას

$$p(t) = 10 + 0.1t^2$$

ამიტომ, რთული ფუნქციის შედგენის წესის თანახმად

$$c(p(t)) = c\left(10 + 0.1t^2\right) = 0.5\left(10 + 0.1t^2\right) + 1 = 6 + 0.05t^2.$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს ნახშირორჟანგის შემცველობის დონის ფორმულას t წლის შემდეგ. ბ) იმისათვის, რომ ვიპოვოთ t ცვლადის ის მნიშვნელობა, როცა ნახშირორჟანგის შემცველობა იქნება 6.8 მემილიონედის ტოლი, საჭიროა, რომ $c(p(t))$ გავუტოლოთ 6.8-ს და ამოვხსნათ t-ს მიმართ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} 6 + 0.05t^2 &= 6.8 \\ 0.05t^2 &= 0.8 \\ t^2 &= \frac{0.8}{0.05} = 16 \\ t &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

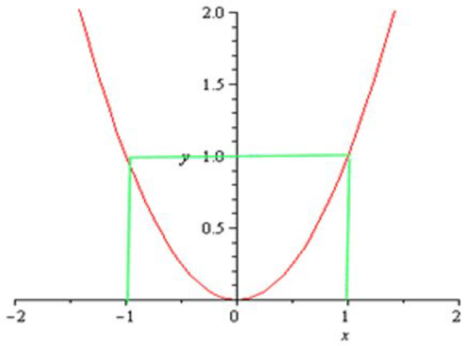
მაშასადამე, 4 წლის შემდეგ ნახშირორჟანგის შემცველობის დონე იქნება 6.8 მემილიონედის ტოლი.

3.5 შექცეული ფუნქცია

ფუნქციის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისების აღსაწერად განვიხილოთ ფუნქცია: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ (იხ. ნახ. 3.1). ყოველი დადებითი x -თვის ამ ფუნქციის მნიშვნელობა x -ზე და $-x$ წერტილებზე ერთი და იგივეა: $f(-x) = f(x) = x^2$ კერძოდ, $f(-1) = f(1) = 1$. ანუ განსაზღვრის არეში არსებობს ორი განსხვავებული წერტილი, რომლებზეც ფუნქციას ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს.

რაც შეეხება ამ ფუნქციის შეზღუდვას $[0, +\infty)$ შუალედზე (ან $(-\infty, 0]$) შუალედზე), მას ექნება თვისება: თუ $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ (ან $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$) და $x_1 \neq x_2$, მაშინ $x_1^2 \neq x_2^2$ (ანუ $f(x_1) \neq f(x_2)$).

განსაზღვრება 3.1 *ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $f : E \to \mathbb{R}$. დავუშვათ f ფუნქციას აქვს თვისება: ნებისმიერი ფიქსირებული $y \in f(E)$-თვის არსებობს ერთადერთი ელემენტი $x \in E$ ისეთი, რომ $f(x) = y$ (უკანასკნელი წინადადება ტოლფასია შემდეგის: განსაზღვრის არის ნებისმიერი განსხვავებული x_1 და x_2 რიცხვებისათვის $f(x_1) \neq f(x_2)$. ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციას უწოდებენ ურთიერთცალსახა ფუნქციას.*



სურ 3.1

ამრიგად, უკანასკნელი განსაზღვრებისა და უკვე ჩატარებული მსჯელობის გამო კვადრატული ფუნქცია $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ არ არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია, მაშინ როცა მისი შეზღუდვა $[0, +\infty)$ შუალედზე (ან $(-\infty, 0]$ შუალედზე) იქნება ურთიერთცალსახა.

განსაზღვრება 3.2 *ვთქვათ, $f : E \to f(E) \subset \mathbb{R}$ ფუნქცია ურთიერთცალსახაა. ავიღოთ ნებისმიერი $y \in f(E)$. ფუნქციის განსაზღვრების ძალით არსებობს ერთი მაინც ისეთი $x \in E$, რომ $f(x) = y$. f ფუნქციის ურთიერთცალსახობის გამო, აღებული y -სთვის ასეთი $x \in E$ ერთადერთია. ეს ნიშნავს, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობათა არეზე ($f(E)$ -ზე) შესაძლებელია განვსაზღვროთ ფუნქცია, რომელიც $f(E)$ -დან აღებულ ყოველ y -ს უთანადებს აღნიშნულ ერთადერთ x რიცხვს E სიმრავლიდან. ამ ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება. მისი განსაზღვრის არეა $f(E)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა E . ანუ, $f^{-1} : f(E) \to E$. (გაიაზრეთ, f ფუნქციის შექცეული ფუნქციის განსაზღვრისათვის რამდენად არსებითია f ფუნქციის ურთიერთცალსახობა.)*

როგორც ვხედავთ, ზემოთ განხილული კვადრატული ფუნქციის ($f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$) შექცეული არ არსებობს, ხოლო $[0, +\infty)$ შუალედზე მისი შეზღუდვის შექცეულს ექნება სახე: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$. $(-\infty, 0]$ შუალედზე $f(x) = x^2$ ფუნქციის შეზღუდვის შექცეულს ექნება სახე: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

მნიშვნელოვანია საკითხი, თუ როგორ ვიპოვოთ პრაქტიკულად მოცემული ფუნქციის შექცეული. ამისათვის განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $f(x) = 5x+2$. ვიქცევით შემდეგნაირად: პირველ რიგში დავადგენთ, არის თუ არა f ფუნქცია ურთიერთცალსახა. თუ f ფუნქცია არ არის ურთიერთცალსახა (ანუ, რომელიღაც ორ განსხვავებულ წერტილზე ფუნქცია იღებს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას), მაშინ ამ ფუნქციას არ გააჩნია შექცეული. ჩვენს შემთხვევაში ფუნქცია ურთიერთცალსახაა, რადგან თუ $f(x_1) = f(x_2)$, მაშინ $x_1 = x_2$. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $5x_1 + 2 = 5x_2 + 2$, მაშინ მივიღებთ: $x_1 = x_2$. ამ შემთხვევაში მსჯელობას ასე ვაგრძელებთ: $f(x)$ -ს ვცვლით y -ით და ვწერთ $y = 5x + 2$; შემდეგ ვხსნით ამ უკანასკნელ განტოლებას y-ს მიმართ. საიდანაც მივიღებთ: $x = \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}$, ანუ, $f^{-1}(y) = \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}$. თუ f^{-1} ფუნქციისათვის დამოუკიდებელ ცვლადად მივიჩნევთ x–ს (y–ის ნაცვლად), გვექნება $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$.

3.6 ფუნქციის გრაფიკის ცნება

ფუნქციის შესახებ მნიშვნელოვან ინფორმაციას გვაძლევს მისი გრაფიკი. მოვიყვანოთ ფუნქციის გრაფიკის ცნება.

განსაზღვრება 3.3 *ვთქვათ, $f : E \to \mathbb{R}$ რაიმე ფუნქციაა. ამ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება ყველა $(x, f(x))$ სახის რიცხვთა წყვილისაგან შემდგარ სიმრავლეს, სადაც $x \in E$. ამრიგად, თუ f ფუნქციის გრაფიკს Γ_f– –ით აღვნიშნავთ, მაშინ*

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in E, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

როგორც ვხედავთ, ფუნქციის გრაფიკი რიცხვთა წყვილებისაგან შემდგარი სიმრავლეა და ამიტომ იგი $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს. ეს საშუალებას გვაძლევს ფუნქციის გრაფიკი თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ, როგორც საკოორდინატო xOy სიბრტყის ქვესიმრავლე.

მაგალითი 3.16 *ავაგოთ*

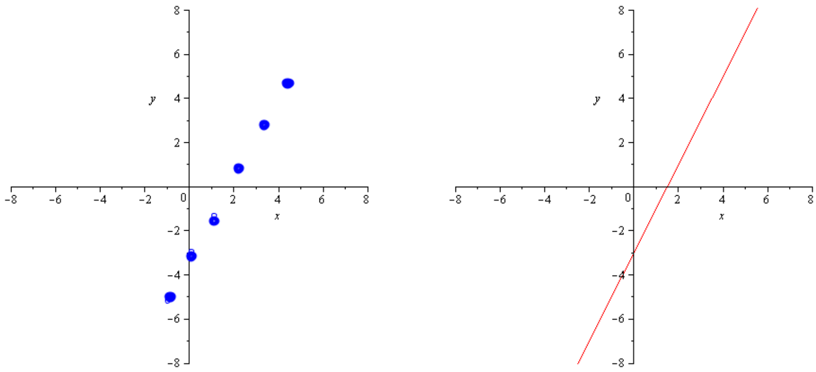
$$y = 2x - 3 \tag{3.5}$$

ფუნქციის გრაფიკი.

x–ს მივანიჭოთ გარკვეული მნიშვნელობები და გამოვთვალოთ y–ის შესაბამისი მნიშვნელობები:

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	-5	(-1,-5)
0	-3	(0,-3)
1	-1	(1,-1)
2	1	(2,1)
3	3	(3,3)
4	5	(4,5)

აღნიშნული წერტილები განლაგდება წრფეზე, რომლის გავლების შედეგად მივიღებთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკს (იხ. სურათი 3.2).



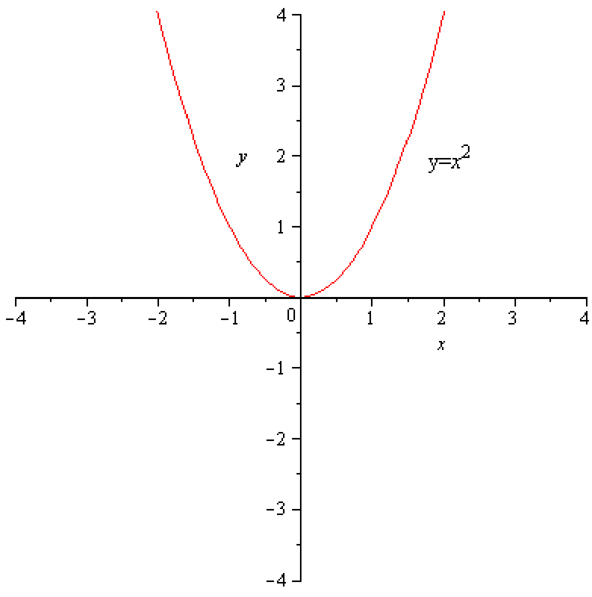
(a) (b)

სურ 3.2

ავაგოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი. ამისათვის ფუნქციის განსაზღვრის არედან შევარჩიოთ რამდენიმე წერტილი და გამოვთვალოთ ამ წერტილებზე ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

აღნიშნული წერტილები განლაგდებიან სურ. 3.3-ზე გამოსახული სახის წირზე, რომელსაც **პარაბოლა** ეწოდება.



სურ 3.3

მაგალითი 3.17 *ავაგოთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი*

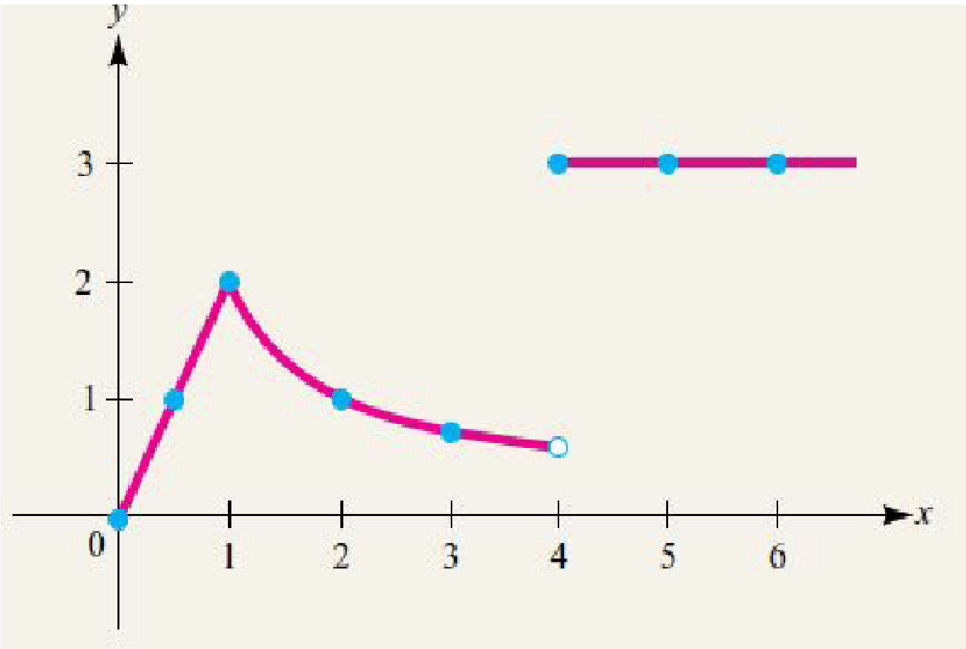
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{როცა } 0 \le x < 1, \\ \frac{2}{x}, & \text{როცა } 1 \le x < 4, \\ 3, & \text{როცა } x \ge 4 \end{cases}$$

ამოხსნა: *ამ ფუნქციის მონაცემთა ცხრილის აგების დროს უნდა გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ x არგუმენტის კონკრეტული მნიშვნელობებისთვის გამოვიყენოთ შესაბამისი ფორმულები.*

ანუ $f(x) = 2x$ ფორმულა უნდა გამოვიყენოთ როცა $0 \le x < 1$, $f(x) = \frac{2}{x}$ ფორმულა, როცა $1 \le x < 4$, და $f(x) = 3$ ფორმულა, როცა $x \ge 4$,. საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	2	1	$\frac{2}{3}$	3	3	3

ამ ცხრილის საშუალებით აგებულ გრაფიკს ექნება სახე (იხ. სურათი 3.4):



სურ 3.4

მაგალითი 3.18 *ვთქვათ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის $\Gamma_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ესკიზს, როგორც ზემოთ ვნახეთ, აქვს სახე (იხ. სურათი 3.5) . თვალსაჩინოებისთვის მოცემული ფუნქციისათვის განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილ ცნებებთან დაკავშირებული რამდენიმე საკითხი.*

1) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლე, ანუ OY ღერძის პარალელური ყოველი წრფე ფუნქციის გრაფიკს ერთადერთ წერტილში კვეთს.

2) ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. მართლაც, $f(x) = y_0$ განტოლებას (ანუ $x^2 = y_0$ განტოლებას) აქვს ერთი მაინც ამონახსნი ფუნქციის განსაზღვრის არიდან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y_0 \geq 0$.

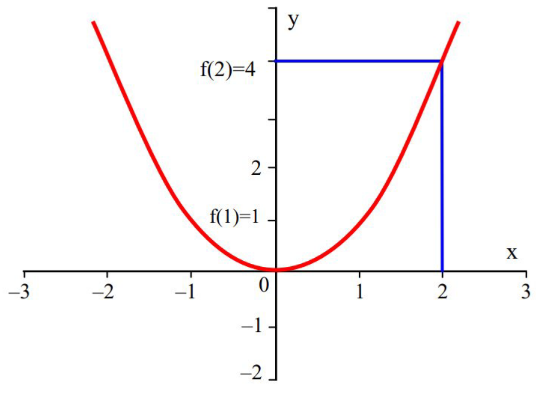
ყოველივე ზემოთ თქმულს აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. საზელდობრ, OX ღერძის პარალელური $y = y_0$ წრფე ფუნქციის გრაფიკს კვეთს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $y_0 \geq 0$.

3) $f([1, 2]) = [1, 4]$ ანუ $[1, 2]$ სეგმენტზე ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე (ანუ $[1, 2]$ სეგმენტის სახე) არის $[1, 4]$ სეგმენტი (მარტივად რომ ვთქვათ, როცა x ცვლადი განსაზღვრის არეში 1-დან 2-მდე შეიცვლება, მაშინ y ცვლადი 1-დან 4-მდე შეიცვლება). ანალოგიურად, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $f((1, 2]) = (1, 4], f([1, 2)) = [1, 4), f((1, 2)) = (1, 4)$.

4) $f([-1, 2]) = [0, 4]$. თუ დავაკვირდებით ფუნქციის გრაფიკს, შევამჩნევთ, რომ როცა x ცვლადი განსაზღვრის არეში -1-დან 0-მდე შეიცვლება, მაშინ y ცვლადი შეიცვლება 1-დან 0-მდე, ხოლო როცა x ცვლადი განსაზღვრის არეში შეიცვლება 0 -დან 2-მდე, მაშინ y ცვლადი შეიცვლება 0-დან 4-მდე.

5) $f^{-1}([1, 4])$ არის არგუმენტის (x ცვლადის) ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $f(x) \in [1, 4]$. ცხადია, რომ $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. მართლაც, $f^{-1}([1, 4])$ სიმრავლე არის $1 \leq f(x) \leq 4$ (ანუ $1 \leq x^2 \leq 4$) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ფუნქციის განსაზღვრის არიდან.

6) $f^{-1}([-\infty, -4]) = \varnothing$, რადგან უტოლობის $-\infty \leq f(x) \leq -4$ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.



სურ 3.5

განსაზღვრება 3.4 *იმ წერტილის x კოორდინატს, რომელშიც $y = f(x)$ განტოლების გრაფიკი კვეთს OX ღერძს, x–გადაკვეთა ეწოდება.*

იმ წერტილის y კოორდინატს, რომელშიც $y = f(x)$ განტოლების გრაფიკი კვეთს OY ღერძს, y–გადაკვეთა ეწოდება.

x–გადაკვეთის საპოვნელად გრაფიკის შესაბამის განტოლებაში y-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ ნული. ხოლო y-გადაკვეთის საპოვნელად x-ის ნაცვლად ჩავსვათ ნული.

მაგალითი 3.19 *ვიპოვოთ $f(x) = -x^2 + x + 2$ ფუნქციის ყველა x და y გადაკვეთა.*

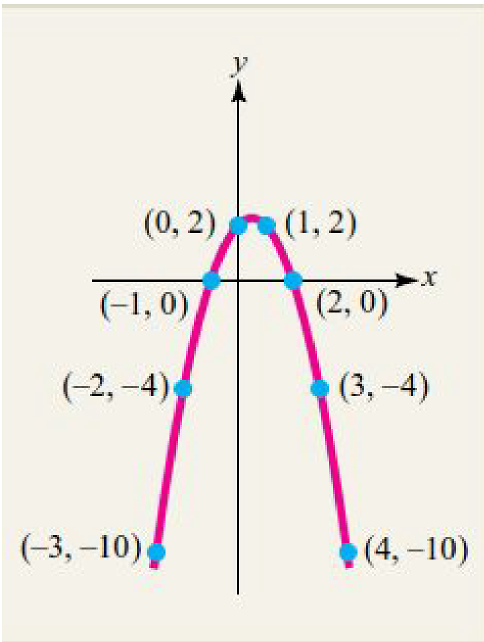
ამოხსნა: *ცხადია y გადაკვეთა იქნება 2-ის ტოლი, ვინაიდან $f(0) = 2$. x გადაკვეთის საპოვნელად კი ამოვხსნათ განტოლება $-x^2 + x + 2 = 0$. მივიღებთ:*

$$x = -1, x = 2$$

მაშასადამე, x გადაკვეთის წერტილებია $(-1, 0)$ და $(2, 0)$.

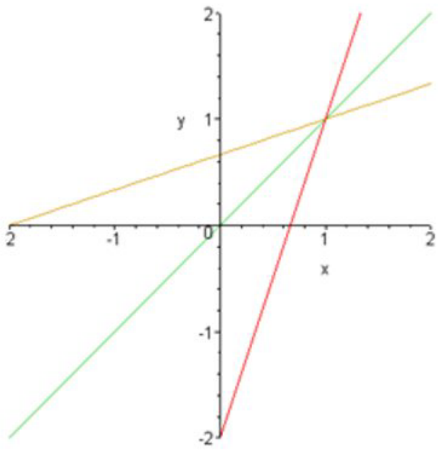
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10

ცხრილის საშუალებით ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი (იხ. სურათი 3.6)



სურ 3.6

ახლა გავარკვიოთ, თუ რა კავშირია მოცემული ფუნქციის გრაფიკსა და მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკს შორის. შევნიშნოთ, რომ თუ (x, y) წერტილი ეკუთვნის f ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ (y, x) წერტილი ეკუთვნის f^{-1} ფუნქციის გრაფიკს. მაშასადამე,f და f^{-1} ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ. მაგალითისათვის ავიღოთ ზემოთ განხილული $f(x) = 3x - 2$ და $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ფუნქციები (იხ. სურ.3.7).



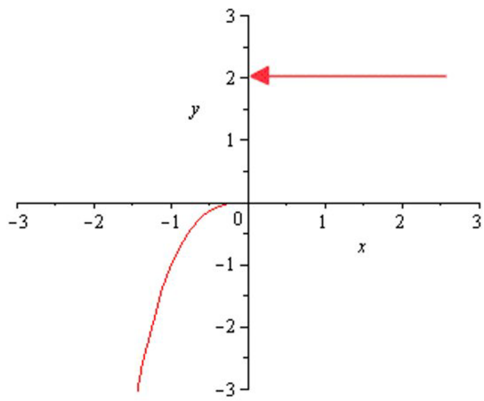
სურ 3.7

3.7 ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

განსაზღვრება 3.5 *ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია* $f : E \to \mathbb{R}$. f *ფუნქციას ეწოდება ზრდადი* E *სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი* x_1 და x_2 *რიცხვისათვის*

$$f(x_1) \leq f(x_2), \text{ როცა } x_1 < x_2.$$

მაგალითი 3.20 *განვიხილოთ ფუნქცია (იხ. სურათი 3.8). ადვილი დასანახია, რომ ეს ფუნქცია ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე.*



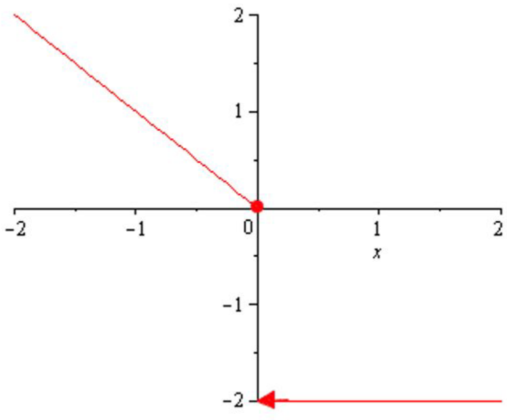
სურ 3.8

განსაზღვრება 3.6 *ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $f : E \to \mathbb{R}$. f ფუნქციას ეწოდება კლებადი E სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვისათვის*

$$f(x_1) \geq f(x_2), \text{ როცა } x_1 < x_2.$$

ფუნქციას ეწოდება მუდმივი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ის ამ სიმრავლის ნებისმიერ წერტილში ერთსა და იმავე მნიშვნელობას ღებულობს. ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებების მიხედვით, რაიმე სიმრავლეზე მუდმივი ფუნქცია ამ სიმრავლეზე ზრდადიცაა და კლებადიც.

მაგალითი 3.21 *განვიხილოთ სურათი 3.9-ზე მოცემული ფუნქცია. ადვილი დასანახია, რომ ეს ფუნქცია ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე.*



სურ 3.9

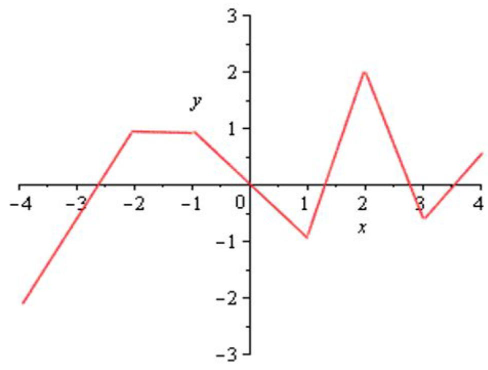
განსაზღვრება 3.7 *რაიმე სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება მონოტონური ამ სიმრავლეზე, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი.*

3.8 ფუნქციის ექსტრემუმი

შემდგომში ვისარგებლებთ a წერტილის ε–მიდამოს ცნებით. სახელდობრ, $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ინტერვალს ვუწოდებთ a წერტილის ε–მიდამოს.

განსაზღვრება 3.8 *ვთქვათ, მოცემულია* $f : E \to \mathbb{R}$ *, სადაც* E *რაიმე რიცხვითი შუალედია.* $x_0 \in E$ *წერტილს ეწოდება ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, თუ მოიძებნება* x_0*-ის ისეთი* ε*- მიდამო* $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$*, რომ ყოველი* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap E$ *წერტილისათვის* $f(x) \leq f(x_0)$ *. თვით* $f(x_0)$ *რიცხვს უწოდებენ ლოკალურ მაქსიმუმს.*

სურათი 3.10-ზე მოცემული ფუნქციისათვის $x = 2$, $x = 4$ და ყოველი $x \in [-2, -1]$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია.



სურ 3.10

განსაზღვრება 3.9 *ვთქვათ, მოცემულია* $f : E \to \mathbb{R}$ *, სადაც* E *რაიმე რიცხვითი შუალედია.* $x_0 \in E$ *წერტილს ეწოდება ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, თუ მოიძებნება* x_0*-ის ისეთი* ε*- მიდამო* $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$*, რომ ყოველი* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap E$ *წერტილისათვის* $f(x) \geq f(x_0)$ *. თვით* $f(x_0)$ *რიცხვს უწოდებენ ლოკალურ მინიმუმს.*

სურათი 3.10-ზე მოცემული ფუნქციისათვის $x = -4, x = 1, x = 3$ და $(-2, -1)$ შუალედის ნებისმიერი წერტილი ლოკალური მინიმუმის წერტილებია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ ფუნქცია მუდმივია რაიმე რიცხვით შუალედზე, მაშინ ამ შუალედის ყოველი წერტილი წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის როგორც ლოკალური მაქსიმუმის, ასევე ლოკალური მინიმუმის წერტილს.

ლოკალური მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილებს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდებათ, ხოლო ლოკალურ მაქსიმუმს ან მინიმუმს ლოკალურ ექსტრემუმს უწოდებენ.

განსაზღვრება 3.10 *ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, სადაც E რაიმე რიცხვითი შუალედია ბოლოებით a და b წერტილებში და $x_0 \in (a, b)$ წერტილი არის f ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $x_0 \in E$ წერტილს ეწოდება f ფუნქციის შიგა ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.*

სურ.3.10-ზე მოცემული ფუნქციისათვის $x \in [-2, -1], \quad x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3$ შიგა ექსტრემუმის წერტილებია, ხოლო $x = -4, \quad x = 4$ წერტილები არ არის შიგა ექსტრემუმის წერტილები.

განსაზღვრება 3.11 *ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, სადაც E რაიმე შუალედია. განსაზღვრის არის ისეთ x_0 წერტილს, რომლისთვისაც $f(x) \leq f(x_0)$ ყოველი $x \in E$ წერტილისთვის, ეწოდება ფუნქციის გლობალური (აბსოლუტური) მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო თვით $f(x_0)$ –ს - ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმი (მაქსიმალური მნიშვნელობა).*

სურ. 3.10-ზე მოცემული ფუნქციისათვის $x = 2$ გლობალური მაქსიმუმის წერტილია.

განსაზღვრება 3.12 *ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, სადაც E რაიმე შუალედია. განსაზღვრის არის ისეთ x_0 წერტილს, რომლისთვისაც, $f(x) \geq f(x_0)$ ყოველი $x \in E$ წერტილისთვის, ეწოდება ფუნქციის გლობალური (აბსოლუტური) მინიმუმის წერტილი, ხოლო $f(x_0)$ -ს - ფუნქციის გლობალური მინიმუმი (მინიმალური მნიშვნელობა).*

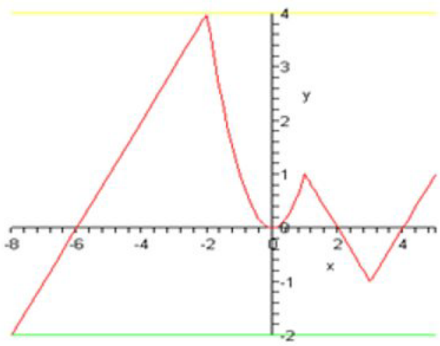
გლობალური მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებს გლობალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდებათ,ხოლო ამ წერტილებში ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს-გლობალური ექსტრემუმები.

სურ. 3.10-ზე მოცემული ფუნქციისათვის $x = -4$ გლობალური მინიმუმის წერტილია.

მაგალითი 3.22 *განვიხილოთ ფუნქცია (იხ. სურათი 3.11)*

$$f(x) = \begin{cases} x+6, & \text{თუ } x \in [-8,-2) \\ x^2, & \text{თუ } x \in [-2,1] \\ 2-x, & \text{თუ } x \in (1,3] \\ x-4, & \text{თუ } x \in (3,5] \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ, $x=-8$ და $x=-2$ წერტილები მოცემული f ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმის წერტილებია. $x=-8$ არის გლობალური მინიმუმის წერტილი, $f(-8)=-2$ არის გლობალური მინიმუმი, ხოლო $x=-2$ არის გლობალური მაქსიმუმის წერტილი, $f(-2)=4$ არის გლობალური მაქსიმუმი.



სურ 3.11

3.9 სავარჯიშოები:

1. გამოთვალეთ:

   ა) $f(0), f(-2), f(1)$, თუ $f(x)=3x^2+5x-2$;

   ბ) $f(1), f(-3), f(0)$, თუ $f(t)=\frac{1}{\sqrt{3-2t}}$;

   გ) $g(-2), g(0), g(2)$, თუ $g(x)=4+|x|$;

   დ) $f(0), f(-5), f(c), f(c+h)$, თუ $f(x)=3$;

   ე) $h(3), h(1), h(0), h(-3)$, თუ $h(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{, როცა } x\le 1 \\ x^2+1 & \text{, როცა } x>1 \end{cases}$

   ვ) $f(-6), f(-5), f(16)$, თუ $f(t)=\begin{cases} 3 & \text{, როცა } t<-5 \\ t+1 & \text{, როცა } -5\le t\le 5; \\ \sqrt{t} & \text{, როცა } t>5 \end{cases}$

2. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

   ა) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$;

   ბ) $f(t)=\sqrt{1-t}$;

გ) $f(x)=\sqrt{2x+6}$;

დ) $f(t)=\frac{t+1}{t^2-t-2}$;

ე) $h(s)=\sqrt{s^2-4}$;

ვ) $y=\sqrt{9-x}-\frac{3}{\sqrt{x-3}}$;

ზ) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{x+11}$.

3. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) $y=\sqrt{x^2+1}$;

ბ) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$;

გ) $y=\sqrt{x(4-x)}$;

დ) $y=\sqrt[4]{x^2-1}$;

ე) $y=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$;

ვ) $y=1-2\cos x$;

ზ) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

4. იპოვეთ $f(g(x))$:

ა) $f(u)=3u^2+2u-6, g(x)=x+2$;

ბ) $f(u)=u^2+4, g(x)=x-1$;

გ) $f(u)=(u-1)^3+2u^2, g(x)=x+1$;

დ) $f(u)=\sqrt{u+1}, g(x)=x^2-1$;

5. იპოვეთ $f(f(x))$ და $f(f(f(x)))$, თუ: :

ა) $f(x)=\frac{1}{1-x}$;

ბ) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$;

გ) $f(x)=\frac{1}{1+x}$;

დ) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6. იპოვეთ $f(f(x)), f(g(x)), g(f(x))$ და $g(g(x))$, თუ

ა) $f(u)=\begin{cases} 0, & u\le 0\\ u, & u>0\end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ -x^2, & x>0\end{cases};$

ბ) $f(u)=\frac{1}{2}(u+|u|), \quad g(x)=\begin{cases} x, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases};$

7. იპოვეთ $f(x)$, თუ

ა)$f(x+1)=x^2-3x+2$;

ბ)$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}, x\neq 0$;

გ) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}, x>0$;

დ) $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

8. იპოვეთ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, თუ

ა)$f(x)=4-5x$;

ბ)$f(x)=2x+3$;

გ) $f(x)=4x-x^2$;

დ) $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

9. მოცემულია $p=D(x)$ მოთხოვნის ფუნქცია და $C(x)$ მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია. იპოვეთ:

1) მთლიანი ამონაგების $R(x)$ და მოგების $P(x)$ ფუნქციები;

2) x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წარმოება არის მომგებიანი, თუ

ა) $\begin{array}{l} D(x)=-0.02x+29, \\ C(x)=1.43x^2+18.3x+15.6; \end{array}$;

ბ) $\begin{array}{l} D(x)=-0.37x+47, \\ C(x)=1.38x^2+15.15x+115.5 \end{array}$;

გ) $\begin{array}{l} D(x)=-0.5x+39, \\ C(x)=1.5x^2+9.2x+67 \end{array}$;

დ) $\begin{array}{l} D(x)=-0.09x+51, \\ C(x)=1.32x^2+11.7x+101.4 \end{array}$.

10. ცნობილია, რომ საწარმოს მიერ q პროდუქტის წარმოებისას მთლიანი დანახარჯი გამოითვლება $C(q)$ ფუნქციით, სადაც

$$C(q)=0.01q^2+0.9q+2$$

იპოვეთ:

ა) 10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯი.

ბ) მე -10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯი.

11. ცნობილია, რომ დროის საწყისი მომენტიდან მოსახლეობის რაოდენობა დროის t მომენტში იქნება $P(t)=20-\frac{6}{t+1}$ ათასი.

ა) იპოვეთ მოსახლეობის რაოდენობა 9 წლის შემდეგ;

ბ) რამდენით გაიზრდება მოსახლეობა მე-9 წელს?

გ) რა მოსდის მოსახლეობის რაოდენობას, როცა t წელი ხდება სულ უფრო დიდი რიცხვი?

12. დაკვირვებებით დადგენილია, რომ A კვადრატული კილომეტრი ფართობის კუნძულზე ცხოველების სახეობების საშუალო რაოდენობა დაახლოებით ტოლია $s(A)=2.9\sqrt[3]{A}$ -ის.

ა) საშუალოდ რამდენი სახეობის ცხოველი შეიძლება შეგვხვდეს 8 კვადრატულ კილომეტრის ფართობის კუნძულზე?;

ბ) ვთქვათ s_1 არის ცხოველების სახეობების რაოდენობა A კვადრატულ კილომეტრზე, ხოლო s_2 კი -ცხოველების სახეობების რაოდენობა $2A$, კვადრატულ კილომეტრზე. რა დამოკიდებულება არსებობს s_1 და s_2-ს შორის?

გ) რას უნდა უდრიდეს კუნძულის ფართობი, რომ მასზე იარსებოს საშუალოდ 100 სახეობის ცხოველმა?

13. ბრაზილიური ყავის იმპორტიორი კომპანიის შეფასებით ადგილობრივი მომხმარებლების მიერ ყოველკვირეულად შეძენილი ყავის რაოდენობა დაახლოებით ტოლია $Q(p) = \frac{4374}{p^2}$ კილოგრამის, სადაც p არის ერთი კილოგრამის ფასი ლარებში . გარკვეული გათვლებით დგინდება, რომ t კვირის შემდეგ ერთი კილოგრამი ყავის ფასი იქნება

$$p(t) = 0.04t^2 - 0.2t + 12$$

ლარი.

ა) გამოსახეთ t პარამეტრის მეშვეობით ყავის ყოველკვირეული მოხმარების ფუნქცია;

ბ) რამდენ კილოგრამ ყავას შეიძენენ მომხმარებლები მე-10 კვირას?

გ) დროის რა პერიოდის მერე გახდება ყავაზე მოთხოვნა 30.375 კილოგრამი?

14. q რაოდენობა პროდუქტის წარმოებისათვის საწარმოს მთლიანი დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით $C(q) = q^2 + q + 900$. სამუშაო დღეებში q რაოდენობის დამოკიდებულება საწარმოო ციკლის t საათზე გამოისახება ფორმულით $q(t) = 25t$.

ა) გამოსახეთ მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია t დროით;

ბ) რა იქნება წარმოების დანახარჯი მე-3 საათის ბოლოს?;

გ) როდის მიაღწევს მთლიანი დანახარჯი 11,000 ლარს?

15. ცნობილია, რომ N ქალაქში ჰაერში ნახშირორჟანგის საშუალო ყოველდღიური შემცველობის დონე არის $c(p) = 0.4p + 1$ მემილიონედი, სადაც p მოსახლეობის რაოდენობაა ათასებში. ასევე ცნობილია, რომ t წლის შემდეგ ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა იქნება $p(t) = 8 + 0.2t^2$ ათასი.

ა) გამოსახეთ ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის დონე როგორც t დროის ფუნქცია;

ბ) იპოვეთ ნახშირორჟანგის შემცველობის დონე 2 წლის შემდეგ;

გ) როდის მიაღწევს ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის დონე 6.2 მემილიონედს?

16. ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით (იხ. სურათი 3.12)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{თუ } x \le 0 \\ -x-1, & \text{თუ } x > 0 \end{cases}$$

იპოვეთ:

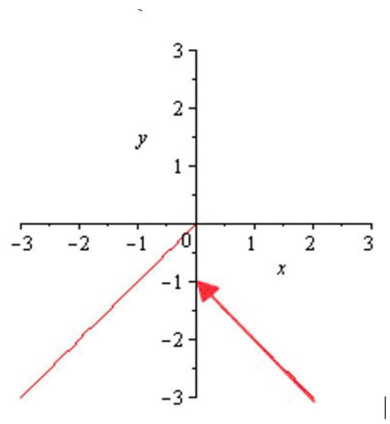
ა) $f([-1, 0])$;

ბ) $f([0, 1])$;

გ) $f([-1, 5])$;

დ) $f^{-1}([0, 5])$;

ე) $f^{-1}((-\infty, -2])$.



სურ 3.12

17. ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{თუ} \quad x<0 \\ -x-1, & \text{თუ} \quad x>0 \\ 2, & \text{თუ} \quad x=0 \end{cases}$$

ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ:

ა) $f([-1,0])$;

ბ) $f([0,1])$;

გ) $f([-1,5])$;

დ) $f^{-1}([0,10])$;

ე) $f^{-1}((-\infty,-2])$;

ვ) $\{x \mid f(x) \le 2\}$;

ზ) $\{x \mid -1 \le f(x) \le 1\}$;

თ) $\{x \mid f(x) \ge 2\}$.

18. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა-კლებადობის შუალედები და ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები (იხ. სურათი 3.13).

19. შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ურთიერთცალსახა?

ა) $f(x) = \frac{2x+1}{3x+3}$;

ბ) $f(x) = 2x - x^2$;

გ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

დ) $f(x) = \sqrt{x+2}$.

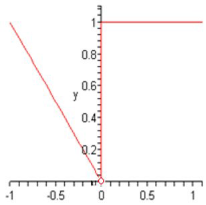
20. იპოვეთ $f^{-1}(x)$, თუ

ა) $f(x) = 3x - 1$;

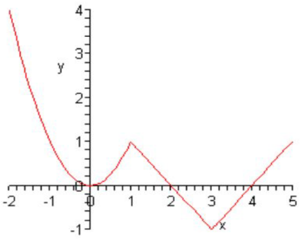
ბ) $f(x) = \frac{2x+1}{3x+3}$;

გ) $f(x) = \sqrt{3x+1}$;

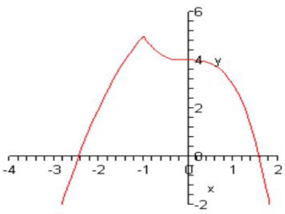
დ) $f(x) = x^3 + 2$.



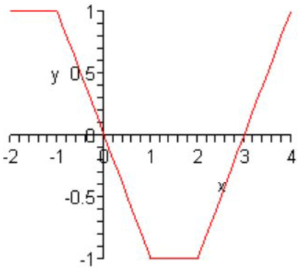
(a)



(b)



(c)



(d)

სურ 3.13

21. იპოვეთ $f^{-1}(x)$, თუ

ა) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 2x+1, & x < 0 \end{cases}$

ბ) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & x > 4 \end{cases}$

ლექცია 4

წრფივი ფუნქცია და მისი გამოყენება ეკონომიკაში

4.1 წრფე.წრფის დახრის კოეფიციენტი. წრფის განტოლებათა სახეები.

ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული ერთი წერტილი მოძრაობს იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული მეორე წერტილისკენ. წერტილის კოორდინატების ცვლილებას ვუწოდებთ კოორდინატთა ნაზრდებს. ისინი გამოითვლებიან შემდეგი წესით: ბოლო წერტილის პირველ კოორდინატს ვაკლებთ საწყისი წერტილის პირველ კოორდინატს და აღვნიშნავთ Δx სიმბოლოთი. ანალოგიურად, ბოლო წერტილის მეორე კოორდინატს ვაკლებთ საწყისი წერტილის მეორე კოორდინატს და სხვაობას აღვნიშნავთ Δy სიმბოლოთი. მაშასადამე (იხ. სურათი 4.1)

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

და

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

მაგალითი 4.1 *ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს $A\left(3,-3\right)$ წერტილიდან $B\left(-1,2\right)$ წერტილისკენ. იპოვეთ კოორდინატთა ნაზრდები:*

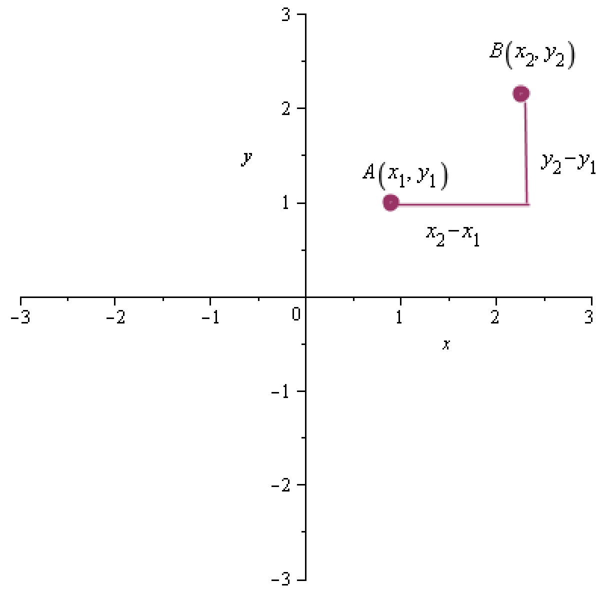
ამოხსნა:

$$\Delta x = -1 - 3 = -4, \quad \Delta y = 2 - (-3) = 5.$$

წრფის დახრის კოეფიციენტი

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია l წრფე და $A\left(x_1, y_1\right)$ და $B\left(x_2, y_2\right)$ მასზე დაფიქსირებული ნებისმიერი ორი წერტილია. წრფის დახრის კოეფიციენტი, ანუ საკუთხო კოეფიციენტი m განისაზღვრება ფორმულით (იხ. სურათი 4.1)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



სურ 4.1

ადვილი დასანახია (იხ. სურათი 4.2), რომ თუ წრფეზე დავაფიქსირებთ ნებისმიერ სხვა ორ $A'(x'_1, y'_1)$ და $B'(x'_2, y'_2)$ წერტილს, მაშინ მოცემული წრფის დახრის კოეფიციენტი არ შეიცვლება. ე. ი.

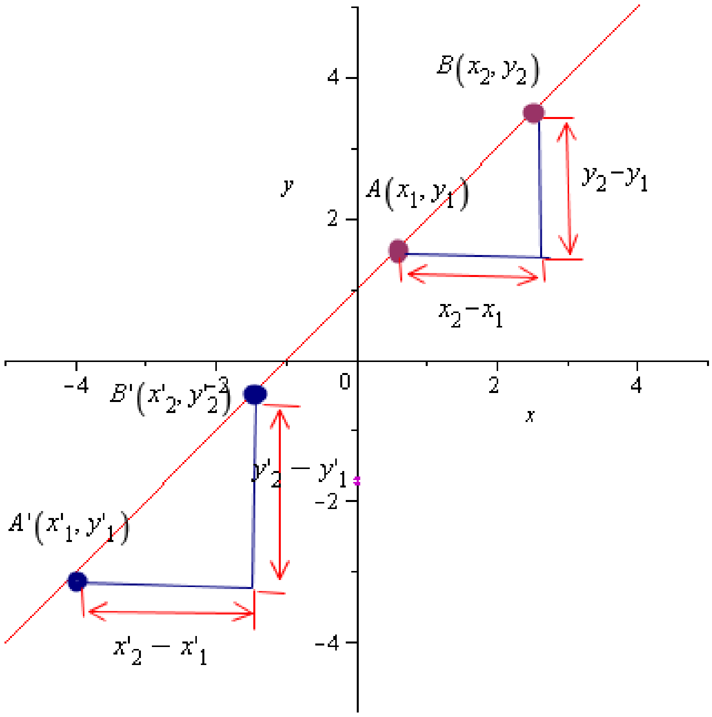
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}.$$

წრფის დახრის კოეფიციენტი შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი ან ნულის ტოლი. წრფის ყოფაქცევა საკოორდინატო სიბრტყეზე დამოკიდებულია საკუთხო კოეფიციენტის ნიშანზე. 4.3 სურათზე მოცემულია დახრის კოეფიციენტის დამოკიდებულება წრფის ყოფაქცევაზე.

მაგალითი 4.2 *ვიპოვოთ იმ წრფის დახრის კოეფიციენტი, რომელიც გადის $P(2,1)$ და $Q(8,5)$ წერტილებზე.*

ამოხსნა:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$



სურ 4.2

ვთქვათ, ცნობილია, რომ წრფის დახრის კოეფიციენტი არის m და წრფე გადის სიბრტყის (x_1, y_1) წერტილზე. დავწეროთ ამ წრფის განტოლება.
ავიღოთ საკოორდინატო სიბრტყის ნებისმიერი ის (x, y) წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემული წრფის განტოლებას (იხ. სურათი 4.4). მაშინ, დახრის კოეფიციენტის განსაზღვრების ძალით

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

საიდანაც მივიღებთ საძიებელ განტოლებას

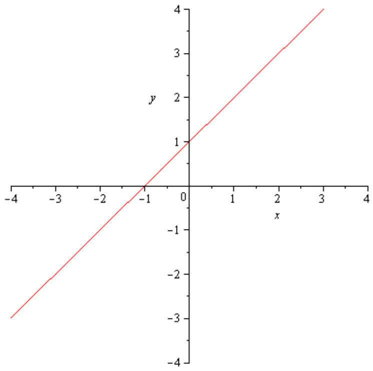
$$y - y_1 = m\,(x - x_1)\,.$$

ანალოგიური მსჯელობით მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ მოცემულ ორ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას ექნება სახე

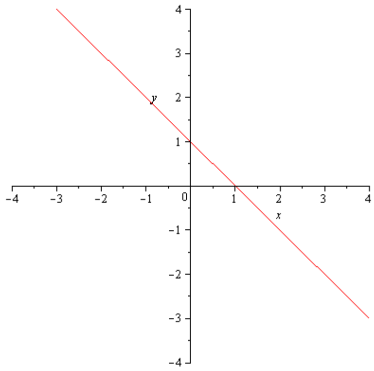
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

მაგალითი 4.3 *დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრის კოეფიციენტია* $-\frac{1}{2}$ *და გადის* $(1, -3)$ *წერტილზე.*
ამოხსნა:

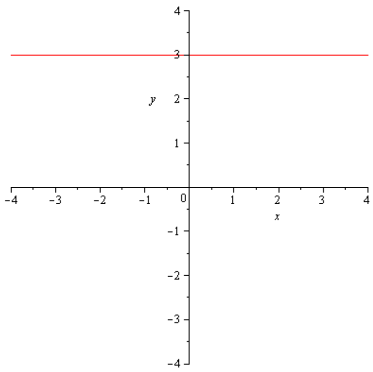
$$y + 3 = -\frac{1}{2}\,(x - 1)\,,$$
$$x + 2y + 5 = 0.$$



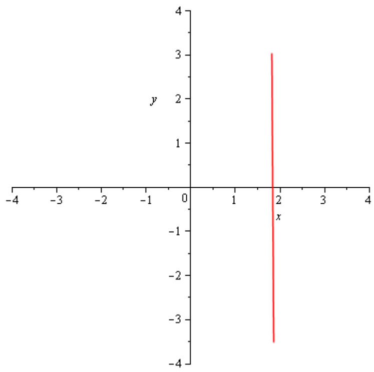
(a) დახრის კოეფიციენტი დადებითია



(b) დახრის კოეფიციენტი უარყოფითია



(c) დახრის კოეფიციენტი არის ნულის ტოლი, $Y_1 = Y_2$



(d) დახრის კოეფიციენტი არ არის განსაზღვრული, $x_1 = x_2$

სურ 4.3

დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრის კოეფიციენტია m, ხოლო y –გადაკვეთა b. ცხადია, უნდა დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის სიბრტყის $(0, b)$ წერტილზე და დახრის კოეფიციენტია m (იხ. სურათი 4.5). როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში წრფის განტოლებას ექნება სახე:

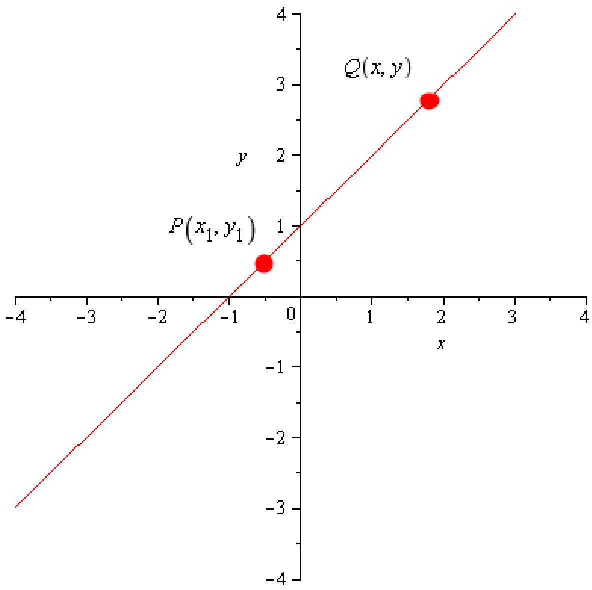
$$y - b = m(x - 0),$$

ანუ

$$y = mx + b.$$

დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომლის დახრის კოეფიციენტია m, ხოლო x –გადაკვეთა a. ცხადია, უნდა დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის სიბრტყის $(a, 0)$ წერტილზე და დახრის კოეფიციენტია m (იხ. სურათი 4.6). მაშინ როგორც ვიცით, წრფის განტოლებას ექნება სახე:

$$y = m(x - a),$$



სურ 4.4

დავწეროთ წრფის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი x –გადაკვეთაა a, ზოლო y –გადაკვეთა კი- b (იხ. სურათი 4.7).
ვინაიდან ეს წრფე გაივლის $(0, b)$ და $(a, 0)$ წერტილებზე, ამიტომ მისი დახრის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$m = -\frac{b}{a}.$$

მაშასადამე, წრფის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

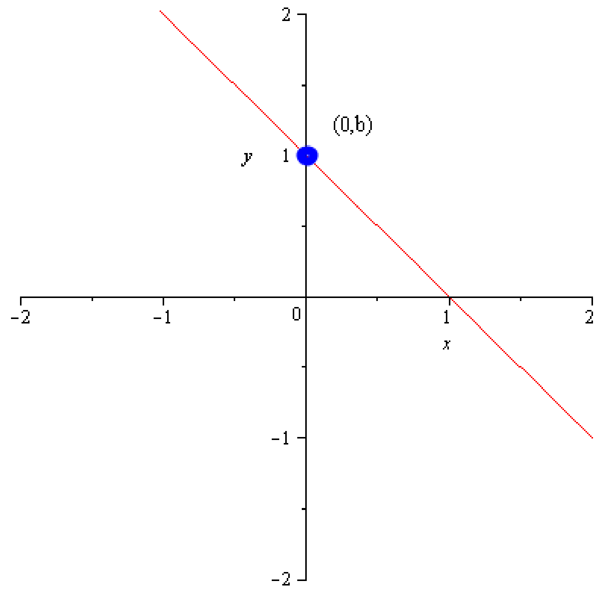
$$y - b = m(x - 0) = -\frac{b}{a}x,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

რომელსაც ასევე უწოდებენ წრფის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში.

მტკიცდება, რომ ყოველი წრფივი ორცვლადიანი $Ax + By + C = 0$ განტოლების გრაფიკი სიბრტყეზე წარმოადგენს წრფეს. ამ განტოლებას უწოდებენ წრფის ზოგად განტოლებას.
თუ წრფის ზოგად განტოლებაში $B \neq 0$, მაშინ წრფის დახრის კოეფიციენტი გამოითვლება $m = -A/B$ ფორმულით, ხოლო y-გადაკვეთა კი $b = -C/B$ ფორმულით.



სურ 4.5

4.2 წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის ნიშნები. კუთხე ორ წრფეს შორის.

არ არის ძნელი იმის დამტკიცება, რომ აბსცისთა ღერძის არამართობული ორი წრფე ურთიერთპარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრის კოეფიციენტები ტოლია მაშასადამე, პირობა

$$m_1 = m_2$$

წარმოადგენს ორი წრფის პარალელობის ნიშანს (იხ. სურათი 4.8).

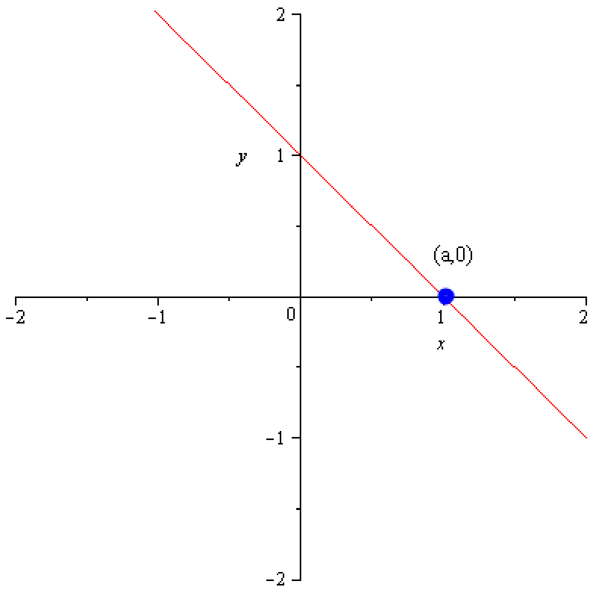
მაგალითი 4.4 *ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის სიბრტყის $(5, 2)$ წერტილზე და პარალელურია $4x + 6y + 5 = 0$ წრფის.*

ამოხსნა: *პირველ რიგში ვიპოვოთ წრფის დახრის კოეფიციენტი.*

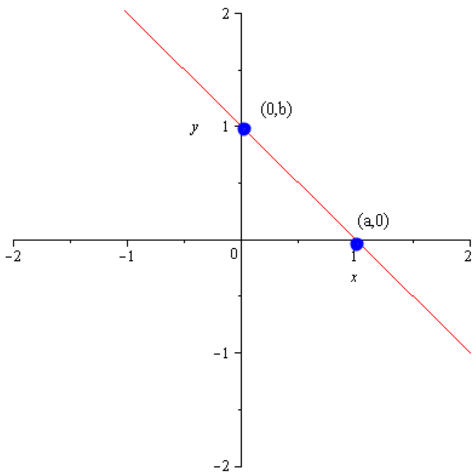
$$m = -\frac{2}{3}.$$

აქედან კი, წრფეთა პარალელობის პირობის გამოყენებით მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას

$$y = -\frac{2}{3}(x - 5) + 2.$$



სურ 4.6

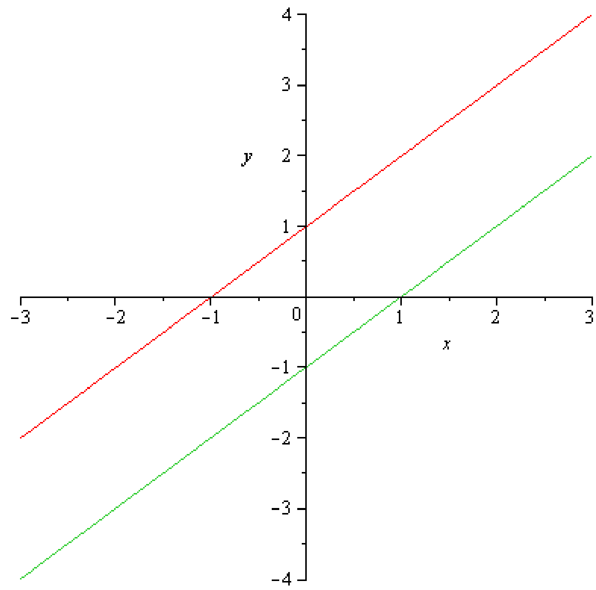


სურ 4.7

> ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე l_1 და l_2, რომელთა დახრის კოეფიციენტებია, შესაბამისად, m_1 და m_2. მაშინ პირობა
>
> $$m_1 m_2 = -1$$
>
> არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ მოცემული წრფეები იყვნენ ურთიერთმართობულები.

მართლაც, რადგანაც პარალელურ წრფეებს აქვთ ერთნაირი დახრის კოეფიციენტები, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული ეს წრფე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეში. ვთქვათ, l_1 წრფის განტოლება არის $y = m_1 x$, ხოლო l_2 წრფის – $y = m_2 x$ (იხ. სურათი 4.9).

მაშასადამე, სურ. 4.9-ზე აღნიშნული A და B წერტილების კოორდინატები იქნება $(1, m_1)$ და $(1, m_2)$ შესაბამისად. განვიხილოთ სამკუთხედი AOB. როგორც ცნობილია სასკოლო კურსიდან (პითაგორას და მისი შებრუნებული თეორემა), მოცემული სამკუ-



სურ 4.8

თხედი რომ იყოს მართკუთხა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ერთი გვერდის კვადრატი უდრიდეს დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს. მაშასადამე,

$$[d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 = [d(A,B)]^2$$

ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით საბოლოოდ მივიღებთ,

$$\begin{aligned} \left(1^2 + m_1^2\right) + \left(1^2 + m_2^2\right) &= (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2 \\ 2 + m_1^2 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2, \\ 2 &= -2m_1m_2, \\ m_1m_2 &= -1. \end{aligned}$$

მაგალითი 4.5 *დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყის წერტილები* $P(3,3), Q(8,17)$ *და* $R(11,5)$ *წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებს.*

მართლაც, გამოვთვალოთ PR *და* QR *წრფეების დახრის კოეფიციენტები*

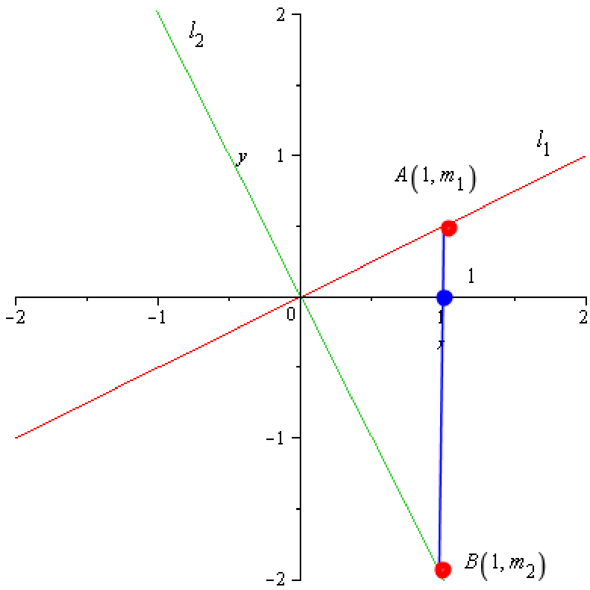
$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4}$$

და

$$m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4.$$

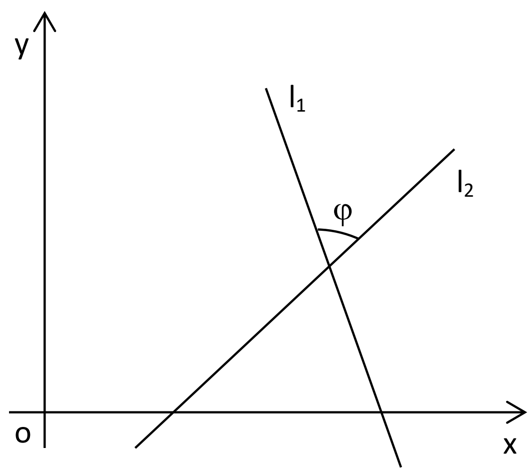
რადგანაც $m_1m_2 = -1$*, დავასკვნით* PR *და* QR *წრფეების მართობულობას.*

როგორც სკოლის კურსიდანაა ცნობილი, კუთხე ორ გადამკვეთ წრფეს შორის ეწოდება მათი გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხის სიდიდეებს შორის უმცირესს. პარალელურ წრფეებს შორის კუთხის სიდიდე ნულის ტოლადაა მიღებული.



სურ 4.9

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემილია ორი წრფე, l_1 და l_2 , რომელთა დახრილობის კოეფიციენტებია, შესაბამისად, m_1 და m_2 , ხოლო კუთხე მათ შორის არის φ .



სურ 4.10

მტკიცდება, რომ თუ ეს წრფეები არაა ურთიერთმართობული, მათ შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$tg\varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| .$$

ადვილი დასანახია, რომ წრფეთა პარალელურობისა და მართობულობის ჩვენ მიერ ზემოთმოყვანილი ნიშნების მიღება ამ უკანასკნელი ფორმულიდანაც შეიძლება.

აქვე შევნიშნოთ, რომ, სამართლიანია შემდეგი ფორმულაც:

$$m = tg\alpha,$$

სადაც m წრფის დახრილობის კოეფიციენტია, α კი არის ის უმცირესი კუთხე, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ აბსცისთა ღერძი, რომ შეუთავსდეს მოცემულ წრფეს.

ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ მანძილი სიბრტყის $M_0(x_{0,}y_0)$ წერტილიდან $Ax + By + C = 0$ წრფემდე გამოითვლება ფორმულით:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{4.1}$$

მაგალითი 4.6 *ვიპოვოთ მანძილი $A(-1,2)$ წერტილიდან $2x-3y+7=0$ წრფემდე.*

***ამოხსნა:** (4.1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:*
$d = \frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 2+7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

მაგალითი 4.7 *ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე და მართობულია $4x + 6y + 5 = 0$ წრფის.*

***ამოხსნა:** რადგანაც მოცემული წრფის დახრის კოეფიციენტია $m = -\frac{2}{3}$, მაშინ საძებნი წრფის დახრის კოეფიციენტი იქნება $\frac{3}{2}$ და მაშასადამე, $(0,0)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას ექნება სახე:*

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0),$$

$$y = \frac{3}{2}x.$$

4.3 ორი წრფის გადაკვეთა.

მაგალითი 4.8 *ვიპოვოთ $y = 3x - 7$ და $5x - y + 1 = 0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.*

***ამოხსნა**. ცხადია, ეს წრფეები არ არიან პარალელური, ვინაიდან $m_1 = 3$ და $m_2 = 5$. მათი გადაკვეთის წერტილი ეკუთვნის ორივე წრფეს. ანუ, წერტილის კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილონ ორივე წრფის განტოლება. ასეთი (x,y) წყვილის საპოვნელად კი, ცხადია, უნდა ამოვხსნათ ამ განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემა. გვექნება*

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 5x - 3x + 7 + 1 = 0 \\ 2x = -8 \\ x = -4 \end{array} \right. \quad | \; y = 3(-4) - 7 = -19$$

მაშასადამე, მოცემული ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია $(-4; -19)$.

4.4 მოთხოვნა-მიწოდების ანალიზი. წონასწორული ფასის განსაზღვრა.

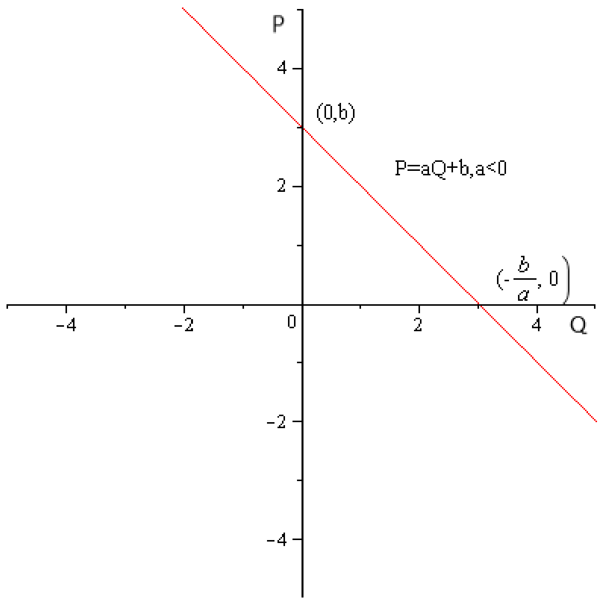
შევუდგეთ მიკროეკონომიკის ორი ძირითადი ცნების განხილვას, რომელთაც მოთხოვნა და მიწოდება ეწოდებათ. მათი საშუალებით კი გავაანალიზებთ საბაზრო ეკონომიკის მეტად მნიშვნელოვან საკითხს, რომელიც მოთხოვნისა და მოწოდების წონასწორობის სახელითაა ცნობილი.

ვთქვათ, ბაზრის მოთხოვნა რაიმე ფიქსირებულ პროდუქტზე არის Q. ცხადია, Q არის რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს მოთხოვნილი ნაწარმის რაოდენობას. აღვნიშნოთ პროდუქციის ერთეულის საბაზრო ფასი p სიმბოლოთი.

ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა p წრფივი ფუნქციაა Q -ს მიმართ:

$$p = g_D(Q) = aQ + b \tag{4.2}$$

სადაც a და b რაიმე კონკრეტული მუდმივებია, რომელთაც ეკონომიკაში პარამეტრებს უწოდებენ. რეალურ ცხოვრებაში პროდუქტზე ფასის ზრდა იწვევს ამ პროდუქტზე მოთხოვნის შემცირებას(ან რაც იგივეა, მოთხოვნის ზრდა იწვევს ფასის შემცირებას). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (4.2)-ით მოცემული მოთხოვნის ფუნქცია (მოთხოვნის წრფე) უნდა იყოს კლებადი (იხ. სურათი 4.11). მაშასადამე, a პარამეტრი, როგორც კლებადი წრფის დახრის კოეფიციენტი, იქნება უარყოფითი.



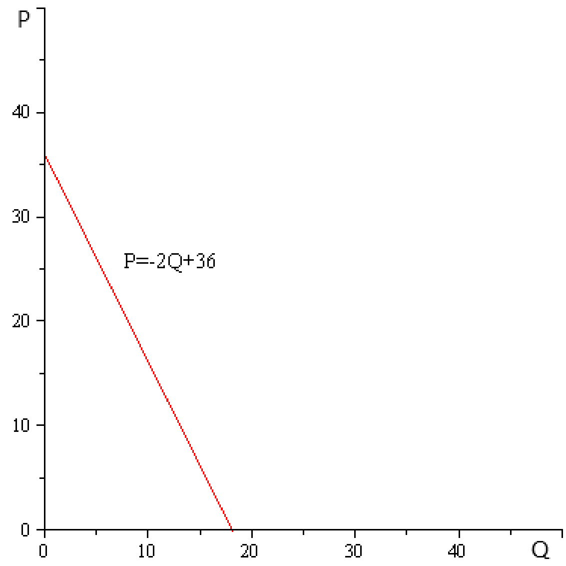
სურ 4.11

გავარკვიოთ b პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი (3.1) ტოლობაში. ცხადია, როცა $p = b$, მაშინ $Q = 0$, ე.ი. როდესაც ფასი არის b-ს ტოლი, მაშინ განსახილველ პროდუქციაზე მოთხოვნა არ არსებობს. ამრიგად, b პარამეტრი დადებითია და პროდუქციის ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია ამ b რიცხვით. ასევე ცხადია, როცა $p = 0$, მაშინ $Q = -\frac{b}{a} > 0$. ამიტომ $-\frac{b}{a}$ რიცხვი მიუთითებს ბაზრის მაქსიმალურ მოთხოვნას.

მაგალითი 4.9 *ავაგოთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა* $p = -2Q + 36$;

ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 10?
ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როდესაც ფასია 14?

ამოხსნა: მოთხოვნის წრფის ასაგებად ვიპოვოთ მისი OQ და OP ღერძებთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები (ანუ, p-გადაკვეთა და q-გადაკვეთა). როცა $p = 0$, მაშინ $Q = 18$, ხოლო როცა $Q = 0$, მაშინ $p = 36$. ამიტომ მოთხოვნის წრფე გაივლის (18,0) და (0,36) წერტილებზე (იხ. სურათი 4.12)



სურ 4.12

ა) თუ $Q = 10$, მაშინ $p = -2(10) + 36 = 16$, ე.ი. ამ შემთხვევაში პროდუქციის ფასია 16.

ბ) როცა $p = 14$, მაშინ გვექნება 14=-2Q+36, ანუ $Q = 11$, ე.ი. , როცა ფასია $p = 14$, მაშინ მოთხოვნაა $Q = 11$.

ახლა განვიხილოთ **მიწოდების** ფუნქცია. ის შესაბამისობას ამყარებს რაიმე პროდუქციის ერთეულის p ფასსა და ამავე პროდუქციის იმ Q რაოდენობას შორის, რომლის ბაზარზე შეტანასაც გეგმავს მწარმოებელი. აქაც განვიხილოთ ის კონკრეტული შემთხვევა, როცა მიწოდების ფუნქცია წრფივი ფუნქციაა, ე.ი.

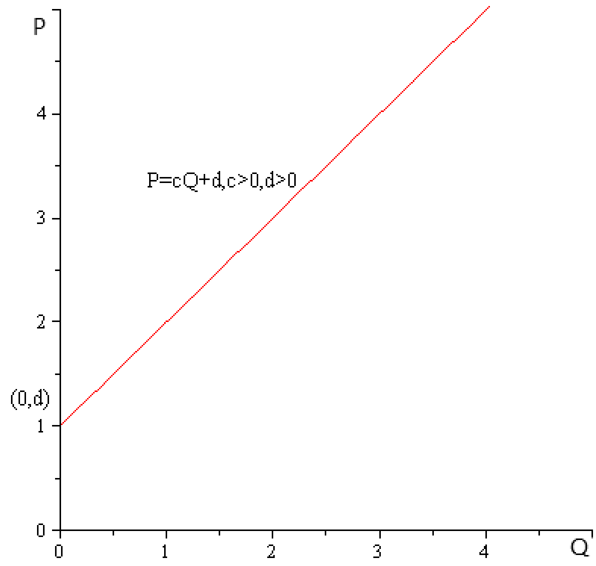
$$p = g_S(Q) = cQ + d, \tag{4.3}$$

სადაც c და d მუდმივებია. მიწოდების ფუნქციის ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ (4.3) წრფის დახრის კოეფიციენტი $c > 0$. რადგანაც ფასი ყოველთვის დადებითია, ამიტომ (4.3) ტოლობაში d პარამეტრიც (წრფის p- გადაკვეთა) დადებითია. ავაგოთ მიწოდების წირის (წრფის) გრაფიკი.

ნახაზიდან (იხ. სურათი 4.13) ჩანს, რომ მწარმოებელი დაგეგმავს პროდუქციის შეტანას ბაზარზე მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ფასი გადააჭარბებს d სიდიდეს.

ავაგოთ ახლა ერთსა და იმავე OQP სიბრტყეზე მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წრფეები.

ჩავატაროთ ნახაზის ანალიზი (იხ. სურათი 4.14). ჯერ განვიხილოთ p_1 ფასის შესაბამისი B და C წერტილები L_D და L_S წრფეებზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს p_1 ფასს



სურ 4.13

შეესაბამება $Q_D^{(1)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(1)}$ მიწოდება, ამასთან $Q_D^{(1)} < Q_S^{(1)}$, ე.ი. მოთხოვნა ნაკლებია მიწოდებაზე. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ბაზარზე გვაქვს ჭარბი პროდუქცია.

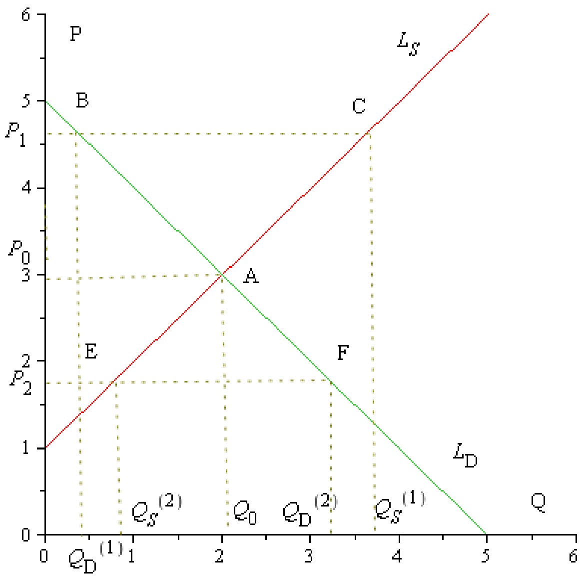
ახლა განვიხილოთ p_2 ფასის შესაბამისი $E \in L_S$ და $F \in L_D$ წერტილები. ცხადია, რომ p_2 ფასის შემთხვევაში $Q_D^{(2)} > Q_S^{(2)}$, ე.ი. მოთხოვნა სჭარბობს მიწოდებას. ანუ, საქმე გვაქვს პროდუქციის დეფიციტთან. რა თქმა უნდა, ეს ორივე შემთხვევა არასასურველია ბაზრისთვის.

ახლა განვიხილოთ p_0 ფასის შესაბამისი სიტუაცია. მას შეესაბამება L_D და L_S წრფეების საერთო A წერტილი(როგორც ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილი), რომლის აბსცისაა Q_0. ანუ, p_0 ფასზე მოთხოვნა ემთხვევა მიწოდებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ **ბაზარი გაწონასწორებულია**-იყიდება იმ რაოდენობის პროდუქცია, რა რაოდენობის პროდუქციაც მიეწოდება ბაზარს. ამ p_0 ფასს ეწოდება წონასწორობის ფასი, შესაბამის Q_0 -ს კი -წონასწორობის სიდიდე. როგორ ვიპოვოთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე? ვინაიდან ეს სიდიდეები წარმოადგენენ მოთხოვნისა და მიწოდების წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს, ამიტომ, ცხადია, მათ საპოვნელად უნდა ამოიხსნას მოთხოვნისა და მიწოდების წრფეების განტოლებებისგან შედგენილი სისტემა. ამ სისტემის (Q_0, p_0) ამონახსნი წარმოადგენს სწორედ წონასწორობის წერტილის კოორდინატებს.

მაგალითი 4.10 *მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შესაბამისად $p = -3Q + 60$ და $p = 2Q + 10$ ტოლობებით. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე.*

ამოხსნა: *როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, წონასწორობის ფასისა და წონასწორობის სიდიდის საპოვნელად უნდა ამოიხსნას შემდეგი სისტემა*

$$\begin{aligned} p &= 2Q + 10 \\ p &= -3Q + 60 \end{aligned}$$



სურ 4.14

გავუტოლოთ ერთმანეთს განტოლებათა მარჯვენა მხარეები. მივიღებთ:

$$2Q + 10 = -3Q + 60$$

საიდანაც $5Q = 50$ *და* $Q = 10$. *მაშინ* p*-ს შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება* $p = 2(10) + 10 = 30$. *ამრიგად, წონასწორობის წერტილის კოორდინატებია (10,30).*

4.5 ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემა.

ვთქვათ, ეროვნულ ეკონომიკას გააჩნია ორი სექტორი: საოჯახო მეურნეობები და ფირმები. პროდუქციის წარმოებისა და მომსახურებისათვის ფირმები ისეთ რესურსებს იყენებენ, როგორიცაა: მიწა, კაპიტალი და შრომა. ამ რესურსებს **წარმოების ფაქტორები** ეწოდება და ისინი საოჯახო მეურნეობების სექტორს მიეკუთვნება. აღნიშნულ შემთხვევაში **ეროვნული შემოსავალი** იმ თანხების ნაკადია, რომლებსაც ფირმები უხდიან საოჯახო მეურნეობებს წარმოების ფაქტორებისათვის.

საოჯახო მეურნეობებს მიღებული თანხა შეუძლიათ მოიხმარონ ორი მიმართულებით:

ა) მათ შეუძლიათ თანხის ნაწილით შეიძინონ ფირმების მიერ წარმოებული პროდუქცია ან ისარგებლონ ფირმების მომსახურებით;

ბ) დაზოგილი თანხა ანაბრების ან სხვა სახით შეინახონ ან დააბანდონ ბანკებში, აქციებში და ა.შ.

ცხადია, რომ საოჯახო მეურნეობათა მიერ დახარჯული C თანხისა და დაზოგილი S თანხის რაოდენობები დამოკიდებულია ეროვნულ Y შემოსავალზე, ე.ი.

$$C = f(Y)$$

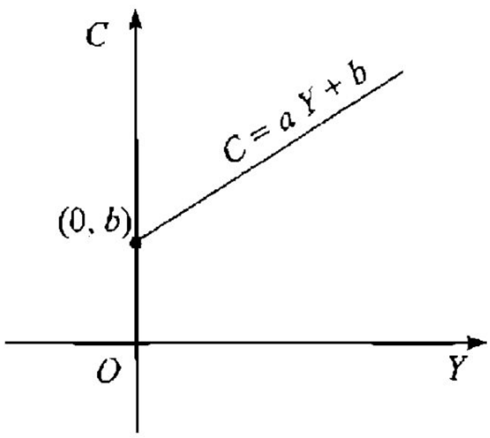
$$S = g(Y)$$

აქ f-ს **მოხმარების (ან კიდევ დანახარჯის) ფუნქცია** ეწოდება, ხოლო g-ს -**დანაზოგის ფუნქცია**. რეალურ ცხობრებაში Y-ის ზრდას მოსდევს როგორც მოხმარების ხარჯების, ისე დანაზოგების ზრდა. ამიტომ f და g ზრდადი ფუნქციებია.

გავეცნოთ მოხმარების f ფუნქციას. ვთქვათ, მოხმარების C დანახარჯი წრფივადაა დამოკიდებული Y შემოსავალზე, ე.ი.

$$C = aY + b \tag{4.4}$$

ვინაიდან ეს წრფივი ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ $a > 0$. b პარამეტრს **ავტონომიური დანახარჯი** ეწოდება და ის დადებითია. ამასთანავე $a < 1$, რადგან, ზოგადად, დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს შემოსავალს. ამიტომ მოხმარების ფუნქციის გრაფიკს ექნება სახე (იხ. სურათი 4.15)



სურ 4.15

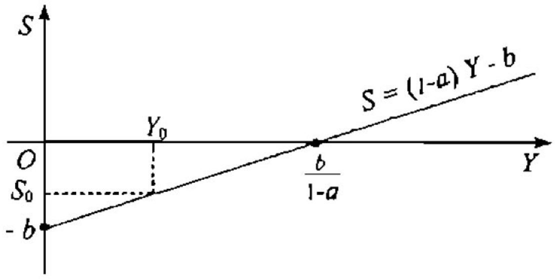
ცხადია, რომ საოჯახო მეურნეობათა დანახაჯებისა და დანაზოგების ჯამი ემთხვევა ეროვნულ შემოსავალს(**ბალანსის განტოლება**)

$$C + S = Y \tag{4.5}$$

საიდანაც, (4.4) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$S = (1 - a)Y - b, \tag{4.6}$$

რომელსაც **დანაზოგის ფუნქცია** ეწოდება (იხ. სურათი 4.16)



სურ 4.16

(4.6) ფორმულიდან დავასკვნით, რომ დანაზოგი დადებითია მხოლოდ მაშინ, როცა ეროვნული შემოსავალი გადააჭარბებს $\frac{b}{1-a}$ სიდიდეს.

დანაზოგის ფუნქციამ შეიძლება მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობაც. კერძოდ, როცა $0 < Y < \frac{b}{1-a}$.

ეს რეალურ ცხოვრებაში იმაზე მიუთითებს, რომ როდესაც შემოსავალი საკმარისი არაა აუცილებელი დანახარჯების დასაფარად, მაშინ დანახარჯების ნაწილი იფარება, მაგალითად, ანაბრებიდან დანაზოგების მოხსნით.

ვთქვათ, ჩვენს მიერ განხილულ ეროვნული ეკონომიკის უმარტივეს მოდელში ფირმები გეგმავენ გარედან რაიმე კონკრეტული, ფიქსირებული I რაოდენობის თანხის ინვესტიციას. თუ შესრულებულია ტოლობა

$$C + I = Y, \tag{4.7}$$

მაშინ ამბობენ, რომ **ეკონომიკა წონასწორობაშია**. (4.5) და (4.7) ტოლობების შედარებით დავასკვნით, რომ ეკონომიკის წონასწორობის შემთხვევაში დანაზოგის S სიდიდე ემთხვევა ინვესტიციის I სიდიდეს.

თუ დავუშვებთ, რომ C დანახარჯი და Y შემოსავალი ერთმანეთთან დაკავშირებულია (4.4) ტოლობით, სადაც a და b ცნობილი მუდმივებია, მაშინ ეკონომიკის წონასწორობის (4.7) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ ორ უცნობიან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} C = aY + b \\ Y = C + I \end{cases} \tag{4.8}$$

ამ სისტემის (Y_0, C_0) ამონახსნი განსაზღვრავს ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის შესაბამის Y_0 შემოსავლისა და C_0 დანახარჯის დონეებს.

მაგალითი 4.11 *ვიპოვოთ ეროვნული შემოსავლისა და დანახარჯისს წონასწორობის დონე, თუ დანახარჯის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე*

$$C = 0.6Y + 10$$

და დაგეგმილი საინვესტიციო თანხაა $I = 12$ ერთეული.

ამოხსნა: *გამოვიყენოთ ეკონომიკის წონასწორობის განმსაზღვრელი (4.8) განტოლებათა სისტემა. ჩვენს შემთხვევაში მივიღებთ:*

$$\begin{cases} C = 0.6Y + 10 \\ Y = C + 12 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ, რომ $Y = 55$ და $C = 43$. ამ რიცხვებით განისაზღვრება ეკონომიკის წონასწორობის შესაბამისი ეროვნული შემოსავალი და დანახარჯები.

4.6 წრფივი ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკაში.

წრფივ განტოლებათა თეორიის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ეკონომიკური ხასიათის ამოცანა.

ამოცანა 4.1 (მგზავრთა გადაყვანის ხარჯების განსაზღვრა) *ვთქვათ, სატრანსპორტო კომპანიას ერთი და იგივე ტურისტთა ჯგუფის გადაყვანა ქალაქიდან 30 კილომეტრით დაშორებულ პუნქტამდე უჯდება 40 ლარი, ხოლო 60 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე -70 ლარი. რა ეღირება ამავე ჯგუფის გადაყვანა ქალაქიდან x კილომეტრ მანძილზე, თუ დამოკიდებულება მანძილსა და მგზავრთა გადაყვანის ხარჯებს შორის წრფივია? ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.*

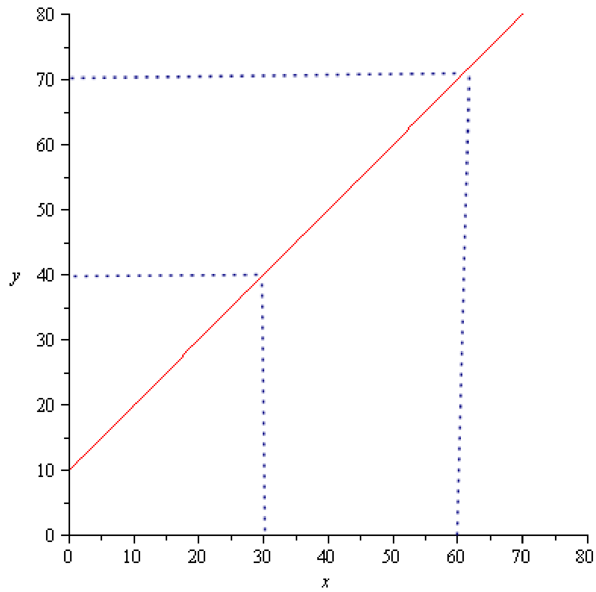
ამოხსნა. მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები აღვნიშნოთ y-ით, ხოლო მანძილი x-ით. ამოცანის პირობის თანახმად, მათ შორის დამოკიდებულებას განსაზღვრავს წრფე. ამასთანავე, როდესაც $x = 30$, მაშინ $y = 40$, ხოლო როცა $x = 60$, მაშინ $y = 70$. ამიტომ, ცხადია, აღნიშნული წრფე გაივლის (30,40) და (60,70) წერტილებზე (იხ. სურათი 4.17). მისი შესაბამისი განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\frac{x-30}{60-30} = \frac{y-40}{70-40}$$

აქედან მარტივად მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას:

$$y = x + 10,$$

რომელიც განსაზღვრავს ქალაქიდან x კმ მანძილზე მგზავრთა გადაყვანის ხარჯებს. ამრიგად, x კმ მანძილზე მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები იქნება $(x + 10)$ ლარი. შევნიშნოთ, რომ ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ აქ $x > 0$ და $y > 0$.



სურ 4.17

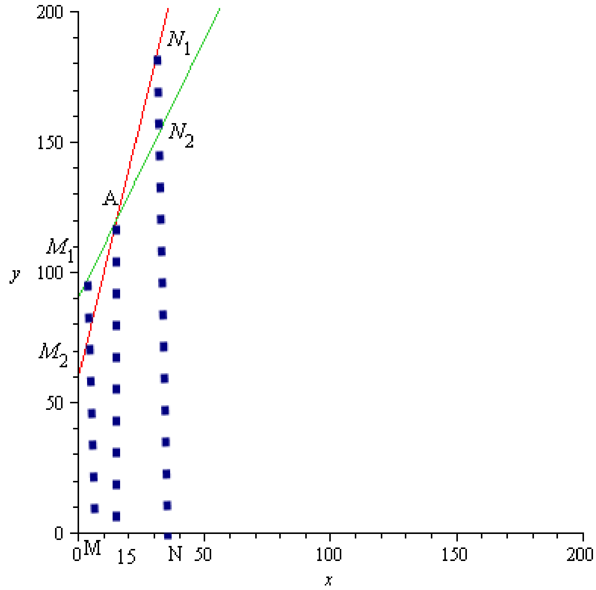
ამოცანა 4.2 (მგზავრთა გადაყვანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა) *ვთქვათ, მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები პირველი სახის ტრანსპორტით გამოისახება $y = 4x+60$ ფორმულით, ხოლო მეორე სახის ტრანსპორტით -]$y = 2x + 90$ ფორმულით. გამოიკვლიეთ, რომელი სახის ტრანსპორტით უფრო ხელსაყრელია მგზავრთა გადაყვანა?*

ამოხსნა. გამოკვლევა ჩავატაროთ გრაფიკული მეთოდით. ამისათვის ავაგოთ ამოცანაში მითითებული წრფივი ფუნქციების შესაბამისი L_1 და L_2 წრფეები OXY სიბრტყეში (იხ. სურათი 4.18). ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ცხადია, x ცვლადი

უნდა იყოს დადებითი. ამ წრფეების გადაკვეთის A წერტილის საპოვნელად, როგორც ვიცით, უნდა ამოიხსნას სისტემა:

$$\begin{cases} y &= 4x+60; \\ y &= 2x+90. \end{cases}$$

მივიღებთ $A=(15,120)$. ახლა ჩავატაროთ ანალიზი.



სურ 4.18

ნახაზიდან ჩანს, რომ თუ $0<x_0<15$, მაშინ x_0 მანძილის შესაბამისი ხარჯები პირველი სახის ტრანსპორტით იქნება MM_1, მეორე სახის ტრანსპორტით კი - MM_2. რადგან $MM_1<MM_2$, ამიტომ ამ შემთხვევაში მგზავრთა გადაყვანა ხელსაყრელი იქნება პირველი სახის ტრანსპორტით. თუ x_1 მანძილი მეტია 15 კმ-ზე, მაშინ მგზავრთა გადაყვანა ხელსაყრელი იქნება მეორე სახის ტრანსპორტით, რადგანაც $NN_1>NN_2$. საბოლოოდ, თუ ტრანსპორტირება განხორციელდება ზუსტად 15 კმ მანძილზე, მაშინ ორივე ტრანსპორტის დანახარჯი ერთი და იგივეა და შეადგენს 120 ლარს.

4.7 სავარჯიშოები:

1. მოცემული ფუნქციებისთვის იპოვეთ x და y გადაკვეთები და ააგეთ შესაბამისი გრაფიკის ესკიზები.

   1) $f(x)=x$
   2) $f(x)=\sqrt{x}$
   3) $f(x)=2x-1$
   4) $f(x)=2-3x$
   5) $f(x)=x(2x+5)$
   6) $f(x)=(x-1)(x+2)$
   7) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{როცა} x\le 0 \\ x+1, \text{როცა} x>0 \end{cases}$

2. დაწერეთ იმ წრფის განტოლებები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ მოცემულ პირობებს:

1) დახრის კოეფიციენტია 3 და y-გადაკვეთა -2;
2) დახრის კოეფიციენტია $\frac{2}{3}$; $y-$გადაკვეთა 4;
3) გადის $(2,3)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტია 5;
4) გადის $(-2,4)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტია -1;
5) გადის $(2,1)$ და $(1,6)$ წერტილებზე;
6) გადის $(-2,5)$ და $(-1,-3)$ წერტილებზე;
7) x-გადაკვეთაა 1; y-გადაკვეთა 6;
8) x-გადაკვეთა -8; y-გადაკვეთა 6;
9) გადის $(-1,4)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტი არაა განსაზღრული;
10) გადის $(2,-1)$ წერტილზე; დახრის კოეფიციენტი არაა განსაზღრული;
11) გადის $(5,1)$ წერტილზე დახრის კოეფიციენტია 0;
12) გადის $(1,2)$ წერტილზე და პარალელურია $y=3x-5$ წრფის;
13) გადის $(4,5)$ წერტილზე და პარალელურია y-ღერძის;
14) გადის $(2,6)$ წერტილზე და პარალელურია $y=1$ წრფის
15) გადის $(-1,-2)$ წერტილზე და მართობულია $2x+5y+8=0$ წრფის

3. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(-2,-11)$ წერტილზე და მართობულია $(1,1)$ და $(5,-1)$ წერტილებზე გამავალი წრფის.

4. წრფის დახრის კოეფიციენტების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ოთკუთხედი წვეროებით $A\,(1,1)$,$B\,(7,4)\,,C\,(5,10)$ და $D\,(-1,7)$ პარალელოგრამია.

5. წრფის დახრის კოეფიციენტების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი წვეროებით $A\,(-3,-1)\,,B\,(3,3)$ და $C\,(-9,8)$ მართკუთხაა.

6. წრფის დახრის კოეფიციენტების გამოყენებით დაადგინეთ, მდებარეობენ თუ არა მოცემული წერტილები ერთ წრფეზე

   1) $(1,1),(3,9)\,,(6,21)\,;$
   2) $(-1,3)\,,(1,7)\,,(4,15)\,.$

7. იპოვეთ x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $A\,(x;2)$ და $B(3;-4)$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრის კოეფიციენტი 2-ის ტოლია.

8. იპოვეთ y-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $A\,(-3;y)$ და $B(-1;4)$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრის კოეფიციენტი ტოლია -2-ის.

9. იპოვეთ k-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(k,5)$ და $(3,2k)$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა არის 2-ის ტოლი.

10. იპოვეთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(-2,t-1)$ და $(t+2,1)$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა არის დადებითი.

11. იპოვეთ n-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $(2n,6)$ და $(1,-n)$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა არ აღემატება 5-ს..

12. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მართობულია $A\,(1,4)$ და $B\,(7,-2)$ წერტილების შემაერთებელი წრფის და ჰკვეთს მას AB მონაკვეთის შუაწერტილში,

13. ააგეთ წრფე, რომელიც გადის საკოორდინატო სისტემის სათავეზე და $A(-3;4)$ წერტილზე. ჩაწერეთ ამ წრფის განტოლება.

14. შეადგინეთ წრფის განტოლება და ააგეთ შესაბამისი წრფე, რომელიც გადის $A(1;6)$ წერტილზე და ორდინატთა ღერძს ჩამოკვეთს $b=3$ სიგრძის ტოლ მონაკვეთს.

15. ჩაწერეთ წრფეთა განტოლებები დახრის კოეფიციენტით

ა) $3x+4y-7=0$;

ბ) $x-2y+11=0$;

გ) $-6x-3y+17=0$;

დ) $x-y-2=0$.

16. ააგეთ შემდეგი წრფეები

ა) $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$

ბ) $y=-3x+7$

გ) $y=2x$

დ) $\frac{x}{-3}-\frac{y}{7}=1$

17. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $3x+5y-15=0$ წრფითა და საკოორდინატო ღერძებით.

18. აჩვენეთ, რომ $5x-6y+4=0$ და $20x-24y-13=0$ წრფეები პარალელურია.

19. იპოვეთ m-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(m+1)x+5y=3$ და $(3-m)x+10y=4$ წრფეები პარალელურია.

20. იპოვეთ $2x-3y+4=0$ და $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

21. იპოვეთ $(-2;3)$ და $(1;5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის $y=-2x+7$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

22. მოცემულია წრფის განტოლება: $ax+by=10$. ააგეთ გრაფიკები ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში ჩამოთვლილი შემთხვევებისთვის:

ა) $a=2$, $b=5$;

ბ) $a=1$, $b=1$;

გ) $a=0$, $b=3$;

დ) $a=-2$, $b=0$;

23. იპოვეთ მანძილი $A(2,-5)$ წერტილიდან $x-3y+5=0$ წრფემდე.

24. იპოვეთ მანძილი $B(-3,-2)$ წერტილიდან $y=-6x-7$ წრფემდე.

25. იპოვეთ კუთხე $\sqrt{3}x-y-5=0$ და $\sqrt{3}x+y=1$ წრფეებს შორის.

26. საქონლის საცალო ფასის 200 ლარიდან 170 ლარამდე შემცირების შემდეგ, ერთი თვის განმავლობაში 1100 ერთეულის ნაცვლად 1400 ერთეული გაიყიდა. იპოვეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი.

27. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია და ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ ცნობილია, რომ როცა პროდუქციის ერთეულის ფასი არის 20 ლარი, მაშინ მოთხოვნაა 30 და როცა ფასია 10 ლარი, მაშინ მოთხოვნა 35 ერთეულის ტოლია. ცნობილია, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.

28. როცა ნაყინის ფასი 0.5 ლარია, ელენე თვეში 12 ნაყინს ყიდულობს, ხოლო თუ ფასი 1 ლარი გახდა, მაშინ თვეში 10 ნაყინს მიირთმევს.

    ა) შეადგინეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი და ააგეთ სათანადო გრაფიკი;

    ბ) დაადგინეთ, რამდენ ნაყინს მიირთმევს ელენე, თუ ნაყინი უფასო იქნება. გაიგეთ, რა უნდა გახდეს ნაყინის ფასი, რომ ელენემ შეწყვიტოს ნაყინის შეძენა.

29. ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$p = -4Q + 100$$

    ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 15?

    ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როცა ფასია 20?

    გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ორი ერთეულით შემცირებისას?

30. ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$p = -3Q + 90$$

    ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 20?

    ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როცა ფასია 60?

    გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ოთხი ერთეულით შემცირებისას?

    დ) როგორ იცვლება მოთხოვნა ფასის სამი ერთეულით გაზრდისას?

31. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$p = -5Q + 350$$

    ა) რა საზღვრებში იცვლება მოთხოვნა?

    ბ) რა საზღვრებში იცვლება ფასი?

    გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

32. მიმწოდებელს ბაზარზე საქონელი გასაყიდად შეაქვს იმ მომენტიდან, როდესაც საქონლის ერთეულის ფასი 25 ლარს გადააჭარბებს. როცა საქონლის საცალო ფასი 30 ლარი იყო, გაიყიდა 360 ერთეული. შეადგინეთ მიწოდების წრფივი მოდელი და ააგეთ შესაბამისი ნახაზი.

33. ჩაწერეთ მიწოდების ფუნქცია და ააგეთ შესაბამისი მიწოდების წირი, თუ ცნობილია, რომ როცა ფასი არის 400 ლარი, მაშინ ფირმა გეგმავს პროდუქციის 100 ერთეულის შეტანას ბაზარზე, ხოლო როცა ფასი არის 640 ლარი, მაშინ ფირმა შეიტანს ბაზარზე პროდუქციის 180 ერთეულს. იგულისხმება, რომ მიწოდების ფუნქცია წრფივია.

34. როცა ბაზარზე ფილა შოკოლადის ფასი 1.5 ლარია, "ტკბილ ქვეყანას"გასაყიდად თვეში გააქვს 20000 ფილა შოკოლადი,ხოლო თუ ფასი 2.5 ლარია-40000 ფილა.

ა) ააგეთ მიწოდების წრფივი მოდელი და სათანადო გრაფიკი;

ბ) გაიგეთ, შოკოლადის რა ფასზე ნაკლების შემთხვევაში არ გაიტანს "ტკბილი ქვეყანა"ბაზარზე შოკოლადს გასაყიდად.

35. ააგეთ მიწოდების წირი, თუ მიწოდების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$p = 4Q + 10$$

ა) რას უდრის ფასი, თუ მიწოდებაა 12?

ბ) რას უდრის მიწოდება, როცა ფასია 70?

გ) როგორ იცვლება მიწოდება ფასის 2 ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში?

36. მიწოდების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით

$$p = 0.5Q + 30$$

ააგეთ შესაბამისი მიწოდების წირი.

ა) რა საზღვრებში იცვლება მიწოდება?

ბ) რა საზღვრებში იცვლება ფასი?

გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

37. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შემდეგი სახით:

ა) $p = -3Q + 60$, $p = 2Q + 10$;
ბ) $p = -6Q + 100$, $p = 0.5Q + 22$;
გ) $p = -4Q + 80$, $p = 0.5Q + 17$;
დ) $p = -3Q + 100$, $p = 0.5Q + 30$.

38. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = -3Q + 58$, მიწოდებისა კი $p = 4Q + 2$. იპოვეთ საბაზრო წონასწორობის წერტილი და წონასწორული საბაზრო ფასი. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები.

39. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები შესაბამისად მოცემულია შემდეგი ტოლობებით: $p = -2Q + 50$ და $p = 0.5Q + 25$.

ა) განსაზღვრეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე;

ბ) მთავრობამ გადაწყვიტა დააწესოს ფიქსირებული გადასახადი 5 ლარის ოდენობით პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. გამოიკვლიეთ ამ ღონისძიების გავლენა ბაზრის წონასწორობაზე(იგულისხმება, რომ მოცემულ პროდუქციაზე მოთხოვნა უცვლელია).

40. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციებია, შესაბამისად, $p = -4Q + 120$ და $p = \frac{1}{3}Q + 29$.

ა) გამოთვალეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე;

ბ) გამოთვალეთ ახალი წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქტის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე მთავრობამ დააწესა გადასახადი 13 ლარის ოდენობით (იგულისხმება, რომ მოცემულ პროდუქციაზე მოთხოვნა უცვლელია) .

41. იპოვეთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების წონასწორობითი დონე, თუ მოხმარების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$C = 0.8Y + 25,$$

ხოლო დაგეგმილი ინვესტიციაა $I = 17$ ერთეული.

42. წარმოების დანახარჯები გარკვეული საქონლის 200 ერთეულის საწარმოებლად შეადგენს 500 ლარს, ხოლო 600 ერთეულის საწარმოებლად-900 ლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯები საქონლის 380 ერთეულის საწარმოებლად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯების ფუნქცია წრფივია.

43. ვთქვათ, ერთი და იმავე ტვირთის გადატანა მოცემული ქალაქიდან 40 კილომეტრ მანძილზე ღირს 70 ლარი, ხოლო 70 კილომეტრ მანძილზე 100 ლარი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა x კმ მანძილზე მოცემული ქალაქიდან, თუ ცნობილია,რომ დამოკიდებულება მანძილსა და ტვირთის გადატანის ხარჯებს შორის წრფივია.

44. ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე ისეთია, რომ მას შეუძლია საათში აწარმოოს 300 კგ ძეხვი, ან 500 კგ სოსისი. ქარხანას შეუძლია ერთდროულად აწარმოოს ძეხვიც და სოსისიც. შეადგინეთ განტოლება, რომელიც დაახასიათებს ქარხნის საწარმოო სიმძლავრეს, თუ დამოკიდებულება წარმოებული ძეხვისა და სოსისის რაოდენობებს შორის წრფივია.

45. ვთქვათ, რაიმე წარმოებას აქვს 300 ტონა ნედლეული, რომელიც უნდა გაიხარჯოს 20 დღის განმავლობაში. იპოვეთ კავშირი დასახარჯი ნედლეულისა და განვლილი დღეების რაოდენობას შორის, თუ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

46. როგორც ცნობილია, ტემპერატურა შეიძლება გაიზომოს ცელსიუსისა და ფარენჰეიტის სკალით. $0°C$ ტოლია $32°F$-ის, ხოლო $100°C$ ტოლია $212°F$-ის. იპოვეთ დამოკიდებულება ამ ორი სკალით გაზომილი ტემპერატურის მნიშვნელობებს შორის, თუ ცნობილია , რომ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

    ა) რამდენი ცელსიუსია $65°F$?

    ბ) რამდენი ფარენჰეიტია $70°C$?

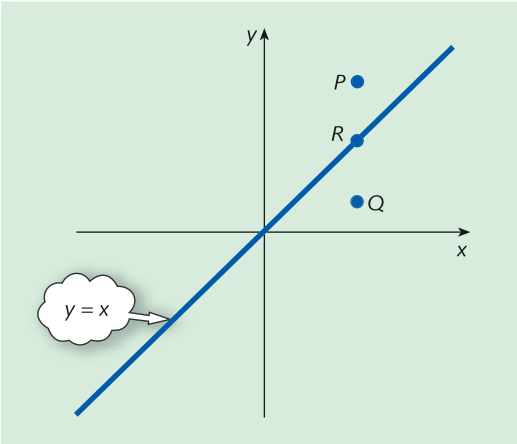
ლექცია 5

წრფივი პროგრამირების ელემენტები და მისი გამოყენება ეკონომიკაში

5.1 წრფივ ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

წრფივი პროგრამირების ამოცანების განხილვამდე გავეცნოთ ორი ცვლადის შემცველი წრფივი უტოლობის გეომეტრიული (გრაფიკული) ინტერპრეტაციის საკითხს. როგორც ცნობილია, $dx + ey = f$ სახის წრფივი განტოლება გეომეტრიულად წრფეს წარმოადგენს. განვიხილოთ ორცვლადიანი უტოლობების ინტერპრეტაციის საკითხი, როცა ტოლობის ნიშანი იცვლება ჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი ნიშნით: $<$ (ნაკლებია), $\leqslant$ (ნაკლებია ან ტოლი), $>$ (მეტია), $\geqslant$ (მეტია ან ტოლი).

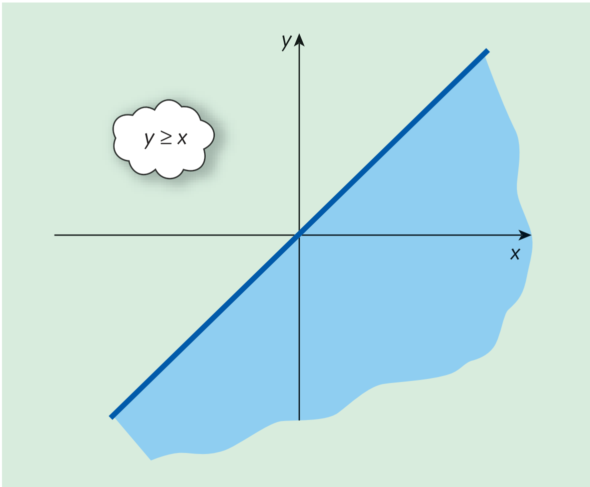
განვიხილოთ $y \geqslant x$ უტოლობა და გავარკვიოთ საკოორდინატო სიბრტყის რომელი წერტილები აკმაყოფილებენ მას. ცხადია, რომ ეს დაკავშირებულია $y = x$ წრფესთან. კერძოდ, თუ P წერტილი ამ წრფის ზემოთაა, y კოორდინატი მეტია x-ზე, ანუ $y > x$. თუ Q წერტილი წრფის ქვემოთაა, მაშინ y ნაკლებია x-ზე, ანუ $y < x$, ხოლო თუ R წერტილი ამ წრფეზეა, მაშინ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y = x$ ტოლობას (სურათი 5.1).



სურ 5.1

აქედან ჩანს, რომ $y \geqslant x$ უტოლობა სრულდება ყველა ისეთი წერტილისთვის, რომელიც ძევს $y = x$ წრფეზე ან მის ზემოთაა. გრაფიკული გამოსახვისთვის ჩვენ გავამუქებთ სიბრტყის იმ ნაწილს (ნახევარსიბრტყეს), რომლისთვისაც უტოლობა მცდარია (სურათი 5.2). ეს შეიძლება უცნაურად მოგვეჩვენოს, მაგრამ ამის მიზეზი ქვემოთ გახდება

ცნობილი.



სურ 5.2

საზოგადოდ, $dx+ey<f$, $dx+ey\leqslant f$, $dx+ey>f$ და $dx+ey\geqslant f$ უტოლობების გეომეტრიული ინტერპრეტაციისთვის ჯერ ვაგებთ $dx+ey=f$ წრფეს. ყოველ უტოლობას შეესაბამება ამ წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე. თუ რომელი, ამის გასარკვევად ავიღოთ $dx+ey=f$ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერი $(a;b)$ წერტილი(მას "სასინჯ"წერტილსაც უწოდებენ). თუ a და b რიცხვები უტოლობას აკმაყოფილებენ, ვირჩევთ წრფის იმ მხარეს, რომელსაც ეს წერტილი ეკუთვნის, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვირჩევთ მეორე მხარეს(ნახევარსიბრტყეს).

მაგალითი 5.1 *გამოსახეთ სიბრტყეზე $2x+y<4$ უტოლობით მოცემული სიმრავლე.*

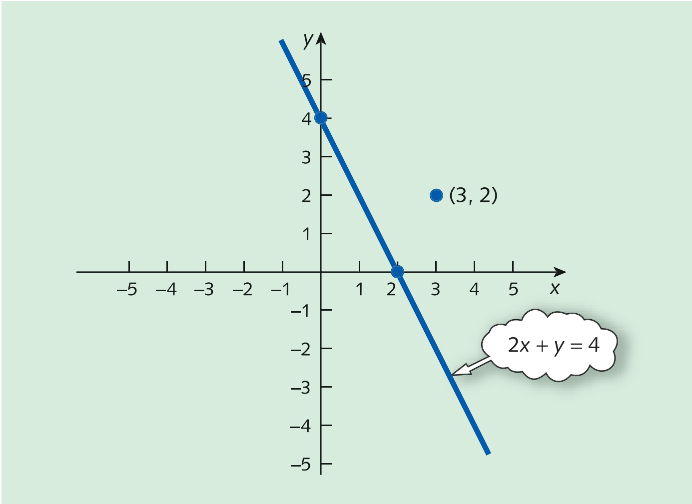
ამოხსნა. ჯერ ავაგოთ $2x+y=4$ წრფე. თუ $x=0$, მაშინ $y=4$, თუ $y=0$, მაშინ $x=2$. შესაბამისი წრფე ნაჩვენებია 5.3 სურათზე. "სასინჯ"წერტილად ავიღოთ წერტილი $(3,2)$, ჩავსვათ $2x+y$ გამოსახულებაში, მივიღებთ $2\cdot3+2=8$, რაც მეტია 4-ზე. ე.ი. წერტილი არ აკმაყოფილებს უტოლობას, ამიტომ ჩვენთვის საინტერესო სიმრავლე განთავსებულია წრფის ქვემოთ (სურათი 5.4). წრფის წერტილები ამ სიმრავლეს არ ეკუთვნიან, ამიტომ ამ დროს წყვეტილ წრფეს გამოვიყენებთ.

განვიხილოთ ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საკითხი. ამ დროს ვეძებთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ ამ სისტემაში შემავალ თითოეულ უტოლობას. ანუ, ვეძებთ თითოეული უტოლობით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთას და მას **დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს(დასაშვებ არეს) ვუწოდებთ.**

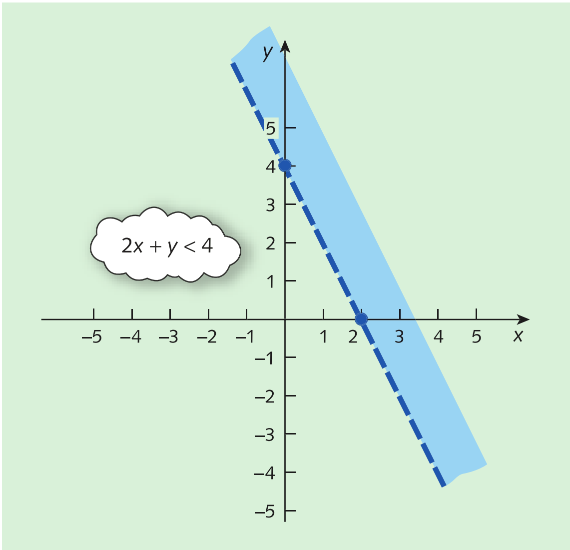
მაგალითი 5.2 *ააგეთ*

$$x+2y\leqslant 12,$$

$$-x+y\leqslant 3,$$



სურ 5.3



სურ 5.4

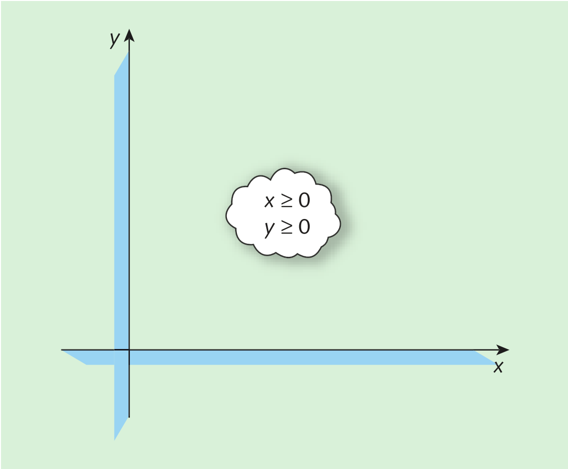
$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

უტოლობებით მოცემული სიმრავლე.

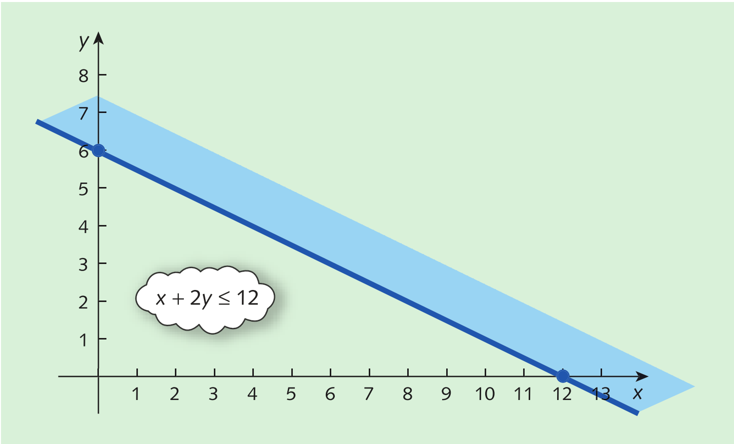
ამოხსნა. ბოლო ორი უტოლობა ცვლადების არაუარყოფითობას მიუთითებს, რაც ნიშნავს, რომ ვიხილავთ საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის წერტილებს (სურათი 5.5).

$x + 2y \leqslant 12$ უტოლობისთვის ვაგებთ შესაბამის $x + 2y = 12$ წრფეს, სასინჯ წერტილად ავიღოთ წერტილი $(0, 0)$. უტოლობაში ჩასმით ვრწმუნდებით, რომ ეს წერტილი უტოლობას აკმაყოფილებს, ამიტომ ვამუქებთ წრფის ზედა ნახევარსიბრტყეს, როგორც ეს სურათ 5.6-ზეა ნაჩვენები.

შემდეგ ვაგებთ $-x + y = 3$ წრფეს, ისევ ვსვამთ უტოლობაში $(0, 0)$ წერტილს, რომელიც ასევე აკმაყოფილებს უტოლობას. საბოლოოდ ვღებულობთ სურათს, რომელიც სურათ 5.7-ზეა გამოსახული. ყველა იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ოთხივე



სურ 5.5



სურ 5.6

უტოლობას აკმაყოფილებს, წარმოადგენს ოთხკუთხედს და მოთავსებულია გამუქებული არეების "შუაში".

ამით აიხსნება ის შეთანხმება, რომელიც ზემოთ მივიღეთ და არ გავამუქეთ ჩვენთვის საინტერესო ნახევარსიბრტყე. ამ დროს ჩვენ უნდა ამოგვერჩია "ძლიერად"გამუქებული სიბრტყის ნაწილი, რაც არც ისე მარტივია.

5.2 წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი.

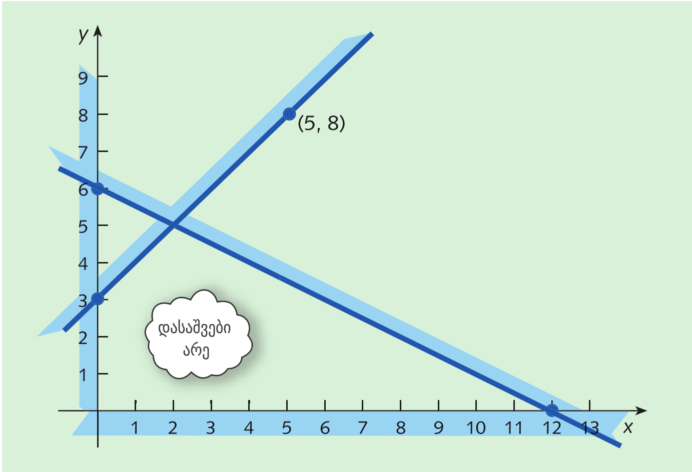
რას წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანა და როგორ შეიძლება მისი ამოხსნა გრაფიკულად, გავარკვიოთ კონკრეტულ მაგალითზე დაყრდნობით.

მაგალითი 5.3 *იპოვეთ* $-2x+y$ *გამოსახულების მინიმუმი*

$x+2y\leqslant 12$,

$-x+y\leqslant 3$,

$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ *შეზღუდვების პირობებში.*



სურ 5.7

ამოხსნა. ეს ამოცანა ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$-2x + y \to \min$

$x + 2y \leqslant 12,$

$-x + y \leqslant 3,$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

საზოგადოდ, წრფივი პროგრამირების ამოცანა ითვლება მოცემულად, თუ გვაქვს: 1. ცვლადები-ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს ორი ცვლადი x და y, 2. $ax + by$ სახის გამოსახულება, რომლის მაქსიმუმი ან მინიმუმი გვაინტერესებს. მას **მიზნის ფუნქცია** ეწოდება. ჩვენს მაგალითში $a = -2$, $b = 1$. 3. უტოლობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ცვლადები-ამ უტოლობებს **შეზღუდვებს** უწოდებენ.

ხშირად, მაგრამ არა ყოველთვის, შეზღუდვებში ფიგურირებს ორი უტოლობა $x \geqslant 0$ და $y \geqslant 0$, რომლებსაც **ცვლადების არაუარყოფითობის პირობას** უწოდებენ.

ამ მაგალითში სულ ოთხი შეზღუდვაა(არაუარყოფითობის პირობის ჩათვლით). როგორც ვნახეთ, გეომეტრიულად (x, y) წერტილები, რომლებიც შეზღუდვებს აკმაყოფილებენ, ქმნიან დასაშვებ სიმრავლეს. ფაქტიურად ეს ნაჩვენებია სურათ 5.7-ზე. ჩვენი ამოცანაა, ვიპოვოთ დასაშვები სიმრავლის ის წერტილი, რომელიც მოახდენს მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას. ამ პრობლემის გადაწყვეტის ერთ-ერთი გზა შეიძლება იყოს დასაშვები სიმრავლის წერტილების გადარჩევა. ავიღოთ, მაგალითად, წერტილი $(1, 1)$ და ჩავსვათ მიზნის ფუნქციაში $x = 1$ და $y = 1$ მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$-2 \cdot 1 + 1 = -1$

$(3.4, 2.1)$ წერტილის ჩასმა კი გვაძლევს:

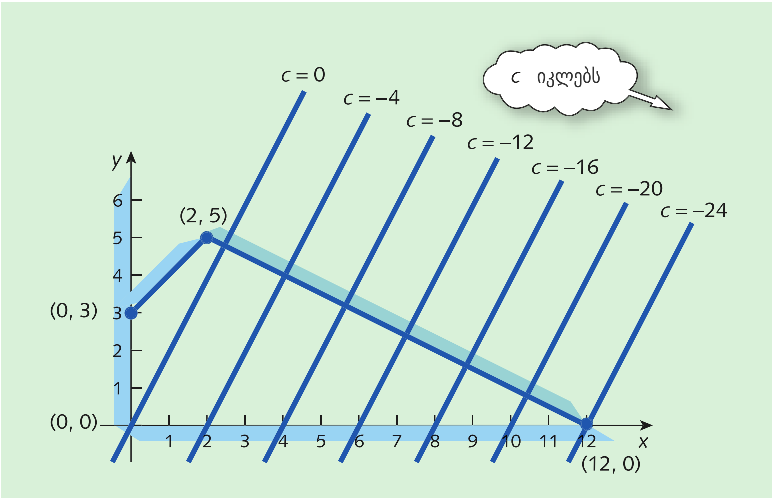
$2 \cdot 3.4 + 2.1 = -4.7$, რაც უკეთესი შედეგია.

მაგრამ ამ მეთოდის "ნაკლი"ისაა, რომ დასაშვებ სიმრავლეში წერტილთა უსასრულო რაოდენობაა და ყველას გადარჩევა შეუძლებელია.

შედარებით სისტემური მიდგომა ეყრდნობა $-2x + y = c$ წრფეების აგებას c-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. თან ამ წრფეებს უნდა ჰქონდეთ ერთი საერთო წერტილი მაინც დასაშვებ სიმრავლესთან. ადვილი მისახვედრია, რომ c სწორედ ის რიცხვია, რომლის მინიმიზაციაც გვაინტერესებს. $y = 2x + c$ წრფეს გააჩნია 2-ის ტოლი დახრა და c-ს ტოლი y-გადაკვეთა. ყველა ეს წრფე ერთმანეთის პარალელურია, x ღერძს კვეთენ $(-\frac{C}{2}; 0)$ წერტილში. სურათი 5.8-დან ჩანს, რომ თუ c მიიღებს მნიშვნელობებს 0-დან -24-მდე, წრფეს ყოველთვის ექნება საერთო წერტილი დასაშვებ არესთან და თუ c იქნება -24 -ზე ნაკლები, მას დასაშვებ არესთან საერთო წერტილი არ ექნება. ამიტომ c-ს მინიმალური მნიშვნელობაა -24. ამ დროს $-2x + y = c$ წრფეს დასაშვებ არესთან

ექნება ერთი საერთო წერტილი $(12;0)$- სწორედ ეს წერტილი წარმოადგენს ამოცანის ამონახსნს. დასაშვები არიდან აღებული ყველა სხვა წერტილისთვის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა -24-ზე მეტი იქნება. ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა დასაშვები არის ერთ-ერთ წვეროში მიიღწევა. ეს შემთხვევით არ მომხდარა, სამართლიანია შემდეგი ფაქტი:

თუ წრფივი პროგრამირების ამოცანაში არსებობს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ არსებობს ოპტიმალური წვეროც.



სურ 5.8

ამ ფაქტზე დაყრდნობით გადარჩევის მეთოდი გარკვეული აზრით ეფექტური ხდება, რადგან საკმარისია ოპტიმალური წერტილი ვეძიოთ დასაშვები არის წვეროებში, რაც თავის მხრივ წერტილთა სასრული რაოდენობის გადარჩევას უკავშირდება.

ჩამოვაყალიბოთ განხილული მეთოდი ბიჯების სახით.

ბიჯი 1. ავგეთ დასაშვები სიმრავლე.

ბიჯი 2. იპოვეთ დასაშვები სიმრავლის წვეროების წერტილები და დაადგინეთ მათი კოორდინატები.

ბიჯი 3. გამოთვალეთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები წვეროებში და ამოარჩიეთ ის წერტილი, რომლისთვისაც მიზნის ფუნქცია იღებს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას.

თუ დავუბრუნდებით განხილულ მაგალითს, მივიღებთ შემდეგ სქემას:

ბიჯი 1. დასაშვები არე ნაჩვენები იყო **სურ. 5.7-ზე**.

ბიჯი 2. გვაქვს ოთხი წვერო $(0,0)$, $(0,3)$, $(2,5)$, $(12,0)$.

ბიჯი 3.

წვერო	მიზნის ფუნქცია
(0,0)	$-2\cdot 0+0=0$
(0,3)	$-2\cdot 0+3=3$
(2,5)	$-2\cdot 2+5=1$
(12,0)	$-2\cdot 12+0=-24$

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ მინიმუმი მიიღწევა $(12,0)$ წერტილში და ამ დროს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა -24-ის ტოლია. თუ იგივე ამოცანაში მაქსიმუმიც გვაინტერესებს, ბოლო ცხრილიდან ვასკვნით, რომ მაქსიმუმი $(0,3)$ წერტილში მიიღწევა და ამ დროს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა 3-ის ტოლია.

თუ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე არაცარიელია, წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნისას შიძლება შეგვხვდეს შემდეგი შემთხვევები:

1. მიზნის ფუნქცია ოპტიმალურ მნიშვნელობას ერთ წერტილში იღებს.

2. ამოცანას გააჩნია მრავალი ოპტიმალური ამონახსნი.

3. ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია.

პირველი შემთხვევის შესაბამისი მაგალითი უკვე განვიხილეთ. ახლა განვიხილოთ მე-2 და მე-3 შემთხვევების შესაბამისი მაგალითები.

მეორე შემთხვევის შესაბამის ქვემოთ მოყვანილ მაგალითში პირდაპირი მსჯელობითაც ჩანს, რომ ამოცანას გააჩნია უამრავი ოპტიმალური ამონახსნი, მაგრამ საილუსტრაციოდ ჩვენ მას მოყვანილი მეთოდით ამოვხსნით.

მაგალითი 5.4 *ამოხსენით წრფივი პროგრამირების ამოცანა*

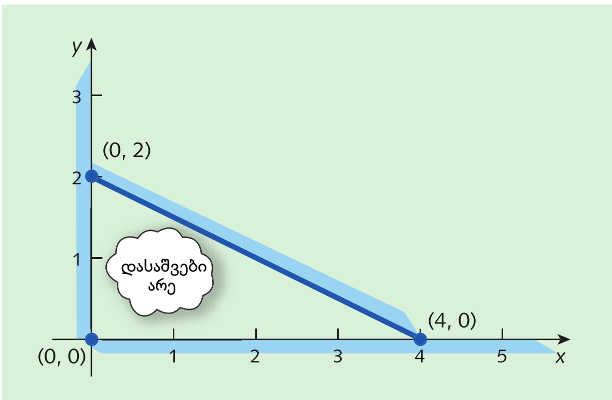
$x + 2y \to \max$

$2x + 4y \leqslant 8,$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

ამოხსნა.

ბიჯი 1. დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს აქვს სახე (სურათი 5.9).



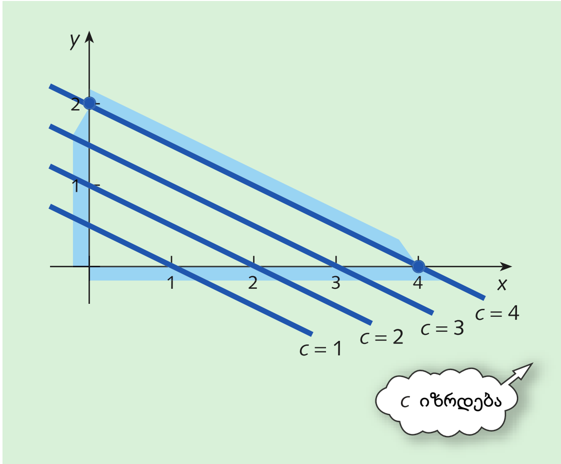
სურ 5.9

ბიჯი 2. დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეს აქვს სამი წვერო $(0;0)$, $(0;2)$, $(4;0)$.

ბიჯი 3.

წვერო	მიზნის ფუნქცია
(0,0)	$0 + 2 \cdot 0 = 0$
(0,2)	$0 + 2 \cdot 2 = 4$
(4,0)	$4 + 2 \cdot 0 = 4$

ჩანს, რომ მაქსიმალური მნიშვნელობაა 4, რომელიც ორ $(0,2)$ და $(4,0)$ წვეროზე მიიღწევა, ანუ ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი არ აქვს. სურ. 5.10-ზე დაყრდნობით ეს მარტივად აიხსნება. $x + 2y = c$ წრფის გადაადგილებისას მარცხნიდან მარჯვნივ c-ს მნიშვნელობები იცვლება 0-დან 4-მდე და $x + 2y = 4$ წრფეს დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლესთან საერთო აქვს როგორც ორი წვეროს წერტილი $(0,2)$ და $(4,0)$, ასევე უამრავი წერტილი, რომლებიც ამ წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთზე მდებარეობენ.



სურ 5.10

ამ დროს ვამბობთ, რომ წრფივი პროგრამირების ამოცანას აქვს მრავალი ოპტიმალური ამონახსნი.

მაგალითი 5.5 *ამოხსენით წრფივი პროგრამირების ამოცანა*

$3x + 2y \to \max$

$x + 4y \geqslant 8,$

$x + y \geqslant 5,$

$2x + y \geqslant 6,$

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

ამოხსნა.

ბიჯი 1. როგორც წესი, ცვლადების არაუარყოფითობა გვიჩვენებს, რომ ვიხილავთ საკოორდინატო სიბრტყის I მეოთხედს.

$x + 4y = 8$ წრფე გადის $(0, 2)$ და $(8, 0)$ წერტილებზე,

$x + y = 5$ წრფე გადის $(0, 5)$ და $(5, 0)$ წერტილებზე,

$2x + y = 6$ წრფე კი გადის $(0, 6)$ და $(3, 0)$ წერტილებზე.

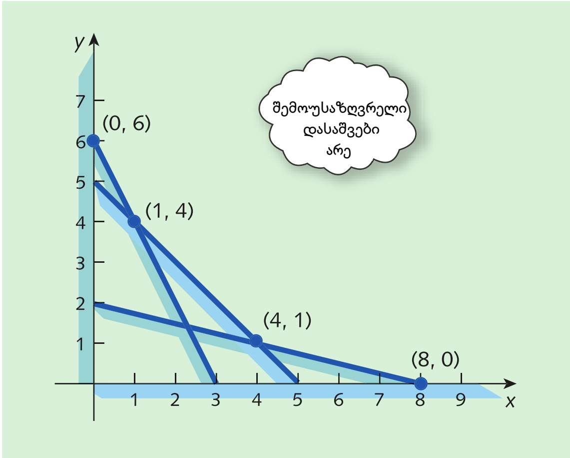
"სასინჯი"$(0, 0)$ წერტილი არ აკმაყოფილებს არც ერთ უტოლობას, ამიტომ ჩვენ გვაინტერესებს ყველა ამ წრფის ზედა ნახევარსიბრტყეები (სურათი 5.11)

ბიჯი 2. დასაშვებ არეს გააჩნია ოთხი წვერო $(0, 6)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ და $(8, 0)$.

ბიჯი 3.

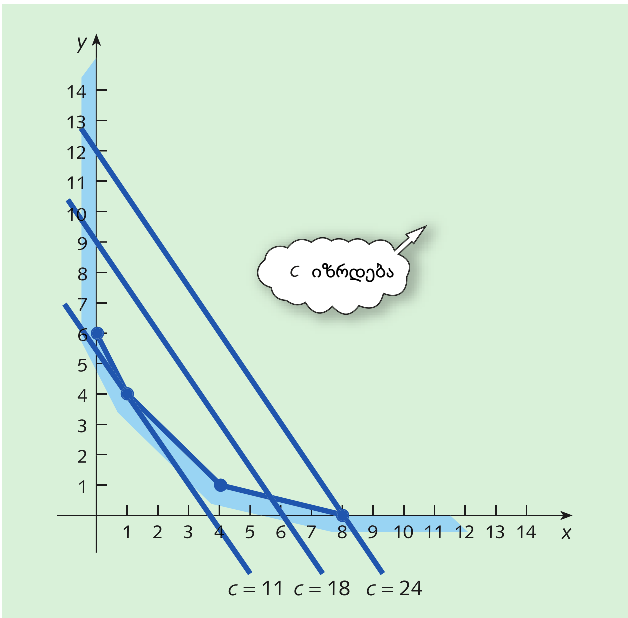
წვერო	მიზნის ფუნქცია
(0,6)	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$
(1,4)	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$
(4,1)	$3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$
(8,0)	$3 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 24$

ცხრილიდან ჩანს, რომ მიზნის ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები 11-ისა და 24-ის ტოლია, რომლებიც შესაბამისად $(1, 4)$ და $(8, 0)$ წერტილებში მიიღწევა. თუმცა ჩვენ გარკვეული აზრით არასტანდარტული სიტუაცია მივიღეთ, რადგან დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე ყველა მხრიდან შემოსაზღვრული არ არის. ეს სიმრავლე



სურ 5.11

ვერ მოთავსდება ვერც ერთ სასრულ რადიუსიან წრეში. ამ დროს ვამბობთ, რომ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე შემოუსაზღვრელია და ამ სიმრავლის წვეროების განხილვას აზრი ეკარგება. თუ განვიხილავთ $3x + 2y = c$ სახის წრფეებს (სურ. 5.12) როცა $c = 11$, წრფეს დასაშვებ სიმრავლესთან აქვს ერთი საერთო წერტილი $(1, 4)$ და როცა c იზრდება, $3x + 2y = c$ წრფეებს ყოველთვის ექნებათ დასაშვებ სიმრავლესთან საერთო წერტილები, საიდანაც ვასკვნით, რომ ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია, რადგან $3x + 2y$ გამოსახულებამ შეიძლება მიიღოს რაგინდ დიდი მნიშვნელობები.



სურ 5.12

თუ განვიხილავთ მინიმიზაციის ამოცანას, მაშინ ამონახსნი იქნება $(1, 4)$ წვერო.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ დასაშვები სიმრავლე შემოუსაზღვრელია, მაშინ წრფივი პროგრამირების ამოცანას ამონახსნი შეიძლება არ ჰქონდეს. ხოლო როცა ამონახსნი არსებობს, მაშინ ის შეიძლება ვიპოვოთ წვეროების გადარჩევის გზით. პრაქტიკული ხასიათის ამოცანებში, რომლებიც რეალური ეკონომიკური სიტუაციების ამსახველია, ოპტიმალური ამონახსნი ყოველთვის არსებობს.

5.3 წრფივი პროგრამირების გამოყენებები ეკონომიკურ ამოცანებში.

ახლა კი განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების გამოყენების შესაძლებლობა გარკვეული ეკონომიკური ამოცანების ამოსახსნელად.

მაგალითი 5.6 *მცირე მეწარმე აწარმოებს ორი A და B სახეობის პროდუქციას, რომლებზეც მოთხოვნა საწარმოო სიმძლავრეს აღემატება. ერთეული პროდუქციის გასაყიდი ფასი A და B სახეობისათვის შესაბამისად 7 და 4 ლარია, საწარმოო დანახარჯი კი - 6 და 3 ლარი. სატრანსპორტო ხარჯები თითოეული სახეობის პროდუქციის ერთეულისთვის შეადგენს 20 და 30 თეთრს. საბანკო კრედიტის პირობები აიძულებს მეწარმეს, ყოველკვირეული საწარმოო დანახარჯები 2700 ლარით შემოფარგლოს და სატრანსპორტო ხარჯებისთვის გამოიყენოს არაუმეტეს 120 ლარი. როგორ უნდა დაგეგმოს მეწარმემ წარმოება მაქსიმალური მოგების მისაღებად?*

ამოხსნა. როგორც ცნობილია, წრფივი პროგრამირების ამოცანების სამი შემადგენელი ნაწილია ცვლადები, მიზნის ფუნქცია და შეზღუდვები. ბუნებრივია, x და y-ით აღვნიშნოთ შესაბამისად A და B პროდუქციის წარმოების მოცულობა და ესენი იქნებიან ამოცანის ცვლადები. სიტყვიერი ფორმულირების ბოლო ნაწილში აღნიშნულია, რომ მეწარმემ ისე უნდა შეარჩიოს A და B პროდუქციის მოცულობა, რომ გარანტირებული ჰქონდეს მაქსიმალური შემოსავალი. ამიტომ, უნდა ავაგოთ ფორმულა, რომელიც გამოსახავს შემოსავალს x-ისა და y-ის ტერმინებში. რადგან A პროდუქციის ერთეულის წარმოების დანახარჯი 6 ლარია, ხოლო სატრანსპორტო ხარჯი 20 თეთრი, სულ დანახარჯი 6.2 ლარია, გასაყიდი ფასი კი 7 ლარია. ამიტომ მოგება ერთეული პროდუქციისათვის შეადგენს 0.8 ლარს. თუ ვაწარმოებთ ამ ტიპის პროდუქციას x რაოდენობით, მოგება იქნება $0.8x$ ლარი. ვინაიდან მოთხოვნა აღემატება წარმოების შესაძლებლობებს, პროდუქციის რეალიზება გარანტირებულია. ანალოგიური მსჯელობით ვრწმუნდებით, რომ B სახეობის y რაოდენობის პროდუქციისათვის მოგება $0.7y$ ლარი იქნება, ჯამში საერთო მოგება შეადგენს

$$0.8x + 0.7y,$$

რაც წარმოადგენს მიზნის ფუნქციას, რომლის მაქსიმიზაციაც გვაინტერესებს.

შემდეგი საკითხი, რომელიც უნდა გავითვალისწინოთ, უკავშირდება წარმოების შეზღუდვებს. კერძოდ, ყოველკვირეული დანახარჯი წარმოებაზე არ უნდა აღემატებოდეს 2700 ლარს. წარმოების დანახარჯი A სახეობის ერთეულ პროდუქციაზე 6 ლარია, B სახეობისაზე კი 3 ლარი. ცხადია, რომ საერთო დანახარჯი წარმოებაზე იქნება $6x + 3y$ ლარი, რაც არ უნდა აღემატებოდეს 2700 ლარს, საბოლოოდ ვღებულობთ პირველ შეზღუდვას

$$6x + 3y \leq 2700.$$

პროდუქციის გადაზიდვის საერთო დანახარჯები იქნება $0.2x + 0.3y$ ლარი. შედეგად ვღებულობთ მეორე შეზღუდვას

$$0.2x + 0.3y \leq 120.$$

ერთი შეხედვით, შეზღუდვების ნაწილში ყველა მოთხოვნა, რაც ამოცანის სიტყვიერ ფორმულირებაში ფიგურირებდა, გათვალისწინებულია, თუმცა არ უნდა დავივიწყოთ,

რომ უარყოფითი რაოდენობის პროდუქცია არ იწარმოება და გვექნება ორი არსებითი შეზღუდვა $x \geq 0$ და $y \geq 0$, რომლებიც სიტყვიერ ფორმულირებაში ცხადად არ ფიგურირებენ.

საბოლოოდ მივიღეთ წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანა:

$$0.8x + 0.7y \to \max,$$

$$6x + 3y \leq 2700,$$

$$0.2x + 0.3y \leq 120,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

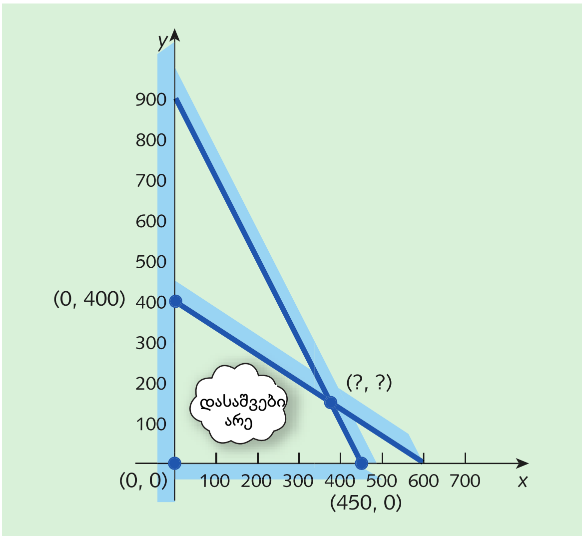
ამოვხსნათ მიღებული ამოცანა წინა ლექციაში განხილული მეთოდით.

ბიჯი 1.

ცვლადების არაუარყოფითობის გამო ვიხილავთ მხოლოდ I მეოთხედის წერტილებს.

$6x + 3y = 2700$ წრფე გადის (0,900) და (450,0) წერტილებზე, $0.2x + 0.3y = 120$ კი – (0,400) და (600,0) წერტილებზე.

თუ "სასინჯ"წერტილად გამოვიყენებთ კოორდინატთა სათავეს, დავრწმუნდებით, რომ ჩვენთვის საინტერესო სიმრავლე ამ წრფეების ქვემოთ მდებარეობს (სურათი 5.13).



სურ 5.13: დასაშვები არე

ბიჯი 2.

დასაშვებ სიმრავლეს აქვს ოთხი წვერო, სამი მათგანის კოორდინატები ცნობილია: (0,0), (0,400) და (450,0). მეოთხე წერტილის კოორდინატების გასაგებად უნდა ამოვხსნათ

$$\begin{cases} 6x + 3y = 2700, \\ 0.2x + 0.3y = 120, \end{cases}$$

წრფივ განტოლებათა სისტემა. ეს ამონახსნია (375,150) წერტილი.

ბიჯი 3.

წვერო	მიზნის ფუნქცია
(0,0)	0
(0,400)	280
(450,0)	360
(375,150)	405

ცხრილიდან ჩანს, რომ მაქსიმალური შემოსავალი არის 405 ლარი და ის მიიღწევა, როცა ვაწარმოებთ A სახეობის 375 ერთეულ და B სახეობის 150 ერთეულ პროდუქციას.

მაგალითი 5.7 *საკვები პროდუქტების მწარმოებელი იყენებს ორ P_1 და P_2 გადამამუშავებელ დანადგარს, რომლებსაც შეუძლიათ კვირაში 7 დღე იმუშაონ. საქონლის ხორცის დამუშავების შედეგად მიიღება უმაღლესი, საშუალო და დაბალი ხარისხის ხორცი. უმაღლესი ხარისხის ხორცს ყასბები ყიდულობენ, საშუალო ხარისხის ხორცი სუპერმარკეტების მზა კერძებში გამოიყენება, ხოლო დაბალი ხარისხის ხორცი – ძაღლის საკვებში. მწარმოებელმა გააფორმა კონტრაქტი 120 კგ უმაღლესი, 80 კგ საშუალო და 240 კგ დაბალი ხარისხის ხორცის მიწოდებაზე ყოველი კვირის განმავლობაში. P_1 დანადგარის გამოყენება ერთი დღის განმავლობაში 4000 ლარი ღირს, P_2-ის კი 3200 ლარი. P_1 დანადგარს შეუძლია ერთ დღეში 60 კგ უმაღლესი, 20 კგ საშუალო და 40 კგ დაბალი ხარისხის ხორცის წარმოება, შესაბამისად P_2 დანადგარს 20 კგ, 20 კგ და 120 კგ. რამდენი დღე უნდა ვამუშაოთ თითოეული დანადგარი კვირის განმავლობაში, რომ კონტრაქტი მინიმალური დანახარჯით შევასრულოთ?*

ამოხსნა. ვთქვათ, P_1 დანადგარი მუშაობს x დღის, P_2-კი y დღის განმავლობაში. მაშინ საერთო დანახარჯი იქნება $4000x + 3200y$ ლარი, რომლის მინიმიზაციაც გვაინტერესებს. გავითვალისწინოთ, რომ P_1 დანადგარს შეუძლია დღეში 60 კგ უმაღლესი ხარისხის, P_2 დანადგარს კი 20 კგ უმაღლესი ხარისხის ხორცის წარმოება. ამიტომ კვირის განმავლობაში ორივე ერთად გამოუშვებს $60x + 20y$ კგ უმაღლესი ხარისხის ხორცს, შედეგად გვაქვს უტოლობა

$$60x + 20y \geq 120.$$

ანალოგიური მსჯელობით დანარჩენი ორი ხარისხის ხორცისათვის გვექნება უტოლობები

$$20x + 20y \geq 80,$$

$$40x + 120y \geq 240.$$

რადგან კვირაში 7 დღეა, x და y ცვლადებმა უნდა დააკმაყოფილონ პირობები:

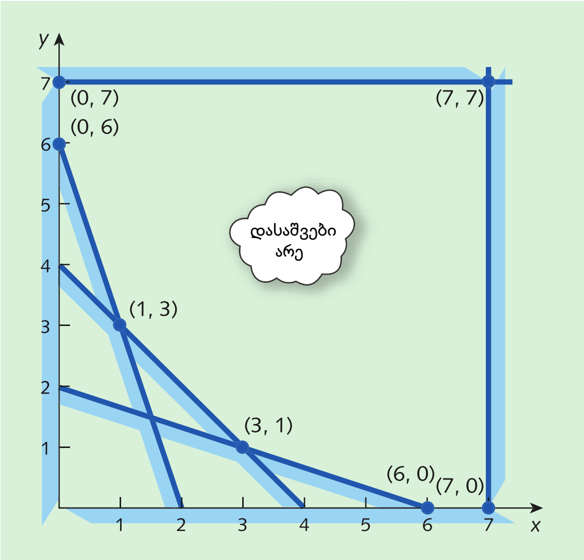
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq 7, \quad y \leq 7.$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$4000x + 3200y \to \min,$$

$$60x + 20y \geq 120,$$

$$20x + 20y \geq 80,$$



სურ 5.14: დასაშვები არე

$$40x + 120y \geq 240,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq 7, \quad y \leq 7.$$

ბიჯი 1. მივაქციოთ ყურადღება იმ ფაქტს, რომ ბოლო ოთხი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ დასაშვები არე შემოსაზღვრულია $x = 0$, $x = 7$, $y = 0$ და $y = 7$ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური წრფეებით. სასინჯი (0,0) წერტილი არ აკმაყოფილებს პირველი სამი უტოლობიდან არცერთს. ამიტომ დასაშვებ სიმრავლეს აქვს სურათ 5.14-ზე მოცემული სახე.

ბიჯი 2.

დასაშვებ არეს აქვს შვიდი წვერო: (7,0), (7,7), (0,7), (1,3), (3,1), (0,6) და (6,0)

ბიჯი 3.

წვერო	მიზნის ფუნქცია
(7,0)	28000
(7,7)	50400
(0,7)	22400
(0,6)	19200
(3,1)	15200
(1,3)	13600
(6,0)	24000

ცხრილიდან ჩანს, რომ მინიმალური დანახარჯი მიიღწევა მაშინ, როცა P_1 დანადგარს გამოვიყენებთ კვირაში 1 დღე, ხოლო P_2 დანადგარს კვირაში 3 დღე.

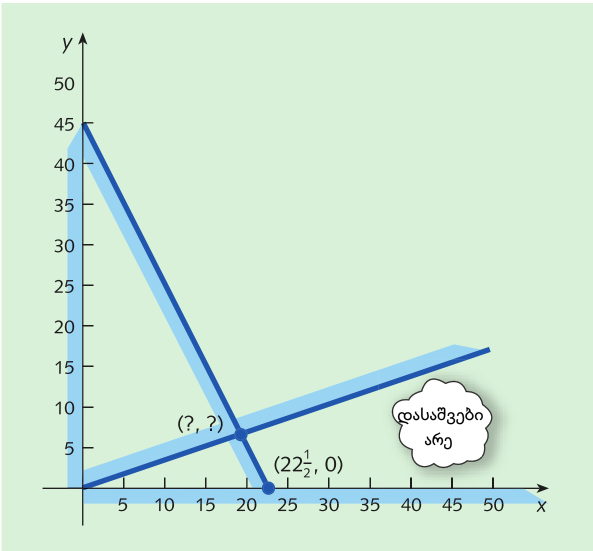
მაგალითი 5.8 *ტურისტულ კომპანიაში ორი კატეგორიის თანამშრომელია: 1. თანამშრომლები, რომლებიც მუშაობენ სრული სამუშაო დღის განმავლობაში, ანუ კვირაში 40 საათი და მათ უხდიან კვირაში 800 ლარს; 2. თანამშრომლები, რომლებიც მუშაობენ არასრული სამუშაო დღის განმავლობაში, კვირაში 20 საათი და მათ უხდიან 320 ლარს.*

კომპანიის პოლიტიკის თანახმად, მეორე კატეგორიის თანამშრომლების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს პირველი კატეგორიის თანამშრომლების რაოდენობის 1/3 ნაწილს. კომპანიის ფუნქციონირებისთვის აუცილებელია კვირაში 900 სამუშაო საათი. თითოეული კატეგორიის რამდენი თანამშრომელი უნდა დაიქირაოს კომპანიამ, რომ გასცეს მინიმალური ჯამური ხელფასი?

ამოხსნა. ვთქვათ, კომპანიამ უნდა დაიქირაოს x რაოდენობის პირველი კატეგორიისა და y რაოდენობის მეორე კატეგორიის თანამშრომელი. მაშინ, მათი ჯამური ხელფასი იქნება $800x + 320y$ ლარი. სამუშაო საათების საერთო რაოდენობა იქნება $40x + 20y$, რაც უნდა იყოს 900 საათზე არანაკლები. ასევე მეორე კატეგორიის თანამშრომლების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს პირველი კატეგორიის თანამშრომლების 1/3 ნაწილს, რაც გვაძლევს $y \leq x/3$ უტოლობას. საბოლოოდ, ვღებულობთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$800x + 320y \to \min,$$

$$40x + 20y \geq 900,$$
$$y \leq x/3,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$



სურ 5.15: დასაშვები არე

ბიჯი 1.

$40x{+}20y = 900$ გადის (0,45) და (45/2,0) წერტილებზე. $y = x/3$ წრფე კოორდინატთა სათავეზე გადის, ამიტომ "სასინჯ"წერტილად ავირჩიოთ, მაგალითად, $x = 30$, $y = 5$ წერტილი. თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს შესაბამის უტოლობაში, მივიღებთ: $5 \leq 30/3$, რაც ჭეშმარიტი უტოლობაა. დასაშვებ სიმრავლეს აქვს სურათ 5.15-ზე მოცემული სახე.

ბიჯი 2. დასაშვებ არეს ორი წვერო აქვს. ერთ-ერთია (45/2,0). მეორე წერტილის საპოვნელად კი უნდა ამოვხსნათ სისტემა

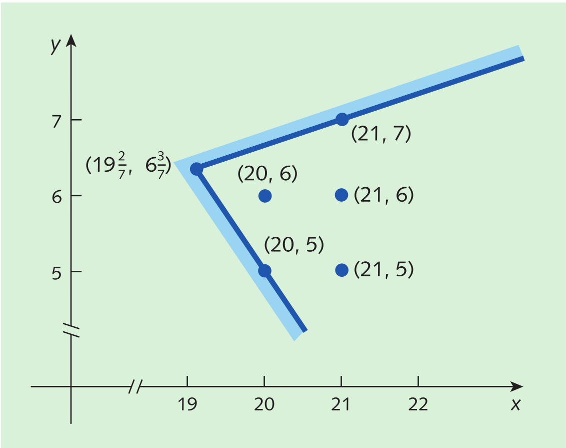
$$\begin{cases} y = x/3, \\ 40x + 20y = 900, \end{cases}$$

რაც გვაძლევს (135/7,45/7) წერტილს.

ბიჯი 3.

წვერო	მიზნის ფუნქცია
(135/7,45/7)	$17485\frac{5}{7}$
(45/2,0)	18000

მინიმუმი მიიღწევა (135/7,45/7) წერტილში და $17485\frac{5}{7}$ ლარის ტოლია. მათემატიკური თვალსაზრისით, ჩვენ დასმული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი მივიღეთ, მაგრამ პრაქტიკულად ამ ამონახსნს ვერ გამოვიყენებთ, რადგან 135/2 თანამშრომლის დაქირავება შეუძლებელია. ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ ისეთი წერტილები, რომლებსაც მთელი კოორდინატები აქვთ. ასეთ ამოცანას **მთელრიცხვა პროგრამირების** ამოცანა ეწოდება. მასში იგულისხმება, რომ x და y ცვლადები მთელ მნიშვნელობებს ღებულობენ, ანუ დასაშვებ არეში უნდა ვიპოვოთ ისეთი მთელ კოორდინატებიანი (x, y) წერტილი, რომელიც მიზნის ფუნქციას მინიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს (იხ. სურათი 5.16). დასაშვებ სიმრავლეში ვიხილავთ ოპტიმალური წერტილის ყველა "მეზობელ"



სურ 5.16: ოპტიმალურ წერტილთან უახლოესი მთელ კოორდინატებიანი წერტილები დასაშვებ არეში

მთელკოორდინატებიან წერტილს და ვრწმუნდებით, რომ

წვერო	მიზნის ფუნქცია
(20,5)	17600
(20,6)	17920
(21,5)	18400
(21,6)	18700

ოპტიმალურია (20,5) წერტილი, რაც ნიშნავს, რომ კომპანიამ უნდა დაიქირაოს 20 თანამშრომელი სრულ განაკვეთზე, 5 კი - არასრულ განაკვეთზე.

ბოლოს შევნიშნავთ, რომ უმეტესობა პრაქტიკული ხასიათის მოდელებში მიღებული წრფივი პროგრამირების ამოცანები შეიცავს ცვლადების საკმარისად დიდ რაოდენობას

და, ცხადია, მათ ამოსახსნელად გეომეტრიულ მეთოდს ვერ გამოვიყენებთ. ძალიან ხშირად ამ შემთხვევაში გამოიყენება ე.წ. სიმპლექს-ალგორითმი. ამ ალგორითმის მუშაობის პრინციპში გარკვევა აუცილებლობას არ წარმოადგენს, რადგან საწყისი ინფორმაციის შესაბამისი ინსტრუქციის მიხედვით მომზადების შემთხვევაში შესაძლებელია, დიდგანზომილებიანი ამოცანების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ, მაგალითად Excell-ის საშუალება Solver-ი, ან სხვა პროგრამული პაკეტი.

5.4 სავარჯიშოები:

1. ორი სახის ტრანსპორტით მგზავრთა გადაყვანის ხარჯები გამოისახება ფუნქციებით:

   ა) $y = 20x + 260$ და $y = 16x + 360$

   ბ) $y = 6x + 100$ და $y = 9x + 40$

   სადაც x მანძილია, ხოლო y დანახარჯები. რომელი სახის ტრანსპორტის გამოყენებაა უფრო ეკონომიური?

2. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ $-x + 3y = 6$ წრფე. გამოიყენეთ $(1, 4)$ სასინჯი წერტილი და მიუთითეთ $-x + 3y \geqslant 6$ უტოლობის შესაბამისი არე.

3. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ უტოლობათა სისტემებით განსაზღვრული არეები

$$\text{ა)} \begin{cases} 6x + 3y \leq 30 \\ 7x + 2y \leq 28 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ბ)} \begin{cases} 2x + 5y \leq 20 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{გ)} \begin{cases} x - 2y \leq 3 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

4. განიხილეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა

   $-x + y \to \max$

   $3x + y \leqslant 12,$

   $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

   ა) ააგეთ დასაშვები არე,

   ბ) იგივე ნახაზზე ააგეთ $c = -4, -2, 0, 1$ და 3 მნიშვნელობებისათვის ხუთი $y = x + c$ სახის წრფე.

   (მითითება:$y = x + c$ სახის წრფეებს აქვთ დახრა 1-ის ტოლი და გადიან $(0, c)$ და $(-c, 0)$ წერტილებზე).

   გ) გამოიყენეთ ბ) პუნქტის პასუხები და ამოხსენით წრფივი პროგრამირების მოცემული ამოცანა.

5. ამოხსენით წრფივი პროგრამირების ამოცანები.

$$\text{ა)} \begin{cases} x - y \to \min \\ 2x + y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ბ)} \begin{cases} 3x + 5y \to \max \\ x + 2y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

6. ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

$$ა)\begin{cases}4x+9y\longrightarrow \max\\ 7x+2y\leqslant 28\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}\quad ბ)\begin{cases}3x+6y\longrightarrow \max\\ x+y\leqslant 5\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}\quad გ)\begin{cases}x+y\longrightarrow \max\\ x-y\leqslant 4\\ x\geqslant 1, y\geqslant 0\end{cases}$$

7. რა შეიძლება ითქვას სავარჯიშო 6-ის გ)-ს ამონახსნის შესახებ, თუ განვიხილავთ მინიმიზაციის ამოცანას? განიხილეთ $x+y=c$ წრფეების ერთობლიობა და პასუხი დაასაბუთეთ.

8. ამოხსენით წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანები

$$ა)\begin{cases}2x+3y\longrightarrow \max\\ 2x+y\leqslant 8\\ x+y\leqslant 6\\ x+2y\leqslant 10\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}\quad ბ)\begin{cases}-8x+4y\longrightarrow \max\\ x-y\leqslant 2\\ 2x-y\geqslant -3\\ x-y\geqslant -4\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}$$

9. ფირმამ გადაწყვიტა გამოუშვას კომპიუტერების ორი ახალი მოდელი: COM1 და COM2. თითოეული ეგზემპლარის წარმოება შესაბამისად 1200 და 1600 ლარი ჯდება. ფირმას მიაჩნია, რომ წარმოება გარკვეულ რისკებთანაა დაკავშირებული და ყოველკვირეული საწარმოო დანახარჯები შემოსაზღვრული აქვს 40000 ლარით. კვალიფიციური მუშახელის დეფიციტის გამო ფირმას კვირაში 30 კომპიუტერზე მეტის გამოშვება არ შეუძლია. თითოეული კომპიუტერის რეალიზაციის მოგება შეადგენს 600 და 700 ლარს, შესაბამისად, COM1 და COM2 მოდელებისთვის. როგორ დაგეგმოს ფირმამ წარმოება მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

10. საგამომცემლო კომპანიამ გადაწყვიტა, თავისი წარმოების ნაწილი დაუთმოს ორი სახელმძღვანელოს გამოშვებას, ესენია "მიკროეკონომიკა"და "მაკროეკონომიკა". ერთი ერთეულის რეალიზაცია იძლევა მოგებას 12 ლარს "მიკროეკონომიკის"და 18 ლარს "მაკროეკონომიკის"შემთხვევაში. "მიკროეკონომიკის"ერთი ეგზემპლარის ბეჭდვას სჭირდება 12 წუთი და აწყობას 18 წუთი, შესაბამისად, "მაკროეკონომიკის"ერთ ეგზემპლარს 15 და 9 წუთი. ბეჭდვისთვის გამოყოფილია 9 საათი და აწყობისთვის $10\frac{1}{2}$ საათი. რამდენი უნდა ვაწარმოოთ თითოეული სახეობის სახელმძღვანელო მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

11. ფერმერმა უნდა გამოკვებოს ცხოველები მინიმალური დანახარჯებით, მაგრამ თითოეულმა ცხოველმა უნდა მიიღოს არანაკლებ 1.6 კგ ცილა, არანაკლებ 0.3 კგ ამინომჟავა და არაუმეტეს 0.3 კგ კალციუმი დღეში. ხელმისაწვდომი პროდუქტებია თევზის ფქვილი და ხორცის ნარჩენები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ამინომჟავებს (იხ. ცხრილი). თევზის ფქვილი ღირს 0.65 ლარი 1 კგ, ხოლო ხორცის ნარჩენი 0.52 ლარი 1 კგ.

პროდუქტი 1 კგ	ცილა	კალციუმი	ამინომჟავა
თევზის ფქვილი	0.6	0.05	0.18
ხორცის ნარჩენი	0.5	0.11	0.05

განსაზღვრეთ მინიმალური ღირებულების რაციონი.

12. საწარმო ორი ხარისხის ბეტონს უშვებს. მაღალი ხარისხის ბეტონის ერთი ერთეული შეიცავს 10 კგ ღორღსა და 5 კგ ცემენტს, დაბალი ხარისხისა კი 12 კგ ღორღსა და 3 კგ ცემენტს. საწარმოს მარაგი შეადგენს 1920 კგ ღორღსა და 789 კგ ცემენტს. ერთი ერთეული მაღალი ხარისხის ბეტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება შეადგენს 1.2 ლარს, დაბალი ხარისხისა კი 1 ლარს. თითოეული ხარისხის რამდენი ერთეული ბეტონი უნდა გამოუშვას საწარმომ მაქსიმალური მოგების მისაღებად?

13. საქონლის ერთ საბითუმო მიმწოდებელს შეუძლია, რეალიზატორს მიაწოდოს პაკეტი, რომელიც შედგება A საქონლის 3 ერთეულისგან, B საქონლის 6 ერთეულისგან, C საქონლის 4 ერთეულისგან და ღირს 20 ლარი. მეორე მომწოდებელს კი - პაკეტი, რომელიც შედგება 12 ერთეული A საქონლისგან, 3 ერთეული B საქონლისგან, 3 ერთეული C საქონლისგან და ღირს 26 ლარი. რეალიზატორს სჭირდება არანაკლებ 396 ერთეული A საქონელი, 288 ერთეული B და 255 ერთეული C საქონელი. რეალიზატორს სურს გაიგოს, თითოეული მომწოდებლის რამდენი პაკეტი უნდა შეუკვეთოს, რომ დანახარჯი იყოს მინიმალური. შევადგინოთ მიზნის ფუნქცია და ჩავწეროთ დასაშვები არე.

14. დიეტოლოგმა უნდა შექმნას საკვების ულუფა, რომელიც შედგება სამი პროდუქტისგან. ცხრილში მოცემულია თითოეული პროდუქტი რამდენ ერთეულ ცილას, ნახშირწყალსა და რკინას შეიცავს, ასევე მოცემულია კალორიულობის მაჩვენებელი

ინგრედიენტები	პროდუქტი 1	პროდუქტი 2	პროდუქტი 3
ცილა	5	10	15
ნახშირწყალი	2	3	2
რკინა	3	6	1
კალორია	60	142	120

დიეტოლოგმა უნდა განსაზღვროს თითოეული პროდუქტის რაოდენობა ისე, რომ ულუფაში აღმოჩნდეს არანაკლებ 30 ერთეული ცილა, 8 ერთეული ნახშირწყალი და 10 ერთეული რკინა მინიმალური რაოდენობის კალორიებით. შევადგინოთ მიზნის ფუნქცია და ჩავწეროთ დასაშვები არე.

ლექცია 6

კვადრატული ფუნქცია და მისი გამოყენება ეკონომიკაში

6.1 კვადრატული ფუნქცია.

ერთ-ერთი უმარტივესი არაწრფივი ფუნქცია, რომელიც ცნობილია **კვადრატული ფუნქციის** სახელწოდებით, მოიცემა შემდეგი სახით:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

სადაც a, b და c რაიმე პარამეტრებია (ნამდვილი რიცხვებია) და $a \neq 0$. თუ $a = 1$ და $b = c = 0$, მაშინ ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$f(x) = x^2.$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ ფუნქციის გრაფიკს **პარაბოლა** ეწოდება, ხოლო ეკონომისტები მას ასევე უწოდებენ U ტიპის წირს. შევნიშნოთ, რომ ეს პარაბოლა სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ და გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე, რომელიც თავის მხრივ მის მინიმუმის წერტილს წარმოადგენს.

საზოგადოდ,

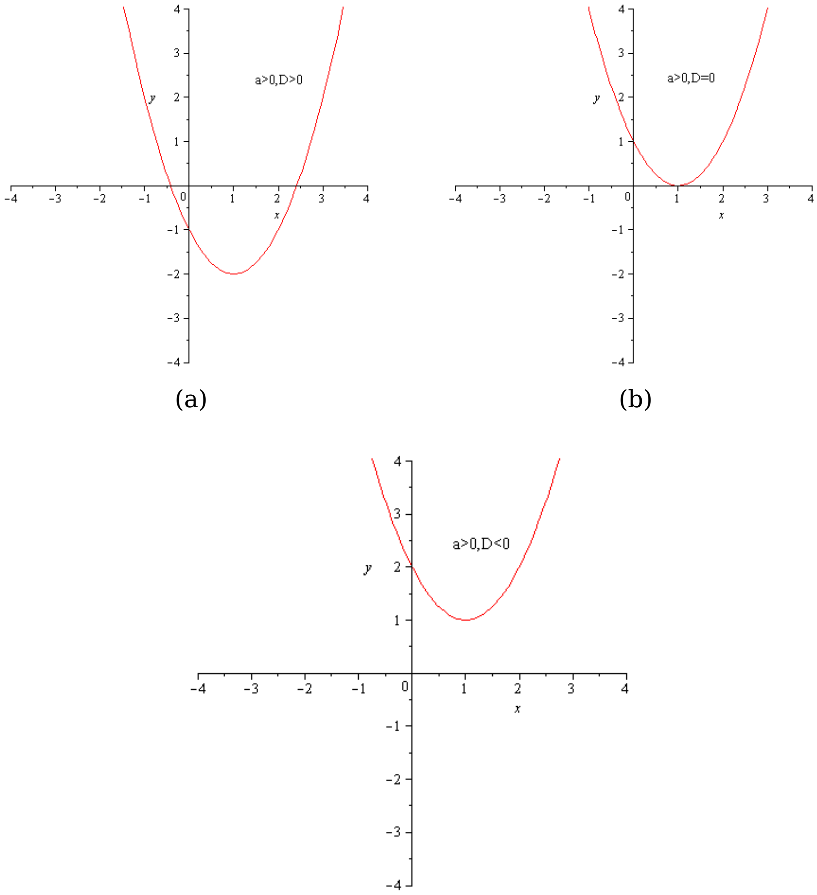
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

ფუნქციის გრაფიკიც პარაბოლას წარმოადგენს. თუ $a > 0$, მაშინ მისი შტოები მიმართულია ზემოთ("ბედნიერი პარაბოლა"). ასეთი პარაბოლის სიბრტყეზე მდებარეობა დამოკიდებულია ასევე $D = b^2 - 4ac$ სიდიდეზე, რომელსაც **დისკრიმინანტი** ეწოდება. სწორედ ეს შემთხვევებია განხილული სურათი 6.1–ზე. ანალოგიურად, თუ $a < 0$, მაშინ შტოები მიმართულია ქვემოთ("მოწყენილი პარაბოლა") (იხ. სურათი 6.2).

პარაბოლის y-გადაკვეთის საპოვნელად მის განტოლებაში ჩავსვათ $x = 0$. მივიღებთ

$$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c = c$$

ე.ი. თავისუფალი წევრი c გამოსახავს იმ წერტილს, სადაც წირი კვეთს ვერტიკალურ y ღერძს. პარაბოლა გადაკვეთს x ღერძს იმ წერტილში, რომლისთვისაც $y = 0$. ცხა-



(a) (b) (c)

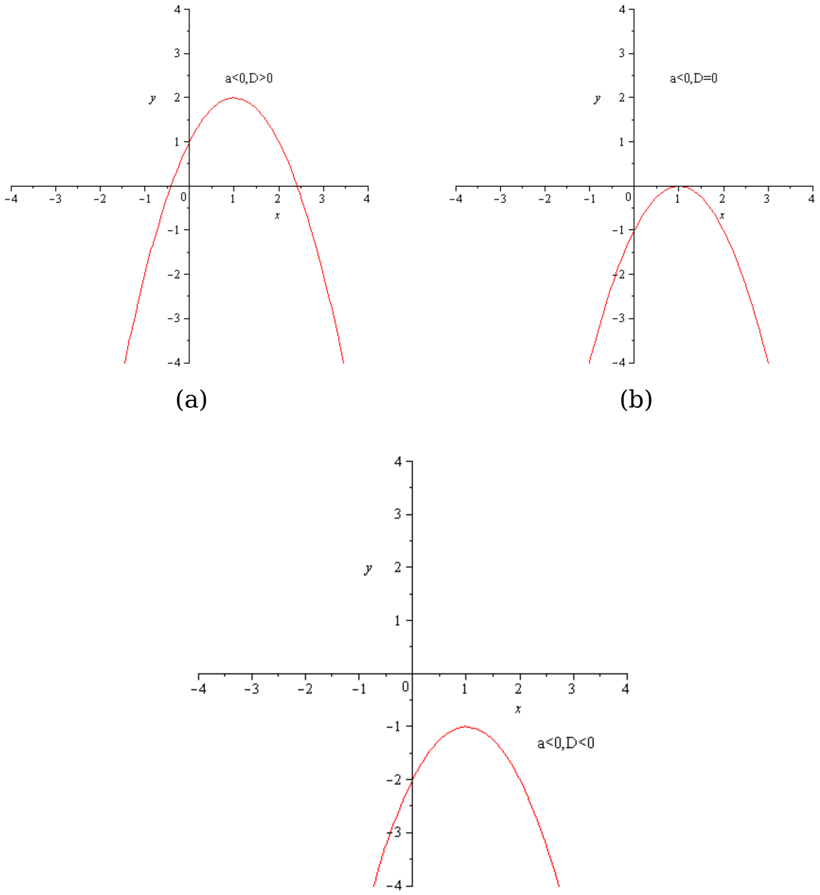
სურ 6.1

დია, ამ წერტილ(ებ)ის საპოვნელად, თუკი ისინი არსებობენ, უნდა ამოიხსნას შემდეგი კვადრატული განტოლება

$$ax^2 + bx + c = 0$$

> საზოგადოდ, ასეთ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ორი ამონახსნი, ერთი ამონახსნი ან საერთოდ არ ჰქონდეს ამონახსნი. ეს ამონახსნები მოიცემა ფორმულით:
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6.1}$$

ამ ფორმულიდან ცხადია, რომ თუ $D = b^2 - 4ac > 0$, მაშინ განტოლებას ექნება ორი ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლა x ღერძს გადაჰკვეთს ორ წერტილში (სურ. 6.1-ის (a) და სურ. 6.2-ის (a)). როცა $D = b^2 - 4ac = 0$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი, ანუ პარაბოლა მხოლოდ ერთ წერტილში ეხება x ღერძს (სურ. 6.1-ის (b) და სურ. 6.2-ის (b)). და ბოლოს, თუ $D = b^2 - 4ac < 0$, მაშინ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვებში, ე.ი. პარაბოლას და x ღერძს არ გააჩნიათ არც ერთი საერთო წერტილი (სურ. 6.1-ის (c) და სურ. 6.2-ის (c)). ჩვენთვის საინტერესოა პარაბოლის კიდევ ერთი წერტილი. ეს ის წერტილია, სადაც გრაფიკი "აკეთებს მობრუნებას". ამ წერტილს პარაბოლის **წვერო** ეწოდება. თუ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ, მაშინ წვერო წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს, ხოლო თუ შტოები



(a) (b)

(c)

სურ 6.2

მიმართულია ქვემოთ, ის წარმოადგენს მაქსიმუმის წერტილს. წვეროს კოორდინატები შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულებით:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{2a} \\
y &= -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}
\end{aligned}
$$

მაგალითი 6.1 *ავაგოთ შემდეგი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი*

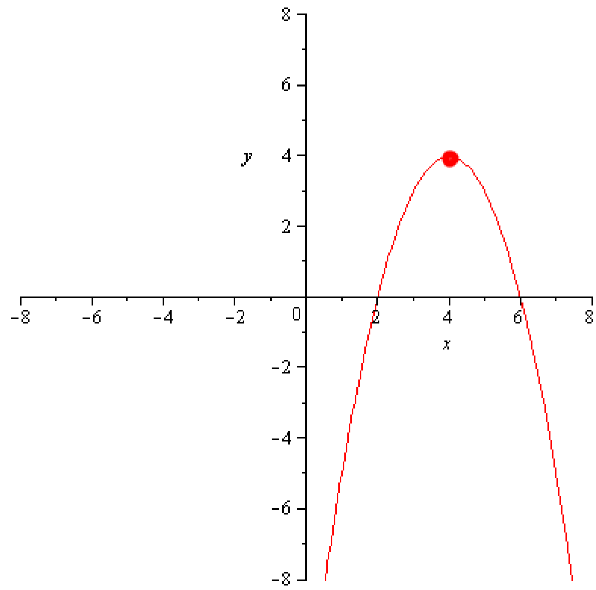
$$f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

ამოხსნა: *x^2-ის კოეფიციენტია -1, რაც იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვემოთ. თავისუფალი წევრი არის -12, ე.ი. გრაფიკი ვერტიკალურ ღერძს ჰკვეთს წერტილში $y=-12$. ახლა კი ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება:*

$-x^2+8x-12=0$. (6.1) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{(8^2-4(-1)(-12))}}{2(-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{(64-48)}}{-2} = \\ = \frac{-8 \pm 4}{-2}$$

საიდანაც, $x_1 = 2$ და $x_2 = 6$. მაშასადამე, გრაფიკი ჰორიზონტალურ x ღერძს გადაკვეთს $x_1 = 2$ და $x_2 = 6$ წერტილებში. ბოლოს გამოვთვალოთ წვეროს კოორდინატები: $x = -\frac{8}{-2} = 4$; $y = -\frac{64-48}{-4} = 4$. მაშასადამე, პარაბოლის მაქსიმუმის წერტილის კოორდინატები არის (4,4). მიღებული მონაცემებით ავაგოთ გრაფიკის ესკიზი (იხ. სურათი 6.3).



სურ 6.3

6.2 კვადრატული ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა, რომელთა ამოსახსნელად ეფექტურად გამოვიყენებთ კვადრატულ ფუნქციებს.

მაგალითი 6.2 *მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია*

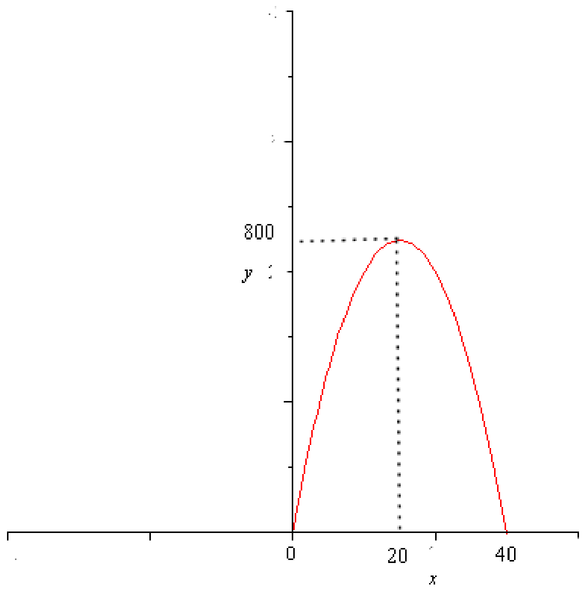
$$p = 80 - 2Q.$$

გამოვსახოთ მთლიანი ამონაგების (TR) ფუნქციის Q რაოდენობაზე დამოკიდებულება და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი. ჩავატაროთ ანალიზი გრაფიკის მიხედვით.

ამოხსნა. (3.3) ფორმულის ძალით გვექნება:

$$(TR) = Q \cdot p = Q(80 - 2Q) = -2Q^2 + 80Q$$

როგორც ვხედავთ, მთლიანი ამონაგების ფუნქცია აღმოჩნდა კვადრატული ფუნქცია Q-ს მიმართ. მაშასადამე, მის გრაფიკს წარმოადგენს პარაბოლა, რომლის შტოები მიმართულია ქვემოთ (ვინაიდან Q^2-ის კოეფიციენტი უარყოფითია). აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ Q რაოდენობა, ხოლო ორდინატთა ღერძზე მთლიანი ამონაგები (TR). გრაფიკის Q-გადაკვეთის საპოვნელად გავუტოლოთ კვადრატული ფუნქცია 0-ს. მივიღებთ: $-2Q^2 + 80Q = 0$. საიდანაც $Q_1 = 0$ და $Q_2 = 40$. პარაბოლის წვეროს კოორდინატები კი იქნება (20, 800) (იხ. სურათი 6.4).



სურ 6.4

გრაფიკიდან ჩანს, რომ მთლიანი ამონაგები მაქსიმალურია, როცა გაიყიდება პროდუქციის $Q = 20$ ერთეული და ეს მაქსიმალური თანხა შეადგენს $TR = 800$-ს. პროდუქციის ერთეულის ფასი ამ შემთხვევაში იქნება $p = 80 - 2Q = 80 - 2(20) = 40$.

ზოგადად, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია წრფივი ფუნქციის სახით

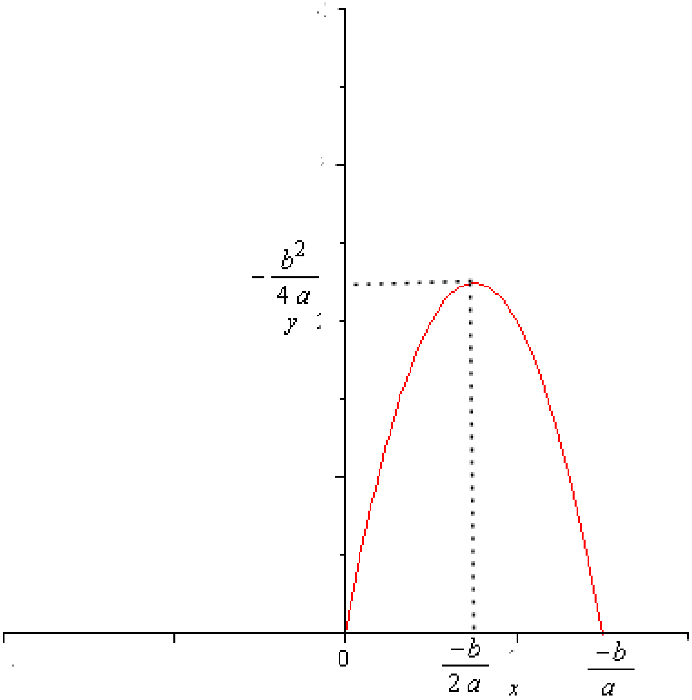
$$p = aQ + b, \quad a < 0, \; b > 0,$$

მაშინ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია (TR) წარმოდგება კვადრატული ფუნქციის ფორმით

$$TR = Q \cdot p = Q(aQ + b) = aQ^2 + bQ.$$

რადგან $a < 0$, ამიტომ შესაბამისი პარაბოლის შტოები მიმართული იქნება ქვემოთ და (TR) ფუნქცია მაქსიმუმს მიაღწევს მის წვეროზე, ანუ როდესაც $Q = -\frac{b}{2a}$. ამასთან, ეს მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება $TR = -\frac{b^2}{4a}$. (იხ. სურათი 6.5)

შევნიშნოთ, რომ მთლიანი დანახარჯი (TC) ყოველთვის ვერ ასახავს საწარმოს ეფექტურობას. განვიხილოთ მაგალითი.



სურ 6.5

მაგალითი 6.3 *ვთქვათ, საერთაშორისო საავტომობილო კომპანია ამუშავებს ორ ქარხანას, ერთს აშშ-ში, ხოლო მეორეს ევროპაში. აშშ-ში მთლიანი წლიური დანახარჯია 200 მლნ. დოლარი, ხოლო ევროპაში- 45 მლნ. დოლარი. ამასთან, აშშ-ს ქარხანა აწარმოებს 80 000 ავტომანქანას, ხოლო ევროპისა- 15 000 ავტომანქანას. რომელი ქარხანა უფრო მომგებიანია (რენტაბელურია)?*

ამოხსნა: ცხადია, რომ ორივე ქარხნის მთლიანი დანახარჯი მომგებიანობის თვალსაზრისით არავითარ ინფორმაციას არ იძლევა. ქარხნის რენტაბელობა გამოჩნდება ერთი ავტომანქანის წარმოებაზე საშუალოდ დახარჯული თანხების შედარებით. აშშ-ს ქარხნისათვის ეს თანხა იქნება $\frac{(TC)_{usa}}{80000} = \frac{200000000}{80000} = 2500\$$, ხოლო ევროპის ქარხნისათვის $\frac{(TC)_{EU}}{15000} = \frac{45000000}{15000} = 3000\$$. აქედან ცხადია, რომ აშშ-ს ქარხანა უფრო მომგებიანია(რენტაბელურია), ვიდრე ევროპისა.

როგორც ამ მაგალითიდან ჩანს, ზემოთ განხილულ ეკონომიკურ ფუნქციებთან ერთად მნიშვნელოვანი როლი ენიჭება **საშუალო დანახარჯის (AC) (Average Costs)** ფუნქციას, რომელიც გამოითვლება მთლიანი დანახარჯის (TC) გაყოფით გამოშვებული პროდუქციის Q რაოდენობაზე.

$$(AC) = \frac{(TC)}{Q} = \frac{(FC) + (VC)Q}{Q} = \frac{(FC)}{Q} + (VC) \tag{6.2}$$

მაგალითი 6.4 *ვთქვათ, რომელიმე საწარმოს მუდმივი დანახარჯია 1000 ლარი, ხოლო ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე- 4 ლარი. გამოვსახოთ* (TC)

მთლიანი დანახარჯი და (AC) საშუალო დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობის მიხედვით. ავაგოთ შესაბამისი ნახაზები.

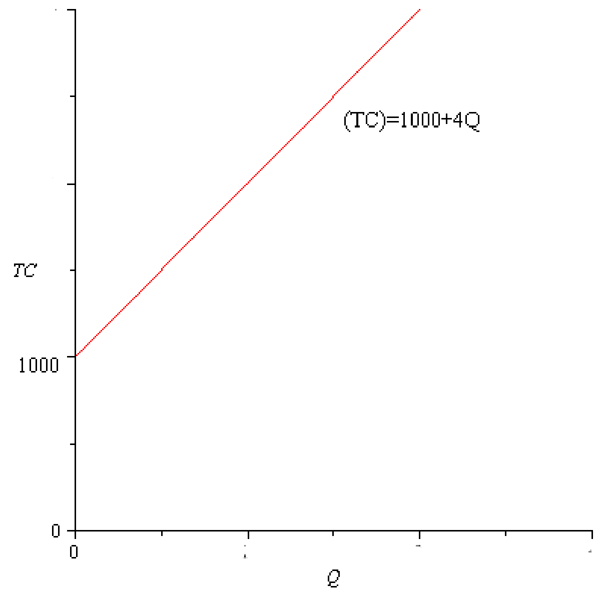
პირობის თანახმად $(FC) = 1000$ და $(VC) = 4$. ამიტომ (3.4) ფორმულიდან

$$(TC) = 1000 + 4Q,$$

(AC) საშუალო დანახარჯისთვის კი (6.2)-დან მივიღებთ

$$(AC) = \frac{1000}{Q} + 4.$$

(TC) ფუნქცია წრფივია Q-ს მიმართ და მისი გრაფიკი გამოსახულია სურ. 6.6-ზე. (AC)-ს გრაფიკი წარმოადგენს ჰიპერბოლას (იხ. სურათი 6.7)



სურ 6.6

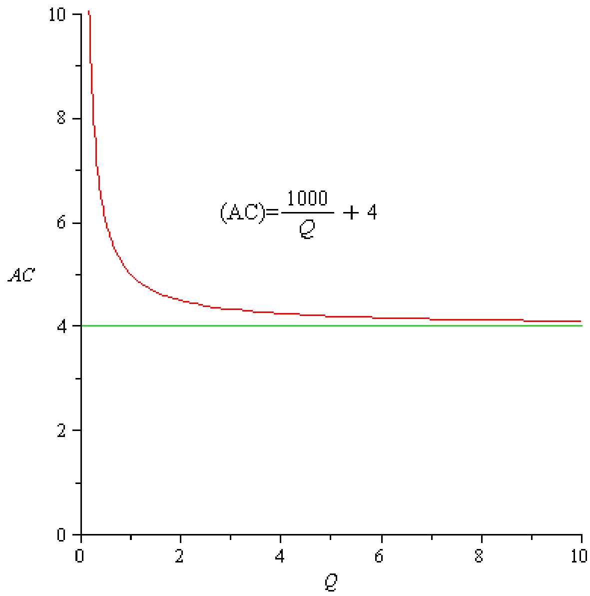
შევნიშნოთ, რომ როცა Q ძალიან მცირდება, მაშინ (AC) ძალიან იზრდება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (AC) ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული $Q = 0$-ის მიდამოში. მეორეს მხრივ, როცა Q ძალიან დიდია, მაშინ $\frac{1000}{Q}$ წილადის მნიშვნელობები უახლოვდება 0-ს, ხოლო (AC) სიდიდე 4-ს.

როგორც ვიცით, მოგების ფუნქცია P განიმარტება შემდეგნაირად:

$$P = (TR) - (TC) = (aQ^2 + bQ) - (cQ + d). \tag{6.3}$$

შევისწავლოთ ამ ფუნქციის თვისებები (იხ. სურათი 6.8).

ნახაზიდან ჩანს, რომ $(0, Q)$ და (Q_B, Q_C) შუალედებში მთლიანი დანახარჯის გრაფიკი უფრო ზემოთაა, ვიდრე მთლიანი ამონაგების გრაფიკი; ამიტომ აქ დანახარჯი სჭარბობს შემოსავალს. Q_A და Q_B წერტილებში მთლიანი დანახარჯი და მთლიანი ამონაგები ერთმანეთის ტოლია. ამ რეჟიმს **ნულოვან ზღვარზე მუშაობა** ეწოდება. რაც შეეხება (Q_A, Q_B) შუალედს, აქ მთლიანი ამონაგების მრუდი უფრო ზემოთაა, ვიდრე



სურ 6.7

მთლიანი დანახარჯისა, ე.ი. ამონაგები სჭარბობს დანახარჯს და გვაქვს მოგება. EF-ის მაქსიმალურ სიგრძეს შეესაბამება მაქსიმალური მოგება. ასეთი სიტუაცია მიიღწევა რომელიღაც Q-თვის (Q_A,Q_B) შუალედიდან. ამ მაქსიმალური მოგების მოსაძებნად უმჯობესია გამოვიყენოთ (6.3) ფორმულა, რომელიც გამოსახავს მოგების P ფუნქციას კვადრატული სამწევრის სახით, რომლის შესაბამისი გრაფიკის (პარაბოლის) შტოები ქვემოთაა მიმართული. ამის გამო მას აუცილებლად გააჩნია უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება მაქსიმალურ მოგებას.

მაგალითი 6.5 *წარმოების მუდმივი დანახარჯია 4 ლარი, ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე შეადგენს 1 ლარს. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = -2Q + 10$. გამოვსახოთ მოგების P ფუნქცია Q-ს საშუალებით. ასევე გავარკვიოთ:*

1) საქონლის რა რაოდენობა შეესაბამება ნულოვან ზღვარზე მუშაობას?

2) რას უდრის მოგების მაქსიმალური სიდიდე?

ამოხსნა: როგორც ვიცით, მოგების ფუნქცია მოიცემა ფორმულით $P = (TR)-(TC)$. ჩვენს პირობებში $(TR) = Q \cdot P = Q(-2Q + 10) = -2Q^2 + 10Q$. რადგანაც $(FC) = 4$ და $(VC) = 1$, ამიტომ $(TC) = (FC) + (VC)Q = 4 + Q$.მაშინ მოგების ფუნქციისთვის მივიღებთ

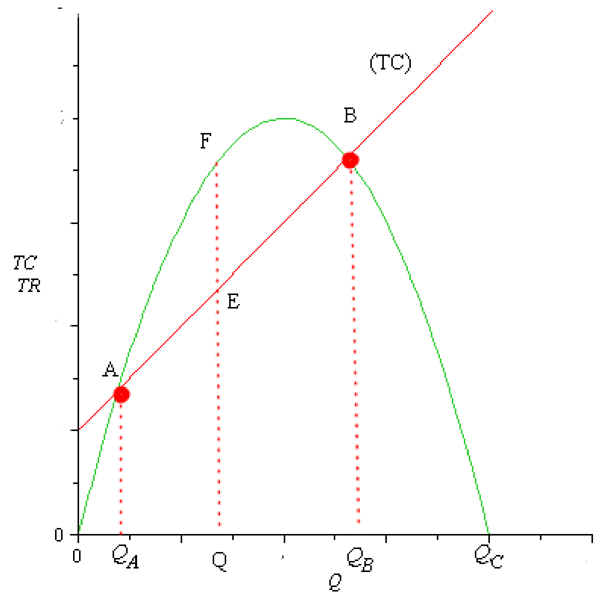
$$P = (-2Q^2 + 10Q) - (4 + Q) = -2Q^2 + 9Q - 4$$

განვიხილოთ განტოლება

$$-2Q^2 + 9Q - 4 = 0$$

მისი ამონახსნებია

$$Q_1 = \frac{1}{2}$$
$$Q_2 = 4$$



სურ 6.8

ესაა სწორედ ის რაოდენობები, რომელთაც შეესაბამება ნულოვან ზღვარზე მუშაობა.

P ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნად ვიპოვოთ პარაბოლის წვეროს კოორდინატები:

$$Q_0 = -\frac{9}{2 \cdot (-2)} = \frac{9}{4}, \; P_0 = -\frac{9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4)}{4 \cdot (-2)} = 6.125$$

ამრიგად, მოგების ფუნქციის მაქსიმალური სიდიდეა $P_0 = 6.125$, რომელიც შეესაბამება $Q_0 = \frac{9}{4}$ რაოდენობის პროდუქციას.

6.3 ხარისხოვანი და რაციონალური ფუნქციები.

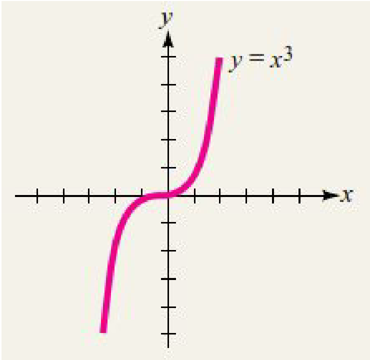
ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება $f(x) = x^n$ სახის ფუნქციას, სადაც n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მაგალითად, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{-3}$ და $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქციები ხარისხოვანი ფუნქციებია. ასევე ხარისხოვანი ფუნქციებია $f(x) = \frac{1}{x^2}$ და $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ფუნქციებიც, ვინაიდან თითოეული მათგანის ჩაწერა შეიძლება, შესაბამისად, შემდეგი სახით: $f(x) = x^{-2}$ და $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$.

პოლინომი ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას:

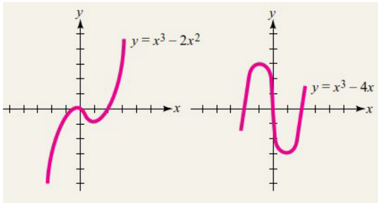
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

სადაც n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო $a_0, a_1, \cdots, a_n$ მუდმივი რიცხვებია. თუ $a_n \neq 0$, მაშინ n-ს ეწოდება პოლინომის ხარისხი(რიგი). მაგალითად, $f(x) = 3x^6 - 5x^4 + 2x + 9$ პოლინომის ხარისხი არის 6. ცნობილია, რომ თუ n-ური რიგის პოლინომის გრაფიკის წარმოდგენა შესაძლებელია უწყვეტი წირის სახით, მაშინ ის OX ღერძს გადაკვეთს არაუმეტეს n-ჯერ. სურათი (6.9)-ზე მოცემულია მესამე ხარისხის პოლინომების გრაფიკები.

ორი პოლინომის შეფარდებას რაციონალური ფუნქცია ეწოდება. $\frac{1}{x^2}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x}{x^2+1}$ რაციონალური ფუნქციებია.



(a)



(b)

სურ 6.9

6.4 სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციებისთვის x-გადაკვეთები
   ა) $f(x) = x^2 - 16$
   ბ) $f(x) = x(100 - x)$
   გ) $f(x) = x^2 - 18x + 81$
   დ) $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$
2. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა
   ა) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$
   ბ) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$
   გ) $f(x) = -3x^2 + 18$
   დ) $f(x) = 9 - x^2$
   ე) $f(x) = 3 - 2x^2 + 8x$
3. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა
   ა) $f(x) = x^2 + 6x + 5$
   ბ) $f(x) = 3x^2 + 9x - 1$
   გ) $f(x) = 4x^2 - 9$
   დ) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
   ე) $f(x) = 5x + x^2$
4. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკის ესკიზები
   ა) $f(x) = 2x^2$
   ბ) $f(x) = -x^2$
   გ) $f(x) = x^2 + 2x + 3$
   დ) $f(x) = 2 + x - x^2$

5. მოცემული მთლიანი ამონაგების ფუნქციისთვის იპოვეთ შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქცია

   ა) $TR = 50Q - 4Q^2$

   ბ) $TR = 10$

6. უცხოელ ტურისტებს შორის პოპულარობით სარგებლობს წიგნი ქართული ღვინოების შესახებ. თუ მისი ფასი 15 ლარია, დღეში 50 ცალი იყიდება. თუ წიგნის ფასს 2 ლარით შევამცირებთ, მაშინ გაიყიდება 10 ცალით მეტი. იპოვეთ მაქსიმალური ამონაგების სიდიდე, თუ დამოკიდებულება ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია.

7. თუ ერთი სუვენირი ღირს 6 ლარი, მაშინ იყიდება 1200 ცალი. ფასის 2 ლარით გაძვირება იწვევს გაყიდული სუვენირების რაოდენობის 200 ერთეულით შემცირებას. დამოკიდებულება სუვენირის ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია. იპოვეთ მაქსიმალური ამონაგები. რა იქნება სუვენირის ფასი ამ შემთხვევაში?

8. თუ კინოთეატრის ბილეთი 10 ლარი ღირს, იყიდება 800 ცალი, ხოლო თუ მისი ფასი გახდება 8 ლარი-1000 ცალი. გაყიდული ბილეთების რა რაოდენობა იძლევა მაქსიმალურ ამონაგებს და რა იქნება ამ შემთხვევაში ბილეთის ფასი, თუ დამოკიდებულება ფასსა და რაოდენობას შორის წრფივია?

9. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = -2Q + 140$. ჩაწერეთ მთლიანი ამონაგები (TR), როგორც Q რაოდენობის ფუნქცია. იპოვეთ ის Q_0 რაოდენობა, რომელიც მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მთლიანი ამონაგების ფუნქციას.

10. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $p = 6 - Q$. იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

11. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $p = 12 - 3Q$. იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.

12. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 50 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი 58 ლარი. ჩაწერეთ საშუალო დანახარჯი (AC), როგორც Q რაოდენობის ფუნქცია.

13. წარმოების მუდმივი დანახარჯია 70 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი- 8 ლარი. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = 80 - 2Q$. გამოსახეთ მოგების ფუნქცია Q რაოდენობის საშუალებით და ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

    ა) იპოვეთ საქონლის რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს ნულოვან ზღვარზე მუშაობას.

    ბ) პროდუქციის რა რაოდენობა იძლევა მაქსიმალურ მოგებას?

14. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = -7Q + 150$, ხოლო მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = 40 + 10Q$. ჩაწერეთ მოგების ფუნქცია, როგორც Q რაოდენობის ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი. რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და როგორია ამ შემთხვევაში ფასი?

15. ფირმის ფიქსირებული დანახარჯია 5000 ლარი, ცვალებადი დანახარჯი კი-4 ლარი. პროდუქციის ერთეული იყიდება 6 ლარად.

    ა) იპოვეთ ნულოვან ზღვარზე მუშაობის რეჟიმი.

    ბ) პროდუქციის რა რაოდენობაა გამოშვებული და გაყიდული, თუ ფირმის მოგებაა 2000 ლარი?

16. მოცემულია მოთხოვნის $2Q + p = 25$ და საშუალო დანახარჯის $AC = \frac{32}{Q} + 5$ ფუნქციები. შეადგინეთ შესაბამისი მოგების ფუნქციის განტოლება და იპოვეთ Q-ს ის მნიშვნელობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ნულოვან ზღვარზე მუშაობას და მაქსიმალურ მოგებას.

ლექცია 7

ფუნქციონალური მოდელები ეკონომიკაში

ხშირ შემთხვევაში ეკონომიკისა და ბიზნესის სფეროებში დასმული ამოცანები იმდენად რთულია, რომ მათი აღწერა მარტივი ფორმულების საშუალებით შეუძლებელია. ამიტომაც, ჩვენი უპირველესი მიზანია, ისეთი მათემატიკური მეთოდების შემუშავება, რომლებიც გაამარტივებენ ამგვარი ამოცანების გადაწყვეტას. ამისათვის ჩვენ გამოვიყენებთ პროცედურას, რომელსაც **მათემატიკური მოდელირება** ეწოდება. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში ბიზნესით მოგების მიღება მრავალ ფაქტორზეა დამოკიდებული. თითოეული ფაქტორი რაოდენობრივად შეიძლება დახასიათდეს. გარკვეული რიცხვებით გამოსახული ფაქტორების ურთიერთდამოკიდებულებას ფუნქციის ხასიათი გააჩნია.

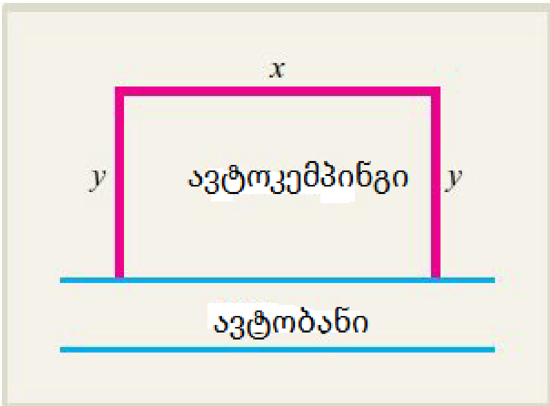
> მათემატიკურ წინადადებას, რომელიც ამ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას აღწერს, **მათემატიკური მოდელი** ეწოდება. ეს წინადადება შეიძლება განტოლების, უტოლობის ან სხვა სახით იყოს ჩაწერილი.

ზემოთ, როდესაც ჩვენ განვიხილეთ წრფივი ფუნქციების გამოყენება ეკონომიკაში, შესაბამისი ამოცანების ამოსახსნელად ფაქტიურად შევქმენით უმარტივესი მათემატიკური მოდელები. ქვემოთ კი განვიხილავთ უფრო რთულ მოდელებს. მათემატიკური მოდელის შექმნა და ანალიზი წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან უნარს, რომელიც უნდა გამოიმუშავოთ წინამდებარე კურსის შესწავლის შედეგად. ნებისმიერი სირთულის მათემატიკური მოდელის შექმნის პროცედურა მოიცავს ოთხ ეტაპს: 1) მათემატიკური აპარატის გამოყენებით ამოცანის ფორმულირება -ანუ, მათემატიკური მოდელის შექმნა; 2) მოდელის ანალიზი-მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით შექმნილი მოდელის ანალიზი ან ამოხსნა; 3)ინტერპრეტაცია- მოდელის ანალიზის შედეგად მიღებული დასკვნების გამოყენება საწყის კონკრეტულ ამოცანაში როგორც მოდელის სიზუსტის შესამოწმებლად, ასევე პროგნოზირებისათვის. 4) ტესტირება და კორექტირება-ამ ბოლო ეტაპზე მოდელის ანალიზის შედეგად მიღებული პროგნოზული მაჩვენებლების სიზუსტის შესამოწმებლად ხდება მოდელის ტესტირება ახალი მონაცემების საშუალებით. თუ ამ ახალი მონაცემებით საპროგნოზო მაჩვენებლები არ დადასტურდა, ხდება მოდელის კორექტირება.

მაგალითი 7.1 *საგზაო დეპარტამენტმა გადაწყვიტა ავტობანის გასწვრივ მოაწყოს სივრცე ავტოკემპინგისთვის, რომელსაც აქვს მართკუთხედის ფორმა 5000 კვ.მ.*

ფართობით და შემოღობილია სამი მხრიდან, რომლებიც არ ესაზღვრებიან მაგისტრალს. იპოვეთ დამოკიდებულება ავტოკემპინგის შემოღობილი გვერდების ჯამურ გრძივ მეტრებსა და შემოუღობავი გვერდის სიგრძეს შორის.

ამოხსნა. ბუნებრივია, შემოვიტანოთ ორი ცვლადი x და y მართკუთხედის ფორმის ავტოკემპინგის გვერდების აღსანიშნავად(იხ. სურ 7.1)



სურ 7.1

მაშინ, ცხადია, შემოღობილი გვერდების სიგრძეთა ჯამი $F = x+2y$.ვინაიდან, ჩვენი ამოცანაა, F გამოვსახოთ მხოლოდ x ცვლადის საშუალებით, ამიტომ უნდა ვიპოვოთ გზა y სიდიდის მხოლოდ x-ით გამოსახვისათვის. ამისათვის გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ სივრცის ფართობი არის 5000 კვ.მ.-ის ტოლი, ანუ

$$xy = 5000,$$

საიდანაც მივიღებთ,

$$y = \frac{5000}{x}.$$

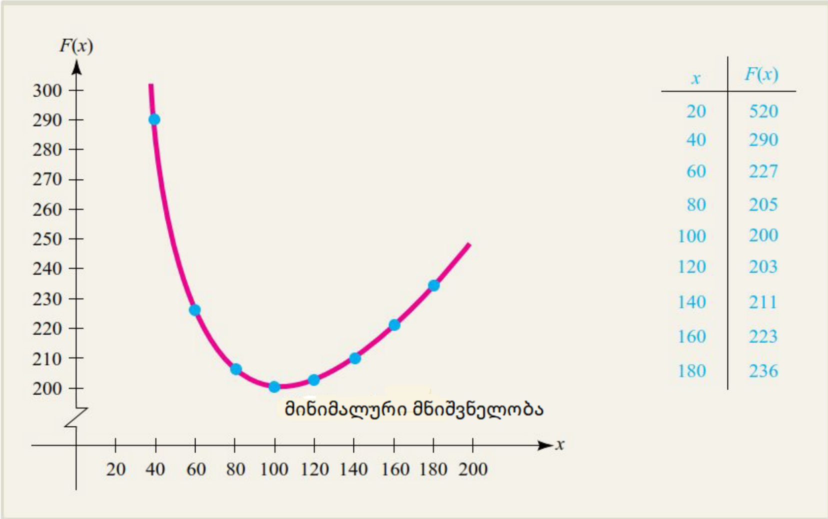
თუ y-ის ამ გამოსახულებას შევიტანთ F ფუნქციის წარმოდგენაში, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$F(x) = x + 2\left(\frac{5000}{x}\right) = x + \frac{10000}{x}.$$

ცხადია, ჩვენი ამოცანის პირობებში $x > 0$. ამ შეზღუდვებით მიღებული $F(x)$ რაციონალური ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია სურ.7.2-ზე.

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, არსებობს გარკვეული x სიგრძე($x = 100$მ.), რომლისთვისაც შემოსაღობი გვერდების სიგრძეთა ჯამი მინიმალურია(200 მ.)

მომავალში ჩვენ შევისწავლით ძალზე ეფექტურ მეთოდს, რომელიც ეფუძნება ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებას და რომლითაც ხერხდება ასეთი და სხვა მრავალი ტიპის ფუნქციის ექსტრემუმების ზუსტი მოძებნა, თანაც გრაფიკის აგების გარეშე.



სურ 7.2

მაგალითი 7.2 *დასამზადებელია 24π კუბ.ერთ. მოცულობის მქონე ცილინდრის ფორმის დახურული ქილის ჭურჭელი. ქილის ფსკერისა და თავსახურის დასამზადებლად გამოყენებული მასალის ერთი კვ.ერთეულის ფასია 3 ლარი, ხოლო ქილის გვერდითი ზედაპირის დასამზადებლად გამოყენებული მასალის ერთი კვ.ერთეულის ფასი-2 ლარი. გამოსახეთ ქილის დასამზადებლად გაწეული ხარჯების დამოკიდებულება მის რადიუსზე.*

ამოხსნა. ვთქვათ, ქილის რადიუსია r, სიმაღლე - h, ხოლო C-მისი დამზადებისთვის საჭირო მთლიანი ხარჯია(ლარებში). ვინაიდან ქილის ფსკერისა და სახურავის(როგორც წრეების) ფართობებია πr^2, ამიტომ თითოეული მათგანის დასამზადებლად დაიხარჯება $3\pi r^2$ ლარი, ანუ, ჯამურად $6\pi r^2$ ლარი. ქილის გვერდითი ზედაპირის ფართობის დასადგენად წარმოვიდგინოთ, რომ მას მოვაცილეთ ფსკერი და სახურავი, გვერდი გავჭერით ვერტიკალურად და გავშალეთ ისე, როგორც ეს სურ.7.3 -ზეა ნაჩვენები.

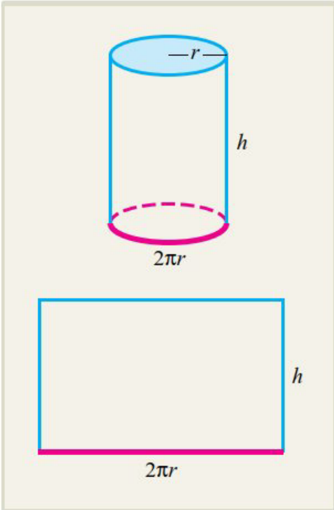
ცხადია, რომ ცილინდრის გვერდის გაშლის შედეგად მიიღება მართკუთხედი, რომლის სიგანეა ქილის სიმაღლე h, ხოლო სიგრძე იქნება ქილის ფსკერის(ან სახურავის) შემომსაზღვრელი წრეწირის სიგრძე- $2\pi r$. მაშინ, ამ მართკუთხედის ფართობი(ანუ ქილის გვერდითი ზედაპირის ფართობი) ტოლი იქნება $2\pi rh$ კვადრ. ერთეულის და მის დასამზადებლად დაიხარჯება $2(2\pi rh)$=$4\pi rh$ ლარი.მაშასადამე, ქილის დასამზადებლად საერთო ჯამში დაიხარჯება

$$C = 6\pi r^2 + 4\pi rh$$

ლარი. ვინაიდან ჩვენს მიზანს წარმოადგენს დანახარჯის ფუნქციის, როგორც მხოლოდ რადიუსზე დამოკიდებული ფუნქციის სახით წარმოდგენა, ამიტომ მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ცილინდრის მოცულობის გამოსათვლელი $V = \pi r^2 h$ ფორმულიდან გამოვსახოთ h და გავითვალისწინოთ, რომ მოცულობა 24π–ს ტოლია. მივიღებთ:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{24\pi}{\pi r^2} = \frac{24}{r^2}$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით მივიღებთ ქილის დასამზადებლად გაწეული ხარ-



სურ 7.3

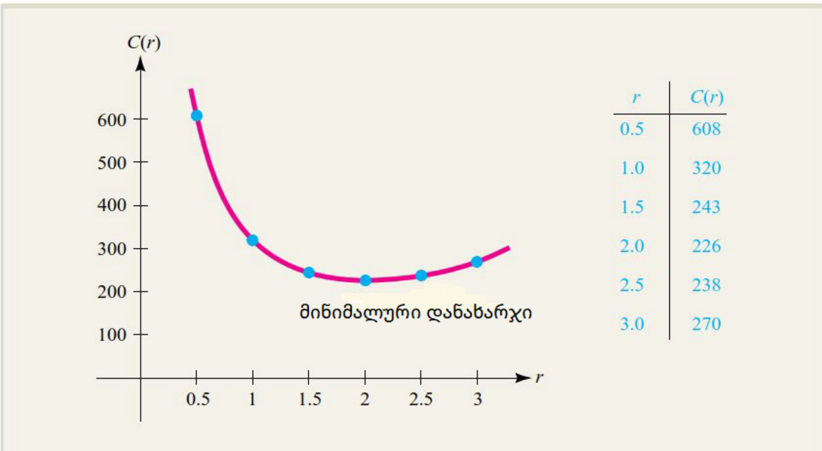
ჯების რადიუსზე დამოკიდებულების ფუნქციის გამოსახულებას:

$$C(r) = 6\pi r^2 + 4\pi r(\frac{24}{r^2}),$$

ანუ,

$$C(r) = 6\pi r^2 + \frac{96\pi}{r}.$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში $r > 0$, ამიტომ ამ შეზღუდვით $C(r)$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე(იხ. სურ. 7.4)



სურ 7.4

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, როდესაც რადიუსი $r = 2$, მაშინ ქილის დასამზადებლად გაწეული ხარჯი მინიმალურია(C=226).

ზემოთ,ჩვენს მიერ მოთხოვნა-მიწოდების ანალიზის შესწავლისას (პარაგრაფი 4.4), განვიხილეთ შემთხვევა, როცა მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები იყო წრფივი. პრაქტიკაში, შესაძლებელია, რომ ეს ფუნქციები იყოს არაწრფივიც.

მაგალითი 7.3 *ვთქვათ, ბაზარზე რაიმე პროდუქტზე მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციებია, შესაბამისად, $D(x) = 174 - 6x$ და $S(x) = x^2 + 14$, სადაც x აღნიშნავს პროდუქციის რაოდენობას.*

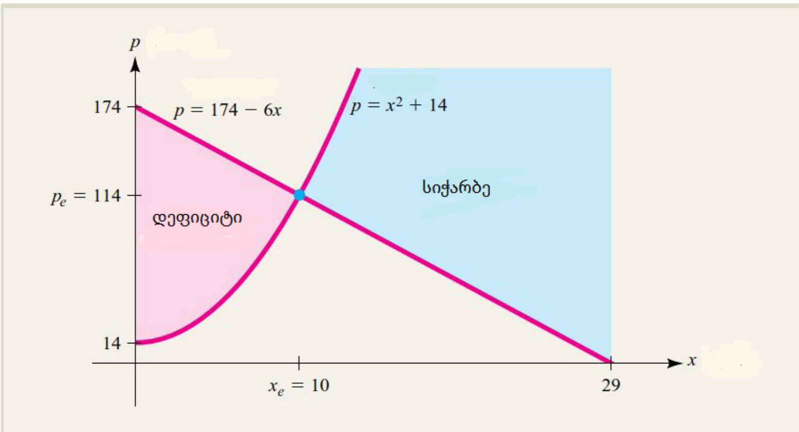
ვიპოვოთ ბაზრის წონასწორობის წერტილის კოორდინატები და ავაგოთ შესაბამისი ნახაზი.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, ბაზარი წონასწორობაშია, როცა მოთხოვნა და მიწოდება ერთმანეთის ტოლია, ანუ $D(x) = S(x)$. გვექნება,

$$\begin{aligned} x^2 + 14 &= 174 - 6x, \\ x^2 + 6x - 160 &= 0 \end{aligned}$$

მიღებული კვადრატული განტოლების ამოხსნით მივიღებთ: $x_1 = -16$ და $x_2 = 10$. ვინაიდან ჩვენი ამოცანის პირობებში $x > 0$, ამიტომ წონასწორობის რაოდენობა იქნება $x = 10$. ამ შემთხვევაში კი წონასწორული ფასი ტოლია $p = D(10) = 174 - 6(10) = 114$.

ავაგოთ შესაბამისი ნახაზი. მოთხოვნის გრაფიკი იქნება წრფე, ხოლო მიწოდების გრაფიკი-პარაბოლა(სურ 7.5)



სურ 7.5

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ბაზარზე პროდუქტის მიწოდება ხდება მაშინ, როცა ფასი გადააჭარბებს 14 ლარს და მაქსიმალური მოთხოვნა არის 29 ერთეული. როცა $0 \leqslant x < 10$, მაშინ ბაზარზე **დეფიციტია** , ვინაიდან მოთხოვნის წირი უფრო მაღლაა მიწოდების წირზე, ე.ი. მოთხოვნა სჭარბობს მიწოდებას. ხოლო, თუ $10 < x \leqslant 29$, ბაზარზე გვაქვს **სიჭარბე** , ანუ მიწოდება მეტია მოთხოვნაზე. მოთხოვნისა და მიწოდების წირები კი ერთმანეთს კვეთს წონასწორობის $(10; 114)$ წერტილში.

7.1 სავარჯიშოები:

1. კახეთში გვალვის დროს წყლის არამიზნობრივი ხარჯვის შესამცირებლად სამხარეო ადმინისტრაციამ მიიღო გადაწყვეტილება წყალზე გადასახადის გაზრდის თაობაზე. მან ოთხსულიან ოჯახს დაუწესა ყოველთვიური განაკვეთი შემდეგი

სქემით: 1.22 ლარი ყოველ 100 დეკალიტრ წყალზე პირველი 1200 დეკალიტრისთვის, 10 ლარი ყოველ 100 დეკალიტრზე შემდეგი 1200 დეკალიტრისთვის და ამის შემდგომ 50 ლარი ყოველ მომდევნო 100 დეკალიტრზე. გამოსახეთ ყოველთვიური წყლის გადასახადის ფუნქცია ოთხსულიანი ოჯახისთვის, როგორც მოხმარებული წყლის რაოდენობის ფუნქცია.

2. საწარმო ერთ შეკვრა პრინტერის ქაღალდს აწარმოებს 2 ლარად. როცა მისი სარეალიზაციო ფასი 5 ლარია, თვეში იყიდება 4000 შეკვრა. მწარმოებელი გეგმავს ფასის მომატებას და მისი გათვლებით, ფასის ყოველი 1 ლარით მატება იწვევს თვეში გაყიდვების შემცირებას 400 ერთეულით.

   ა) გამოსახეთ მწარმოებლის ყოველთვიური მოგების ფუნქცია როგორც სარეალიზაციო ფასის ფუნქცია;

   ბ) ააგეთ მოგების ფუნქციის გრაფიკი. რომელი სარეალიზაციო ფასი იძლევა მაქსიმალურ მოგებას? რისი ტოლია მაქსიმალური მოგება?

3. ფირმის მიერ წარმოებული პროდუქტის ერთი ერთეულის სარეალიზაციო ფასი 110 ლარია. ამ პროდუქტის საწარმოებლად ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს 7 500 ლარს, ხოლო ცვლადი დანახარჯი 60 ლარს.

   ა) პროდუქციის რა რაოდენობის რეალიზაცია უზრუნველყოფს ნულოვან ზღვარზე მუშაობას?

   ბ) რამდენია ფირმის მოგება 100 ერთეული პროდუქტის რეალიზების დროს?

   გ) რა რაოდენობა პროდუქტის რეალიზების დროს იქნება მოგება 1250 ლარის ტოლი?

4. მანქანების გამქირავებელი პირველი ფირმა სთავაზობს მომხმარებლებს შემდეგ პირობებს: ქირავნობის ფიქსირებული გადასახადი 25 ლარი და პლიუს 60 თეთრი ყოველ გავლილ კილომეტრზე, ხოლო მეორე ფირმა სთავაზობს შემდეგს: ქირავნობის ფიქსირებული გადასახადი 30 ლარი და პლიუს 50 თეთრი ყოველ გავლილ კილომეტრზე. რომელი ფირმის მომსახურებით სარგებლობაა მომგებიანი მომხმარებლისთვის?

5. ორი რიცხვის ჯამია 18. გამოსახეთ ამ რიცხვების ნამრავლი როგორც მცირე რიცხვის ფუნქცია.

6. ორი რიცხვის ნამრავლია 318. გამოსახეთ ამ რიცხვების ჯამი, როგორც მცირე რიცხვის ფუნქცია.

7. დიზაინერს სურს გააკეთოს მართკუთხედის ფორმის ყვავილების ბაღი, რომლის სიგრძე ორჯერ მეტია სიგანეზე. გამოსახეთ ბაღის ფართობი როგორც მისი სიგანის ფუნქცია.

8. მართკუთხედის ფორმის მინდვრის პერიმეტრია 320 მეტრი. გამოსახეთ მინდვრის ფართობი როგორც ერთ-ერთი გვერდის ფუნქცია. ააგეთ გრაფიკი და გამოიკვლიეთ მაქსიმალური ფართობის მქონე მინდვრის ზომები.

9. დახურული ცილინდრული ფორმის ქილის ზედაპირის ფართობია $120\pi r$ კვადრატული ერთეული. გამოსახეთ ქილის მოცულობა როგორც მისი რადიუსის ფუნქცია.

10. ოზურგეთელი ციტრუსების მომყვანი ფერმერის გათვლით, თუ დარგავს 60 ფორთოხლის ხეს, საშუალო მოსავალი თითო ხიდან იქნება 400 ფორთოხალი. იმავე ფართობზე დამატებით დარგული ყოველი ხე კი გამოიწვევს საშუალო მოსავლის შემცირებას 4 ფორთოხლით ყოველ ხეზე. გამოსახეთ ფერმერის ფორთოხლის ჯამური მოსავალი როგორც დამატებით დარგული ხეების რაოდენობის ფუნქცია. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი და შეაფასეთ ფერმერის მიერ დასარგავი ხეების ის რაოდენობა, რომელიც მოგვცემს მაქსიმალურ მოსავალს.

ლექცია 8

მატრიცები და დეტერმინანტები.

8.1 მატრიცის ცნება.

ვთქვათ, ფირმა ამზადებს სამი სახის პროდუქტს $G1$, $G2$ და $G3$, რომელსაც ჰყიდის ორ- $C1$ და $C2$ მომხმარებელზე. თვის განმავლობაში $C1$ მომხმარებელი ყიდულობს $G1$ პროდუქტის 7 ერთეულს, $G2$ პროდუქტის 3 ერთეულს და $G3$ პროდუქტის 4 ერთეულს, ხოლო $C2$ მომხმარებელი ყიდულობს შესაბამისად $G1$-ის 1, $G2$-ის 5 და $G3$-ის 6 ერთეულს. ცხადია, რომ ეს მოცულობითი ინფორმაცია უმჯობესია ჩაიწეროს მოკლედ შემდეგი ცხრილის სახით

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

რომელსაც მატრიცა ეწოდება. საზოგადოდ,

ფრჩხილებში ჩაწერილ რიცხვთა მართკუთხა ცხრილს მატრიცა ეწოდება.

რიცხვებს, რომლისგანაც მატრიცა შედგება, მატრიცის ელემენტები ეწოდება. მატრიცა შედგება სტრიქონებისა და სვეტებისაგან. (8.1) მატრიცა შედგება 2 სტრიქონისა და 3 სვეტისგან, ამიტომ ვიტყვით, რომ მას აქვს 2×3 რიგი. $m\times n$ რიგის მატრიცას გააჩნია m სტრიქონი და n სვეტი. ცხადია, გონივრული იქნება, თუ მატრიცის ელემენტების გადასანომრად გამოვიყენებთ ორმაგ ინდექსებს. კერძოდ, ჩანაწერი a_{ij} ნიშნავს, რომ a ელემენტი წარმოადგენს მატრიცის i ნომრიანი სტრიქონისა და j ნომრიანი სვეტის საერთო ელემენტს, ანუ მდებარეობს მათ გადაკვეთაზე. (8.1) მატრიცაში $a_{12} = 3$.

საზოგადოდ, 3×2 რიგის D მატრიცა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}$$

ანალოგიურად, 3×3 რიგის E მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

E მატრიცას მე-3 რიგის **კვადრატული** მატრიცა ეწოდება.

კვადრატულ მატრიცაში დიაგონალს, რომელზეც ერთნაირინდექსიანი a_{ii} ელემენტები დგანან, მატრიცის **მთავარი დიაგონალი** ეწოდება, ხოლო მეორე დიაგონალს არამთავარი დიაგონალი.

მაგალითი 8.1 *მოცემულია მატრიცები*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

მიუთითეთ B და C მატრიცის რიგები და ამოწერეთ b_{22} და c_{34} ელემენტების მნიშვნელობები.

ამოხსნა. *B მატრიცის რიგია 2×2, ვინაიდან ის შედგება 2 სტრიქონისა და ორი სვეტისგან, ხოლო C მატრიცა 3×4 რიგისაა, რადგანაც მასში სამი სტრიქონი და ოთხი სვეტია.*

$b_{22} = 6$ (B მატრიცის სტრიქონი 2 და სვეტი 2), $c_{34} = 7$ (C მატრიცის სტრიქონი 3 და სვეტი 4).

8.2 მატრიცის ტრანსპონირება.

ზემოთ მოყვანილ (8.1) A მატრიცაში სტრიქონები შეესაბამებოდა ორ მომხმარებელს, ხოლო სვეტები სამ პროდუქტს და მატრიცა გამოსახავდა თვეში ორი მომხმარებლის მიერ სამი პროდუქტის შეძენის დინამიკას. ეს ინფორმაცია შეიძლება ასევე გადმოიცეს, როგორც სამი პროდუქტის შეძენის დინამიკა ორი მომხმარებლის მიერ. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში ამ პროცესის აღმწერ მატრიცას ექნება სახე

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

სადაც სტრიქონები შეესაბამება პროდუქტებს, ხოლო სვეტები მომხმარებლებს. B მატრიცის მეორე სტრიქონში არსებული რიცხვები გამოსახავენ,რომ $G2$ პროდუქტის 3 და 5 ერთეულებს ყიდულობენ შესაბამისად $C1$ და $C2$ მომხმარებლები. მიღებულ B მატრიცას A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება ასე

$$B = A^T.$$

მაშასადამე, თუ A მატრიცის სტრიქონებს ჩავწერთ შესაბამის სვეტებად(ანუ, პირველ სტრიქონს პირველ სვეტად, მეორე სტრიქონს -მეორე სვეტად და ა.შ.), მივიღებთ მატრიცას, რომელსაც A მატრიცის **ტრანსპონირებული მატრიცა** ეწოდება და აღინიშნება A^T სიმბოლოთი. ცხადია, თუ A მატრიცის რიგია $m \times n$, მაშინ მისი ტრანსპონირებული მატრიცის რიგი იქნება $n \times m$.

მაგალითი 8.2 *ჩაწერეთ შემდეგი მატრიცების ტრანსპონირებული მატრიცები*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. *ვინაიდან D მატრიცა 3×4 რიგისაა, ამიტომ მისი ტრანსპონირებული მატრიცა 4×3 რიგის იქნება,*

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ხოლო 2×1 რიგის E მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა იქნება 1×2 რიგის,

$$E^T = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

მატრიცას ეწოდება **სტრიქონ-მატრიცა**, თუ ის მხოლოდ ერთი სტრიქონისგან შედგება, მაგალითად

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

და ეწოდება **სვეტ-მატრიცა**, თუ ის მხოლოდ ერთი სვეტისაგან შედგება, მაგალითად

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

8.3 მატრიცების შეკრება და გამოკლება.

ვთქვათ, ამ პარაგრაფის დასაწყისში განხილულ ორი მომხმარებლისა და სამი პროდუქტის მაგალითში

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

მატრიცა გამოსახავს შესყიდვების დინამიკას იანვარში. ანალოგიურად დავუშვათ, რომ თებერვლის თვის შესყიდვების დინამიკა მოიცემა შემდეგი მატრიცით

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $C1$ მომხმარებელმა იანვარსა და თებერვალში შეიძინა, შესაბამისად, 7 და 6 ერთეული $G1$ პროდუქტი. მაშასადამე, მან ორი თვის განმავლობაში

ჯამში შეიძინა $7+6=13$ ერთეული $G1$ პროდუქტი. თუ ანალოგიურ პროცესს გამოვიყენებთ დანარჩენი მომხმარებლისა და პროდუქტების მიმართ, მაშინ ორი თვის ჯამური გაყიდვების დინამიკა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი მატრიცის სახით

$$C=\begin{pmatrix} 7+6 & 3+2 & 4+1 \\ 1+0 & 5+4 & 6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 5 & 5 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ C მატრიცა წარმოადგენს A და B მატრიცების ჯამს და ეს ფაქტი ჩაიწერება ასე

$$C=A+B.$$

საზოგადოდ, იმისათვის რომ შევკრიბოთ(ან გამოვაკლოთ) ორი ერთნაირი რიგის მატრიცა, საჭიროა ერთმანეთს დავუმატოთ(ან გამოვაკლოთ) ამ მატრიცების შესაბამისი ელემენტები. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ორი $m\times n$ რიგის მატრიცისთვის სამართლიანია ტოლობა

$$A+B=B+A.$$

მაგალითი 8.3 *მოცემულია მატრიცები*

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ : 1) $A+B$, 2) $A-B$, 3) $A-A$.

ამოხსნა.

1) $A+B=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};$

2) $A-B=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix};$

3) $A-A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

ბოლოს მიღებულ 3×2 რიგის ***მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება.***

ნულოვანი მატრიცის მაგალითებია

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (0)\ .$$

ნულოვანი მატრიცები O სიმბოლოთი აღინიშნება.
ცხადია, ნულოვან მატრიცასთან შეკრებისას ნებისმიერი მატრიცა უცვლელი რჩება.

8.4 მატრიცის რიცხვზე გამრავლება.

კვლავ დავუბრუნდეთ ჩვენს მაგალითს ორი მომხმარებლისა და სამი პროდუქტის შესახებ. ვთქვათ, $C1$ მომხმარებელი ყიდულობს 7 ერთეულ $G1$ პროდუქტს ყოველთვიურად. მაშინ ის წლის განმავლობაში შეიძენს $12 \times 7 = 84$ $G1$ პროდუქტს. ანალოგიურად, თუ ამ პროცესს განვავრცობთ დანარჩენ მომხმარებელსა და პროდუქტებზე, მივიღებთ მომხმარებლების მიერ წლიური შესყიდვების დინამიკის ამსახველ მატრიცას.

$$B = \begin{pmatrix} 12 \times 7 & 12 \times 3 & 12 \times 4 \\ 12 \times 1 & 12 \times 5 & 12 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 36 & 48 \\ 12 & 60 & 72 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, B მატრიცა მიიღება A მატრიცის ყოველი ელემენტის 12-ზე გამრავლებით, რაც ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$B = 12A.$$

საზოგადოდ, იმისათვის რომ A მატრიცა გავამრავლოთ k რიცხვზე, საჭიროა მისი ყოველი ელემენტი გავამრავლოთ ამ k რიცხვზე.

მაგალითი 8.4 *მოცემულია მატრიცა*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ 1) $2A$, 2) $-A$, 3) $0A$.

ამოხსნა.

1.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix};$$

2.

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix};$$

3.

$$0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.5 მატრიცების ნამრავლი.

პირველ რიგში განვიხილოთ, თუ როგორ უნდა გავამრავლოთ სტრიქონ-მატრიცა სვეტ-მატრიცაზე. ამის საილუსტრაციოდ, დავუშვათ, რომ სამი სხვადასხვა სახის $G1, G2, G3$

პროდუქტის ერთეული ღირს შესაბამისად 50,30 და 20 ლარი. შემოვიღოთ სტრიქონ-მატრიცა

$$P = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \end{pmatrix}.$$

თუ ფირმამ გაყიდა თითოეული პროდუქტის 100, 200, 175 ერთეული შესაბამისად, მაშინ ეს ინფორმაცია შეგვიძლია ჩავწეროთ სვეტ-მატრიცის სახით

$$Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 175 \end{pmatrix}.$$

$G1$ პროდუქტის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავალის დასათვლელად ერთეული პროდუქტის ფასი 50 ლარი უნდა გავამრავლოთ გაყიდული პროდუქტის რაოდენობაზე- 100-ზე: მივიღებთ $50 \times 100 = 5000$ლ. ანალოგიურად, $G2$ და $G3$ პროდუქტების რეალიზაციით მიღებული თანხა ტოლი იქნება : $30 \times 200 = 6000$ლ და $20 \times 175 = 3500$. მაშასადამე, ფირმის მთლიანი შემოსავალი ლარებში ტოლი იქნება

$$TR = 5000 + 6000 + 3500 = 14500.$$

TR-ის ეს მნიშვნელობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც 1×1 რიგის მატრიცა, ანუ (14500). ფაქტიურად, ეს მატრიცა მიღებულია ფასის P სტრიქონ-მატრიცისა და რაოდენობის Q სვეტ-მატრიცის ერთმანეთზე გადამრავლების შედეგად.

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 175 \end{pmatrix} = (14500).$$

14 500 მიიღება P და Q მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ერთმანეთზე გადამრავლებით და შეკრებით.

საზოგადოდ, თუ A არის სტრიქონ-მატრიცა

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1s} \end{pmatrix}$$

და B არის სვეტ-მატრიცა

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{s1} \end{pmatrix},$$

მაშინ მათი გამრავლების შედეგად მიღებული 1×1 რიგის მატრიცა გამოითვლება შემდეგნაირად

$$A \times B = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + ... + a_{1s}b_{s1}). \tag{8.4}$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ სტრიქონ-მატრიცის სვეტ-მატრიცაზე გამრავლება შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მათში ელემენტების ერთნაირი რაოდენობაა, ანუ, სტრიქონ-მატრიცაში სვეტების რაოდენობა ემთხვევა სვეტ-მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას.

მაგალითი 8.5 *მოცემულია მატრიცები*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ AB.

ამოხსნა. *(8.4) ფორმულიდან მივიღებთ:*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3(-1) + 4 \cdot 0) = (9).$$

ზოგადად მატრიცების ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად: **თუ A არის $m \times s$ რიგის მატრიცა, ხოლო B არის $s \times n$ რიგის მატრიცა, მაშინ $C = AB$ მატრიცა იქნება $m \times n$ რიგის და მისი ყოველი c_{ij} ელემენტი მიიღება A მატრიცის i-ური სტრიქონის B მატრიცის j-ურ სვეტზე გამრავლების შედეგად.**

მაგალითი 8.6 *გადავამრავლოთ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ მატრიცები. მატრიცთა ნამრავლის განმარტების ძალით მივიღებთ*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11}{=}3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & c_{12}{=}3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \\ c_{21}{=}-2 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 & c_{22}{=}-2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ გამრავლების ოპერაცია მატრიცთა სიმრავლეში არაკომუტაციური, ე.ი. საზოგადოდ $AB \neq BA$.

მაგალითი 8.7 *ვიპოვოთ A და I მატრიცების ნამრავლი, თუ*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

აღვნიშნოთ, $A \cdot I = C$, სადაც

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ C მატრიცის რამდენიმე ელემენტი. მატრიცების გამრავლების განსაზღვრების ძალით გვექნება:

$$c_{11} = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 = a_{11},$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot 0 = a_{12},$$
$$c_{13} = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 1 = a_{13}.$$

ანალოგიურად, ყველა დანარჩენი ელემენტისთვისაც მივიღებდით, რომ $c_{ij} = a_{ij}$.

მაშასადამე,

$$A \cdot I = A.$$

ზუსტად ასევე,

$$I \cdot A = A.$$

კვადრატულ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, ყველა დანარჩენი კი – ნულის, **ერთეულოვანი მატრიცა** ეწოდება.
ერთეულოვან მატრიცაზე გამრავლებისას ნებისმიერი მატრიცა უცვლელი რჩება.

8.6 დეტერმინანტი. მინორი და ალგებრული დამატება.

ყოველ n-ური რიგის კვადრატულ A მატრიცას გარკვეული წესით შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის **დეტერმინანტი** ეწოდება და აღინიშნება $|A|$ ან $detA$ სიმბოლოებით.

თუ $n = 1$, მაშინ $A = (a_{ij})_{1\times1}$ მატრიცა შედგება ერთი a_{11} ელემენტისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი თვით ამ რიცხვს ეწოდება:

$$|A| = a_{11}.$$

თუ $n = 2$, მაშინ $A = (a_{ij})_{2\times2}$ მატრიცის შესაბამისი მეორე რიგის დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგი წესით:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

მაგალითი 8.8 *გამოვთვალოთ დეტერმინანტები:*

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = -13.$$

$$\begin{vmatrix} a & 5 \\ -b & 7 \end{vmatrix} = a \cdot 7 - 5 \cdot (-b) = 7a + 5b.$$

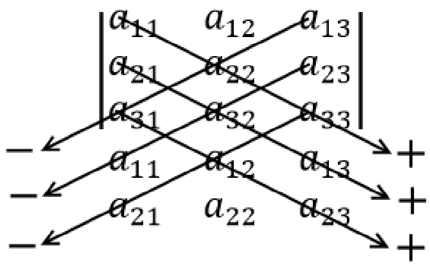
თუ $n = 3$, მაშინ $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ მატრიცის შესაბამისი მე-3 რიგის დეტერმინანტის

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8.5}$$

გამოთვლის ერთ-ერთი წესი მდგომარეობს შემდეგში: მივუწეროთ დეტერმინანტს მეოთხე და მეხუთე სტრიქონად თავისივე პირველი და მეორე სტრიქონი. გავამრავლოთ მთავარი დიაგონალის ელემენტები, მივუმატოთ ამ ნამრავლს დიაგონალის ქვემოთ მის ორ პარალელურ ხაზზე მდებარე სამ-სამი ელემენტის ნამრავლთა ჯამი და შემდეგ იგივე სახის ქმედება განვახორციელოთ არამთავარი დიაგონალის მიმართაც იმ განსხვავებით, რომ ამ შემთხვევაში სამივე შესაკრებს ვიღებთ უარყოფითი ნიშნით. საბოლოოდ, ასე მიღებული ექვსივე შესაკრების ჯამი წარმოადგენს მესამე რიგის მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს.

დეტერმინანტის გამოთვლის ეს წესი ცნობილია **სარუსის წესის** სახელწოდებით.

სარუსის წესი სქემატურად შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



სურ 8.1: სარუსის წესი

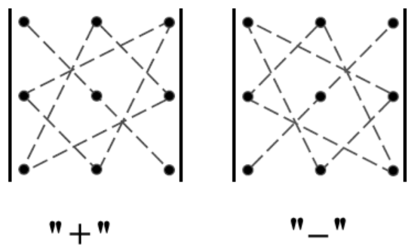
მაგალითი 8.9 *გამოვთვალოთ დეტერმინანტი*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

მივუწეროთ დეტერმინანტს ქვემოდან მისი პირველი და მეორე სტრიქონი და გამოვთვალოთ ექვსი შესაკრები

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = \ & 1\cdot 3\cdot 0 + (-2)\cdot 5\cdot 1 \\ & +(-1)\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot(-1) \\ & -4\cdot 5\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot(-2) \\ = \ & -35. \end{aligned}$$

არსებობს მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის კიდევ ერთი მარტივი წესი, რომელიც **სამკუთხედის წესის** სახელწოდებითაა ცნობილი.



სურ 8.2: სამკუთხედის წესი

ე.ი. " + " ნიშნით უნდა ავიღოთ მთავარ დიაგონალზე მყოფი ელემენტების ნამრავლები და იმ ორი ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებში მყოფი ელემენტების ნამრავლები, რომელთა ფუძეები მთავარი დიაგონალის პარალელურია. ხოლო "−"ნიშნით უნდა ავიღოთ არამთავარ დიაგონალზე მყოფი ელემენტების ნამრავლები და იმ ორი ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებში მყოფი ელემენტების ნამრავლები, რომელთა ფუძეები არამთავარი დიაგონალის პარალელურია.

მაგალითი 8.10 *წინა მაგალითში მოყვანილი დეტერმინანტი გამოვთვალოთ სამკუთხედის წესით:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+(-2)\cdot5\cdot1+(-1)\cdot2\cdot4-1\cdot3\cdot(-1)-4\cdot5\cdot1-0\cdot2\cdot(-2) = -35.$$

n რიგის დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის **მინორი** აღინიშნება M_{ij} სიმბოლოთი და ეწოდება ისეთ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება მოცემული დეტერმინანტისაგან i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით.

მაგალითად, მესამე რიგის (8.5) დეტერმინანტის შემთხვევაში გვექნება:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{31=} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

n რიგის დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის **ალგებრული დამატება** აღინიშნება A_{ij} სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (8.6)$$

მაგალითად, (8.5) დეტერმინანტისთვის გვექნება:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$

n რიგის დეტერმინანტი ტოლია მისი პირველი სტრიქონის ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

ანალოგიური წესი სამართლიანია დეტერმინანტის სხვა ნებისმიერი სტრიქონისა და სვეტის ელემენტებისათვისაც. ამიტომაც ამ წესს სტრიქონებისა და სვეტების მიხედვით დეტერმინანტის გაშლის წესი ჰქვია.

ეს წესი საშუალებას იძლევა n რიგის დეტერმინანტი გამოვთვალოთ n-1 რიგის დეტერმინანტების საშუალებით.

8.7 სავარჯიშოები:

1. მოცემულია A მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -8 & 9 \\ 12 & -9 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

ამოწერეთ A მატრიცის შემდეგი ელემენტები: $a_{12}; a_{24}; a_{14}; a_{32}; a_{34}$.

2. ჩაწერეთ $B = (b_{ij})_{3\times 2}$ მატრიცა, რომლის ზოგადი ელემენტია:

$$1) b_{ij} = 5 \quad 2) b_{ij} = i \quad 3) b_{ij} = i \cdot j$$
$$4) b_{ij} = \min(i,j) \quad 5) b_{ij} = \tfrac{i}{j}.$$

3. მოცემულია მატრიცები:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ:

$$1) A + B \quad 2) A - 3B \quad 3) A^T + C \quad 4) 2B^T + 3C \quad 5) A - 4C^T.$$

4. იპოვეთ $C = -3A^T + B$ მატრიცის უდიდესი და უმცირესი ელემენტების სხვაობის მოდული, თუ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

5. იპოვეთ a, b და c, თუ

$$1)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-2 & 6c \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} a & 9 \\ -3 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+b & 9 \\ b & 2 \\ 6 & c+b \end{pmatrix}.$$

6. იპოვეთ მატრიცათა ნამრავლი:

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ და $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ მატრიცები. ამ მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ტოლობის მართებულობა.

8. A და B მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ ტოლობის მართებულობა:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. A და B მატრიცებისთვის განსაზღვრულია როგორც AB, ასევე BA ნამრავლი. თუ A არის 3×5 რიგის მატრიცა, მაშინ რა უნდა იყოს B მატრიცის განზომილება?

10. A, B და C მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $A(B+C) = AB + AC$ ტოლობის სამართლიანობა, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. იპოვეთ მატრიცების ნამრავლი:

$$ა)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ბ)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. საპრეზიდენტო არჩევნებში მონაწილეობს სამი კანდიდატი. წინასაარჩევნო კომპანიისთვის თითოეული კანდიდატი იყენებს პლაკატებს, სარეკლამო რგოლებსა და საინფორმაციო ბუკლეტებს. **პირველი კანდიდატი** უკვეთავს 10 000 პლაკატს, 2 სთ. სარეკლამო ეთერს, 20 000 ბუკლეტს; **მეორე კანდიდატი**- 12 000 პლაკატს, 1,5 სთ სარეკლამო ეთერს, 24 000 ბუკლეტს, ხოლო **მესამე**-16 000 პლაკატს, 1,5 სთ ეთერს და 15 000 ბუკლეტს. 1 ცალი პლაკატის ღირებულებაა 3 ლარი, 1 წთ სარეკლამო ეთერის- 100 ლარი, ხოლო 1 ცალი ბუკლეტის 1,5 ლარი. რა თანხაა საჭირო თითოეული კანდიდატის კამპანიის ჩასატარებლად? (ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენეთ მატრიცული სიმბოლიკა).

13. ორმა ტურისტმა მაღაზიაში შეიძინა სამი დასახელების პროდუქტი: შაქარი, ყველი და კარაქი. პირველმა შეიძინა 1 კგ. შაქარი, 2კგ. ყველი და 1 კგ. კარაქი. მეორემ კი- 2კგ. შაქარი, 3 კგ. ყველი და 2კგ. კარაქი. განსაზღვრეთ თითოეული ტურისტის დანახარჯი , თუ 1კგ. შაქარი ღირს 1 ლარი, 1 კგ. ყველი- 3 ლარი, ხოლო 1 კგ. კარაქი- 5 ლარი. (ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენეთ მატრიცული სიმბოლიკა).

14. გამოთვალეთ დეტერმინანტი:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \quad 2)\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} \quad 3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4)\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} 5)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

15. გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები როგორც სარუსის, ისე სამკუთხედის წესით:

$$ა)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} ბ)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

16. იპოვეთ მოცემული მატრიცის a_{11} და a_{12} ელემენტების მინორი და ალგებრული დამატება:

$$ა)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ბ)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. მოცემულია დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. გამოიყენეთ სტრიქონებისა და სვეტების მიხედვით დეტერმინანტის გაშლის წესი და მოცემული დეტერმინანტი გამოთვალეთ ორი ხერხით:

ა) გაშალეთ იგი პირველი სტრიქონის მიხედვით,

ბ) გაშალეთ იგი მეორე სვეტის მიხედვით.

18. ამოხსენით განტოლება:

$$1)\begin{vmatrix} x+6 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad 2)\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = 7.$$

19. იპოვეთ $|x_1 \cdot x_2|$, თუ x_1 და x_2 არის შემდეგი განტოლების ფესვები:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 & 2x \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} = 10.$$

ლექცია 9

შებრუნებული მატრიცა და მისი გამოსათვლელი ფორმულა. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

9.1 შებრუნებული მატრიცა

განსაზღვრება 9.1 *ამბობენ, რომ n-ური რიგის კვადრატულ A მატრიცა* ***შებრუნებადია****, თუ არსებობს n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა B, ისეთი რომ*

$$AB = BA = I,$$

სადაც I არის n-ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცა. როდესაც ასეთი B მატრიცა არსებობს, მას A მატრიცის ***შებრუნებული*** *ეწოდება და A^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.*

შებრუნებულ მატრიცებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. მატრიცას თუ აქვს შებრუნებული, მაშინ ის ერთადერთია.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. $I^{-1} = I$.

ვთქვათ, A არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა. გავიხსენოთ, რომ მისი a_{ij} ელემენტის შესაბამისი **მინორი** M_{ij} არის A მატრიცაში i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის წაშლით მიღებული მატრიცის დეტერმინანტი, ხოლო შესაბამისი **ალგებრული დამატება** კი - რიცხვი $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. განვიხილოთ A-ს ტრანსპონირებული მატრიცა A^T. თუ A^T-ში თითოეულ წევრს შევცვლით მისი ალგებრული დამატებით, მივიღებთ მატრიცას, რომელსაც A მატრიცას **მიკავშირებული მატრიცა** ეწოდება და A^* სიმბო-

ლოთი აღინიშნება. მაშასადამე,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

მაგალითად, თუ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

და თუ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

ყველა კვადრატული მატრიცა შებრუნებადი არაა. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 9.1 *n-ური რიგის კვადრატული A მატრიცა შებრუნებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია: $|A| \neq 0$. როდესაც ეს პირობა სრულდება, მაშინ A -ს შებრუნებული მატრიცა ასე გამოითვლება:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

ისეთ კვადრატულ მატრიცას, რომლის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, გადაგვარებული ეწოდება. მაშასადამე, მატრიცა შებრუნებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არაგადაგვარებულია.

მაგალითი 9.1 *დავადგინოთ, არის თუ არა*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

მატრიცა შებრუნებადი და თუ შებრუნებადია, ვიპოვოთ მისი შებრუნებული მატრიცა.

ამოხსნა. *იმის დასადგენად, არის თუ არა A შებრუნებადი, უნდა გამოვთვალოთ მისი დეტერმინანტი:* $|A| = -4\cdot 2 - 1\cdot 3 = -11$. *რადგან* $-11 \neq 0$, *ამიტომ A შებრუნებადია. მისი შებრუნებულის საპოვნელად კი ჯერ უნდა ვიპოვოთ მისი მიკავშირებული მატრიცა* A^*. *რადგან*

$$A_{11} = 2,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = -4,$$

ამიტომ

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

და, მაშასადამე,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/11 & 1/11 \\ 3/11 & 4/11 \end{pmatrix}.$$

მაგალითი 9.2 *ვაჩვენოთ, რომ*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცა შებრუნებადია და ვიპოვოთ მისი შებრუნებული.
ამოხსნა. *პირველ რიგში გამოვთვალოთ მოცემული მატრიცას დეტერმინანტი:*

$$|A| = 4\cdot(-3)\cdot 1 + 2\cdot(-5)\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot 2 - 4\cdot(-3)\cdot 2 - (-1)\cdot 3\cdot(-5) =$$

$$= -12 - 20 - 18 + 12 + 24 + 15 = 1.$$

რადგან $1 \neq 0$, *ამიტომ A შებრუნებადია. ახლა ვიპოვოთ A-ს მიკავშირებული A^* მატრიცა:*

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

რადგან $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, *მივიღებთ:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.2 წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \ a_{i2}x_2 + \ \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.1}$$

სადაც a_{ij} , b_j $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$ მოცემული რიცხვებია, ხოლო $x_1, x_2, \cdots, x_n$ კი -საძიებელი უცნობები. თუ უცნობთა რაოდენობა ტოლია განტოლებათა რაოდენობის, ანუ $n = m$, მაშინ (9.1) სისტემას **კვადრატული სისტემა** ეწოდება.

a_{ij} რიცხვებს **სისტემის კოეფიციენტები**, ხოლო b_i რიცხვებს **სისტემის თავისუფალი წევრები** ეწოდება. თუ ყველა თავისუფალი წევრი ნულია, ანუ $b_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$, მაშინ სისტემას ეწოდება **ერთგვაროვანი სისტემა**. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ანუ როცა ერთი მაინც თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ სისტემას **არაერთგვაროვანი სისტემა** ეწოდება.

$(c_1, c_2, .., c_n)$ რიცხვთა დალაგებულ n-ეულს ეწოდება (9.1) სისტემის ამონახსნი, თუ სისტემის ნებისმიერ განტოლებაში x_1, x_2,...,x_n ცვლადების ნაცვლად შესაბამისად c_1, c_2,...,c_n რიცხვების ჩაწერის შედეგად, ტოლობის ორივე მხარეში მიიღება ტოლი რიცხვები. თუ სისტემას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს, მაშინ მას **თავსებადი სისტემა** ეწოდება, ხოლო თუ მას არცერთი ამონახსნი არ გააჩნია, მაშინ სისტემას **არათავსებადი** ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ თუ (9.1) განტოლებათა სისტემა ერთგვაროვანია, მაშინ ის აუცილებლად თავსებადია, რადგან მას სულ მცირე ერთი ამონახსნი მაინც გააჩნია. კერძოდ, ეს ამონახსნია n ცალი ნულისგან შედგენილი n-ეული $(0, 0, ..., 0)$ და მას **ნულოვანი ამონახსნი** ეწოდება.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

მაშინ ადვილად გამომდინარეობს მატრიცების გამრავლების წესიდან, რომ წრფივ განტოლებათა (9.1) სისტემა მატრიცულად ასე ჩაიწერება

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{9.2}$$

ისევ მატრიცების გამრავლების წესიდან მიიღება, რომ (9.2) მატრიცული განტოლების ამონახსნი არის n-განზომილებიანი მატრიცა $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

A მატრიცას წრფივ განტოლებათა (9.1) **სისტემის მატრიცა**, $\mathbf{x}$ მატრიცას - **უცნობების სვეტი**, ხოლო $\mathbf{b}$ ვექტორს კი **სისტემის მარჯვენა მხარე** ან **თავისუფალი წევრების მატრიცა** ეწოდება. წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს აგრეთვე **სისტემის გაფართოებული მატრიცა**, რომელიც A მატრიცასაგან მასში მარჯვენა მხარეს $\mathbf{b}$ ვექტორ-სვეტის ჩამატებით მიიღება და რომელიც $(A|\mathbf{b})$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაშასადამე,

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ ხშირად ეს ჩამატებული სვეტი ვერტიკალური ხაზით არ გამოიყოფა:

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

მაგალითი 9.3 *ვთქვათ, გვაქვს სისტემა*

$$\begin{cases} -2x - \ \ y + 5z = -9 \\ \ \ 4x + 6y - 7z = 6 \\ \ -x - \ \ y + 5z = -1 \end{cases}$$

მაშინ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ (A|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & -9 \\ 4 & 6 & -7 & 6 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

წრფივ განტოლებათა სისტემების შესწავლისათვის პირველ რიგში საჭიროა მისი თავსებადობის გამოკვლევა. თუ სისტემა თავსებადია, მაშინ ისმის ყველა ამონახსნის პოვნის საკითხი. ჩვენ შევისწავლით სისტემების გამოკვლევის და ამოხსნის რამდენიმე მეთოდს. ჯერ განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა კვადრატული სისტემები.

9.3 კვადრატული სისტემის ამოხსნის მატრიცული ხერხი

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც უცნობებისა და განტოლებების რაოდენობა ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{9.3}$$

მაშინ ცხადია,სისტემის მატრიცა იქნება n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ A მატრიცის დეტერმინანტი და აღვნიშნოთ იგი Δ-თი. მაშინ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

და მას (9.3) **სისტემის მთავარი დეტერმინანტი** ეწოდება.

დავუშვათ, რომ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე. ი. $\Delta \neq 0$. მაშინ, როგორც ვიცით, არსებობს A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა A^{-1}. თუ (9.3) სისტემის მატრიცული წარმოდგენის

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ორივე მხარეს მარცხნიდან გავამრავლებთ A^{-1}–ზე, მივიღებთ

$$A^{-1} \cdot \mathbf{b} = A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \mathbf{x} = I \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

მაშასადამე,

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}, \tag{9.4}$$

რომელიც წარმოადგენს (9.3) კვადრატული სისტემის მატრიცულ ამონახსნს. ცხადია, ეს ამონახსნი ერთადერთია.

მაგალითი 9.4 *ამოვხსნათ მატრიცული ხერხით წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა*

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

ამოხსნა. *შევადგინოთ მოცემული სისტემის მატრიცა*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ მთავარი დეტერმინანტი სამკუთხედის წესით:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 5.$$

რადგან $\Delta \neq 0$, ამიტომ არსებობს A მატრიცის შებრუნებული A^{-1}. მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

ახლა თუ განვიხილავთ მოცემული სისტემის უცნობებისა და თავისუფალი წევრების სვეტ-მატრიცებს

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

მოცემული კვადრატული სისტემისთვის (9.4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

რაც ნიშნავს, რომ $x = 1$, $y = -2$ და $z = 3$. ამრიგად, სამეული $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ არის მოცემული სისტემის ერთადერთი ამონახსნი.

9.4 კვადრატული სისტემების ამოხსნის კრამერის წესი

განვიხილოთ კვლავ წრფივ განტოლებათა სისტემა (9.3), რომელშიც უცნობებისა და განტოლებების რაოდენობა ემთხვევა და ამ სისტემის მთავარი დეტერმინატი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თითოეული $j = 1, 2, \cdots, n$ ინდექსისათვის განვსაზღვროთ დეტერმინატი Δ_j, რომელიც მიიღება Δ-საგან მასში j-ური სვეტის ნაცვლად თავისუფალი წევრების სვეტის ჩანაცვლებით, და რომელსაც **სისტემის დამხმარე j-ური დეტერმინანტი** ეწოდება. მაშასადამე,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

თეორემა 9.2 (კრამერის თეორემა) *თუ მოცემულია წრფივ განტოლებათა (9.3) სისტემა და სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ ეს სისტემა თავსებადია, აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, x_j = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \cdots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

ამ ფორმულებს **კრამერის ფორმულები** ეწოდება.

კრამერის თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

სახის სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი. მაშასადამე, ასეთ სისტემას არანულოვანი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ მაშინ, როცა $\Delta = 0$. საზოგადოდ, არაერთგვაროვანი სისტემისთვის, როცა $\Delta = 0$, კრამერის თეორემა ვერ გვაძლებს ინფორმაციას სისტემის ამონახსნის არსებობის შესახებ. დამატებითი გამოკვლევებით ირკვევა, რომ თუ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა კვადრატული სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ხოლო ერთი მაინც დამხმარე დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ სისტემას არ აქვს ამონახსნი, ხოლო თუ ყველა დამხმარე დეტერმინანტიც ნულის ტოლია, მაშინ სისტემას ან არ აქვს ამონახსნი ან აქვს უამრავი ამონახსნი.

მაგალითი 9.5 *ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა კრამერის ფორმულების გამოყენებით.*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

ამოხსნა. *სისტემის მთავარი დეტერმინანტი*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

ე.ი. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიცემა კრამერის ფორმულებით:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

რადგან

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -24,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36,$$

ამიტომ

$$x_1 = \frac{-12}{-12} = 1,\ x_2 = \frac{-24}{-12} = 2, x_3 = \frac{-36}{-12} = 3.$$

მაგალითი 9.6 *ვთქვათ საწარმო ამზადებს სამი I, II და III სახის პროდუქციას, რისთვისაც იყენებს სამი - N_1, N_2 და N_3 სახის ნედლეულს. საწარმოს გააჩნია N_1, N_2 და N_3 სახის ნედლეულის მარაგი შესაბამისად 77 , 114 და 48 ერთეული. I სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის წარმოება მოითხოვს N_1, N_2 და N_3 სახის ნედლეულების შესაბამისად 2, 4 და 2 ერთეულს; II სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის წარმოება მოითხოვს N_1, N_2 და N_3 ნედლეულების შესაბამისად 4, 3 და 1 ერთეულს; III სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის წარმოება მოითხოვს N_1, N_2 და N_3 ნედლეულების შესაბამისად 1, 7 და 3 ერთეულს. საწარმოს აინტერესებს რა რაოდენობით უნდა აწარმოოს I, II და III სახის პროდუქცია, რომ სრულად აითვისოს არსებული ნედლეული.*

ამოხსნა. *შევადგინოთ 3×3 მატრიცა, რომელიც გვიჩვენებს ნედლეულის განაწილებას I, II და III პროდუქციების ერთეულებზე*

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ I & II & III \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftrightsquigarrow N_1 \text{ ნედლეული} \\ \leftrightsquigarrow N_2 \text{ ნედლეული} \\ \leftrightsquigarrow N_3 \text{ ნედლეული} \\ \\ \\ \end{array}$$

ვთქვათ პროდუქციის სრულად ასათვისებლად საწარმომ უნდა აწარმოოს I, II და III პროდუქციის შესაბამისად x_1, x_2 და x_3 რაოდენობა. ადვილი სანახავია, რომ x_1, x_2 და x_3 ცვლადები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 77 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 114 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 48. \end{cases}$$

სისტემა ამოვხსნათ კრამერის წესის გამოყენებით. შევნიშნოთ, რომ სისტემის მატრიცა არის სწორედ ჩვენს მიერ აგებული A მატრიცა. გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

რადგან $\Delta \neq 0$ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. მისი პოვნისთვის უნდა გამოვთვალოთ დამხმარე დეტერმინანტები Δ_1, Δ_2 და Δ_3. როგორც ვიცით Δ_1 მიიღება Δ-ში პირველი სვეტის ელემენტების ჩანაცვლებით თავისუფალი წევრებით, ე. ი.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 77 & 4 & 1 \\ 114 & 3 & 7 \\ 48 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 77 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 114 & 7 \\ 48 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 114 & 3 \\ 48 & 1 \end{vmatrix} = 100.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 77 & 1 \\ 4 & 114 & 7 \\ 2 & 48 & 3 \end{vmatrix} = 130 \quad \text{და} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 77 \\ 4 & 3 & 114 \\ 2 & 1 & 48 \end{vmatrix} = 50.$$

კრამერის ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 10 \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 13 \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5. \end{cases}$$

ამრიგად, დასახული ამოცანის შესასრულებლად საწარმომ უნდა აწარმოოს 10 *ცალი* I *სახის პროდუქცია,* 13 *ცალი* II *სახის პროდუქცია და* 5 *ცალი* III *სახის პროდუქცია.*

რა თქმა უნდა წინა მაგალითში განხილული სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია მატრიცული ხერხის გამოყენებით. ამისათვის უნდა შევადგინოთ მატრიცები

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{pmatrix}$$

და ამოვხსნათ მატრიცული განტოლება $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. ამ მატრიცული ტოლობის ეკონომიკური შინაარსი ასეთია: თუ "პროდუქციების ერთეულებზე ნედლეულის განაწილების" A მატრიცას გავამრავლებთ "გამოშვებული პროდუქციების რაოდენობის" $\mathbf{x}$ მატრიცზე მივიღებთ "საჭირო ნედლეულების რაოდენობის" $\mathbf{b}$ მატრიცას.

9.5 წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით

ახლა განვიხილავთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდს, რომელსაც **უცნობთა თანამიმდევრობით გამორიცხვის გაუსის მეთოდი** ეწოდება. ამ მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია ამოიხსნას არა მხოლოდ კვადრატული სისტემები, არამედ ნებისმიერი n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემა. ამ მეთოდის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ გარკვეული გარდაქმნებით (უცნობების მიმდევრობით გამორიცხვით) სისტემა დაიყვანება მის ტოლფას, უფრო მარტივად ამოსახსნელ სისტემაზე.

ერთი და იგივე უცნობების შემცველი წრფივ განტოლებათა ორ სისტემას ეწოდება **ტოლფასი** (ან **ექვივალენტური**) თუ მათი ამონახსნების სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა.

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი დაფუძნებულია წრფივ განტოლებათა სისტემის ისეთ გარდაქმნაზე, რომლის შედეგად ვღებულობთ მოცემული სისტემის ტოლფას, მაგრამ უფრო მარტივად ამოსახსნელ ახალ სისტემას. კერძოდ, თუ

(I) სისტემის ნებისმიერი ორ განტოლებას ადგილებს გავუცვლით,

(II) სისტემის რომელიმე განტოლებას გავამრავლებთ ნულისგან განსხვავებულ რიცხვზე,

(III) რომელიმე განტოლებას მივუმატებთ სხვა რომელიმე განტოლებას გამრავლე-ბულს ნულისგან განსხვავებულ რიცხვზე,

ხოლო დანარჩენ განტოლებებს უცვლელად დავტოვებთ, მივიღებთ მოცემული სისტე-მის ტოლფას სისტემას.

სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის მაგალითზე ვნახოთ, თუ როგორ შიძ-ლება მისი ამოხსნა გაუსის მეთოდის გამოყენებით. განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 9.7 *ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა გაუსის მეთო-დით.*

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+7x_2-3x_3=7 \\ 3x_1+\ \ x_2-2x_3=-1 \end{cases}$$

ამოხსნა. *გამოვრიცხოთ მეორე და მესამე განტოლებებიდან x_1 უცნობი: მეორე გან-ტოლებას გამოვაკლოთ პირველი განტოლება გამრავლებული 2 -ზე, ხოლო მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი გამრავლებული 3 -ზე, მივიღებთ:*

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1 \\ \qquad x_2+\ \ x_3=5 \\ \ \ -8x_2+4x_3=-4 \end{cases}$$

ახლა პირველი განტოლება დავტოვოთ უცვლელად და განვიხილოთ მეორე და მესამე განტოლებისგან შემდგარი სისტემა. შემდეგ გამოვრიცხოთ მესამე განტო-ლებიდან x_2 უცნობი შემდეგნაირად: მესამე განტოლებას მივუმატოთ მეორე გან-ტოლება გამრავლებული 8 -ზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-\ \ 2x_3=1 \\ \qquad x_2+\ \ \ x_3=5 \\ \qquad\qquad 12x_3=36 \end{cases}$$

ბოლო განტოლებიდან ვიპოვოთ $x_3=3$ და ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა მეორე განტო-ლებაში, საიდანაც მივიღებთ $x_2=5-3=2$, შემდეგ x_2 და x_3-ის ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ პირველ განტოლებაში და მივიღებთ, რომ $x_3=1$. მაშასადამე, მოცემულ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

მაგალითი 9.8 *ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა გაუსის მეთო-დით.*

$$\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=2 \\ 2x_1-7x_2+7x_3=6 \\ x_1-3x_2+4x_3=5 \end{cases}$$

ამოხსნა. *პირველ რიგში, გამოვრიცხოთ მეორე და მესამე განტოლებებიდან x_1 უც-ნობი. ამისათვის მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი განტოლება გამრავ-*

ლებული 2 -ზე, ხოლო მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი; მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\ \ x_2 + \ x_3 = 2 \\ \qquad\ \ x_2 + \ x_3 = 3 \end{cases}$$

ახლა, მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\ \ x_2 + \ x_3 = 2 \\ \qquad\qquad 0x_3 = 1, \end{cases}$$

რომლის ერთ-ერთი (კერძოდ, მესამე) განტოლებაში ყველა უცნობის კოეფიციენტი 0*-ია, ხოლო თავისუფალი წევრი არანულოვანი. ამიტომ სისტემა არათავსებადია.*

გაუსის მეთოდით შეიძლება ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემა და ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი მაშინ, როცა სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ზოგადი ამონახსნიდან მიიღება სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი.

მაგალითი 9.9 *გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

ამოხსნა. *სისტემის პირველი განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ პირველი უცნობი ყველა მომდევნო განტოლებიდან. ამისათვის მეორე განტოლებას წევრწევრად დავუმატოთ პირველი განტოლება გამრავლებული (-2)-ზე, ხოლო მესამე განტოლებას – პირველი განტოლება გამრავლებული (-3)-ზე. სისტემა მიიღებს სახეს*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

ცხადია, რომ ეს სისტემა ტოლფასია შემდეგი სისტემის

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

ერთ-ერთი უცნობი მივიღოთ ე.წ. თავისუფალ უცნობად და დანარჩენი უცნობები გამოვსახოთ მისი საშუალებით. მაგალითად, თავისუფალ უცნობად მივიღოთ x_3 *უცნობი და უკანასკნელი სისტემის ბოლო განტოლებიდან* x_2 *გამოვსახოთ მისი საშუალებით:*

$$x_2 = 2 - 3x_3,$$

შემდეგ კი, ამ ტოლობის გათვალისწინებით, პირველ განტოლებიდან, თავისუფალი უცნობის საშუალებით გამოვსახოთ x_1 *უცნობი. მივიღებთ*

$$x_1 + 2 - 3x_3 - 2x_3 = 1,$$

საიდანაც

$$x_1 = 5x_3 - 1.$$

მაშინ, სისტემის ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$(x_1 = 5x_3 - 1;\ x_2 = 2 - 3x_3;\ x_3),\ \ x_3 \in \mathbb{R}.$$

თუ თავისუფალ უცნობს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან ნებისმიერად და ამ ფორმულების მიხედვით გამოვითვლით დანარჩენ უცნობებსაც, მივიღებთ სისტემის ყველა ამონახსნს. მაგალითად, თუ $x_3 = 1$ *ამონახსნი იქნება სამეული* $(4; -1; 1)$*, ხოლო თუ* $x_3 = 3$*, მაშინ ამონახსნი იქნება სამეული* $(14; -7; 3)$.

შევნიშნოთ, რომ კარგად ცნობილი ჩასმის ხერხისგან განსხვავებით, გაუსის მეთოდი საშუალებას იძლევა ამოხსნის პროცესი ჩავწეროთ უფრო ეკონომიურად – მატრიცულად. რაც განსაკუთრებით მომგებიანია „დიდი სისტემების" შემთხვევაში.

მაგალითი 9.10 *გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა. ამოხსნა ჩავწეროთ მატრიცულად*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

ამოხსნა.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 + (-3)R_1 \Rightarrow R_3]{R_2 + (-2)R_1 \Rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 0 & -7 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)R_3 \Rightarrow R_3]{(-1)R_2 \Rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + (-7)R_2 \Rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -16 & -80 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{16}R_3 \Rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

აქ R_i, $i = 1, 2, 3$ *აღნიშნავს* i*-ურ სტრიქონს, ხოლო* $R_i + \alpha R_j \Rightarrow R_i$ *კი -* i*-ური სტრიქონისათვის* α *რიცხვზე გამრავლებული* j*-ური სტრიქონის დამატებას.*

გაუსის მეთოდი ჩვენ გამოვიყენეთ სამუცნობიანი სამი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემებისათვის. წრფივ განტოლებათა (9.1) ზოგადი სისტემისათვს, გაუსის მეთოდი გამოიყენება შემდეგნაირად. პირველ რიგში, ვგულისხმობთ, რომ პირველ განტოლებაში x_1 უცნობთან მდგომი კოეფიციენტი $a_{11} \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოვნახავდით პირველივე იმ განტოლებას, რომელშიც x_1-ის კოეფიციენტი არანულოვანია და მას და პირველ განტოლებას ადგილებს შევუცლიდით. ახლა გამოვრიცხოთ სისტემის ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა, x_1 უცნობი. ამისათვის სისტემის მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი განტოლება გამრავლებული $\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ზე, შემდეგ მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი გამრავლებული $\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ზე, და ა.შ. უკანასკნელ განტოლებას

გამოვაკლოთ პირველი გამრავლებული $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$-ზე. ამ გზით მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \ \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{m2}x_2 + \ \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

ამის შემდეგ პირველ განტოლებას აღარ შევეხოთ და ანალოგიური პროცესი გავიმეოროთ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \ \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + \ \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \ \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

მიღებულ ახალ სისტემაში ყველა განტოლებიდან, გარდა მეორისა, გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი და ა.შ. უცნობთა გამორიცხვის აღნიშნული პროცესი გავაგრძელოთ. შევნიშნოთ, რომ თუ ამ პროცესის რომელიმე ეტაპზე მივიღებთ $0x_i + 0x_{i+1} + \cdots + 0x_n = 0, (1 < i < n)$ სახის განტოლება, მას უგულვეყოფთ (ანუ უბრალოდ წავშლით). თუ პროცესის დამთვარების შედეგად მივიღებთ ისეთ სისტემას, რომლის ერთ-ერთ განტოლებაში ყველა უცნობის კოეფიციენტი 0-ია, ხოლო თავისუფალი წევრი არანულოვანი, მაშინ სისტემა არათავსებადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ n უცნობიან r განტოლებას, სადაც $r \leq m$ და $r \leq n$ და ამ შემთხვევაში სისტემა თავსებადია. კერძოდ, თუ $r = n$, მაშინ განტოლებათა (9.1) სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო თუ $r < n$, მაშინ სისტემას ექნება ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. პირველ შემთხვევაში (ე.ი. როცა $r = n$), (9.1) სისტემა მიიღებს სამკუთხა სახეს, რომლის ბოლო განტოლებაში არის მხოლოდ უცნობი x_n, საიდანაც ცალსახად ვიპოვით x_n-ის მნიშვნელობას, რომლის ბოლოს წინა განტოლებაში შეტანით ვიპოვით x_{n-1}-ის მნიშვნელობას და ასე უკუსვლით, თანამიმდევრობით, ვიპოვით $x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots, x_1$ უცნობების მნიშვნელობებსაც. როდესაც $r < n$, მაშინ სისტემა მიიღებს ტრაპეციის ფორმას, რომლის ბოლო განტოლება შეიცავს $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$უცნობებს. თუ ამ განტოლებიდან x_n-ს გამოვსახავთ $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_{n-1}$ უცნობების საშუალებით, მიღებულ სისტემაში ქვემოდან ზემოთ უკუსვლით მივიღებთ $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ უცნობების საშუალებით გამოსახულ $x_{r-1}, x_{r-2}, \cdots, x_1$ უცნობების მნიშვნელობებს. ამით მივიღებთ სისტემის ზოგად ამონახსნს, რომელშიც $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ უცნობების კონკრეტული მნიშვნელობების ჩასმით მიიღება (9.1) სისტემის ყველა ამონახსნი.

9.6 სავარჯიშოები

1. შებრუნებადია თუ არა შემდეგი მატრიცები:

$$\text{ა)}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{ბ)}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{გ)}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 10 \end{pmatrix}. \quad \text{დ)}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. იპოვეთ შემდეგი მატრიცების შებრუნებული მატრიცები:

$$\text{ა)}\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{ბ)}\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}. \quad \text{გ)}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{დ)}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. იპოვეთ

$$B=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცის
ა) b_{23} ელემენტი (ანუ B^{-1} მატრიცის მეორე სტრიქონის და მესამე სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი);
ბ) b_{12} ელემენტი;
გ) მეორე სტრიქონის ელემენტები;
დ) მესამე სვეტის ელემენტები.

4. იპოვეთ $A^{-1}B+2A$, თუ $A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$, სადაც A^{-1} არის A-ს შებრუნებული მატრიცა.

5. იპოვეთ A მატრიცა, თუ ცნობილია, რომ $AB=I$, სადაც $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&0&1\\1&4&2\end{pmatrix}$, ხოლო $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. იპოვეთ X მატრიცა შემდეგი მატრიცული განტოლებიდან:

ა)$X\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0\\4&4\end{pmatrix}$. ბ) $\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. გ) $\begin{pmatrix}2&1&-4\\-3&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}$.

დ) $\begin{pmatrix}-2&0\\1&3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}4&1\\-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\5&1\end{pmatrix}$. ე) $\begin{pmatrix}2&3\\-4&5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\5&0\end{pmatrix}$.

7. ჩაწერეთ წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცული განტოლების სახით და ამოხსენით მატრიცული ხერხით:

ა) $\begin{cases}x_1+2x_2=1\\4x_1-x_2=13\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}2x_1+x_2=8\\x_1-4x_2=-5\end{cases}$

გ) $\begin{cases}3x_1+x_2-5x_3=-1\\2x_1+x_2+3x_3=-7\\x_1-3x_3-x_3=-1\end{cases}$ დ) $\begin{cases}2x+y-2z=4\\3x+z=2\\x+2y+z=0\end{cases}$

8. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა კრამერის ხერხით

ა) $\begin{cases}2x+5y=8\\-x+3y=7\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}3x-y=0\\y+2x=5\end{cases}$ გ) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\3x_1+4x_2-x_3=7\\3x_1-2x_2+4x_3=16\end{cases}$

დ) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$ ე) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=11\\2x_1+x_2+3x_3=1\end{cases}$ ვ) $\begin{cases}2x-y=7\\3x+z=13\\y+2z=7\end{cases}$

9. მოცემული მატრიცული ტოლობები ჩაწერეთ წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით და იპოვეთ ცვლადები კრამერის ფორმულებით:

ა) $\begin{pmatrix} x_1 & 2 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ x_1 & x_2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \end{pmatrix}$. ბ) $\begin{pmatrix} x_1 & 2 & x_2 \\ 2x_1 & x_2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix}$.

10. ამოხსენით სისტემა გაუსის მეთოდით:

ა) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9 \\ -x_1 - 12x_2 + 14x_3 = 1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

11. იპოვეთ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 9 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი გაუსის მეთოდით და ის კერძო ამონახსნი, რომლისთვისაც $x_3 = 2$.

12. მოცემულია მატრიცული

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ტოლობა. ჩაწერეთ ეს ტოლობა წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით და იპოვეთ ზოგადი ამონახსნი.

13. იპოვეთ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი და ზოგადი ამონახსნიდან მიიღეთ კერძო ამონახსნი, რომლისთვისაც $x_4 = 2$.

ლექცია 10

ვექტორები

10.1 ვექტორის ცნება

ვთქვათ, ფირმამ 2017 წელს გამოუშვა 12,3 მლნ ლარის პროდუქცია, 2018 წელს - 11,2 მლნ-ის, ხოლო 2019 წელს კი - 13,5 მლნ-ის. ცხრილის სახით ეს მონაცემები ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

წელი	გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა
2017 წელი	12,3
2018 წელი	11,2
2019 წელი	13,5

როდესაც უკვე ცნობილია, რომ ამ ცხრილში პირველი სტრიქონში მდგომი რიცხვი აღნიშნავს ფირმის მიერ 2017 წელს გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას მლნ. ლარებში, მეორე სტრიქონში მდგომი რიცხვი - 2018 წელს გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას, ხოლო მესამეში მდგომი კი - 2019 წელს გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას, ზემოთ მოყვანილი ცხრილი უფრო კომპაქტურად ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$\begin{pmatrix} 12,3 \\ 11,2 \\ 13,5 \end{pmatrix}$$

ასეთ ობიექტს **3-განზომილებიანი (სვეტი-) ვექტორი** ეწოდება. აქ სიტყვა „სვეტი“ იმიტომ გამოვიყენეთ, რომ არსებული რიცხვითი მონაცემები ჩამოვწერეთ სვეტის ფორმით. ამ მონაცემების ექვივალენტური წარმოდგენა შემდეგნაირადაც შეიძლებოდა:

$$\begin{pmatrix} 12,3 & 11,2 & 13,5 \end{pmatrix}.$$

ასეთ ობიექტებს **3-განზომილებიანი (სტრიქონი-) ვექტორი** ეწოდება. ვექტორის განზომილება 3 აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ სვეტში შემავალი მონაცემების (რომელთაც მოცემული ვექტორის **კომპონენტები** ეწოდება) რაოდენობა არის სამი.

თუ განხილულ მაგალითში 2016 წლის მონაცემებსაც გავითვალისწინებდით, მაშინ ზემოთ მოყვანილ ცხრილში კიდევ ერთი სტრიქონის, ხოლო ვექტორში კი -კიდევ ერთი კომპონენტის დამატება დაგვჭირდებოდა. ბუნებრივია, რომ მიღებულ ვექტორს ვუწოდებდით 4-განზომილებიან ვექტორს. პირიქით, თუ მონაცემებიდან ამოვიღებდით მაგალითად 2017 წელს, მაშინ მივიღებდით 2-განზომილებიან ვექტორს. ამ მსჯელობას მივყავართ იმ აზრამდე, რომ ზოგადად, პრაქტიკული საჭიროებიდან გამომდინარე,

კომპონენტების რაოდენობა შეიძლება იყოს ნებისმიერი. აქედან გამომდინარე გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება 10.1 *ვთქვათ, n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია.* ***n-განზომილებიანი ვექტორი*** *ეწოდება n ცალი ნამდვილი რიცხვისაგან შედგენილ სვეტს:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ რიცხვებს, შესაბამისად, მოცემული ვექტორის ***პირველი, მეორე, და ა.შ. n-ური კომპონენტები*** *ან* ***კოორდინატები*** *ეწოდებათ.*

როგორც ვთქვით, ვექტორი შეიძლება სტრიქონის სახითაც ჩაიწეროს. აქ ჩვენ ძირითადად სვეტის სახით ჩაწერილ ვექტორებს გამოვიყენებთ

მაგალითი 10.1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ *არის 3-განზომილებიანი ვექტორი, რომლის პირველი კომპონენტია 1, მეორე – 9, ხოლო მესამე კი – 6. (7) არის ერთგანზომილებიანი ვექტორი, რომლის პირველი (და ერთადერთი კომპონენტია) 7.*

ახლა მოვიყვანოთ ვექტორის რამდენიმე მაგალითი, რომლებიც რეალურ სიტუაციებთანაა დაკავშირებული.

მაგალითი 10.2 ***ექსპერიმენტის მონაცემები.*** *მეცნიერი ატარებს გარკვეული სახის ექსპერიმენტს. ყოველი ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგად მიიღება 15 რიცხვითი მონაცემი x_1, x_2, ..., x_{15}. მაშინ თითოეული ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგები შეიძლება ჩაიწეროს 15-განზომილებიანი ვექტორის სახით* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{15} \end{pmatrix}$*, სადაც x_1 არის ჩატარებული ექსპერიმენტის პირველი მონაცემი, x_2 - მეორესი, და ა.შ., x_{15} - მეთხუთმეტესი.*

მაგალითი 10.3 ***გადაზიდვის კომპანია.*** *ტვირთების გადამზიდ კომპანიას მის განკარგულებაში მყოფი სატვირთო ავტომობილების გასაჩერებლად მოწყობილი აქვს*

12 ავტოპარკი. დროის ნებისმიერ მომენტში სატვირთო ავტომობილების განაწილება ავტოპარკების მიხედვით შეიძლება აღიწეროს 12-განზომილებიანი ვექტორის სახით $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{12} \end{pmatrix}$*, სადაც* x_1 *არის პირველ ავტოპარკში გაჩერებული სატვირთო მანქანების რაოდენობა,* x_2 *- მეორეში, და ა.შ.,* x_{12} *- მეთორმეტეში.*

მაგალითი 10.4 ***ფერადი გამოსახულება.*** *მონიტორზე ფერადი გამოსახულების მისაღებად მონიტორის თითოეულ პიქსელს უთანადებენ სამ რიცხვს* h, s, b*, რომლებიც გამოხატავენ, შესაბამისად, ამ პიქსელის ტონალობას (hue), გაჯერებას (saturation), და სიკაშკაშეს (brightness). ამიტომ ფერადი გამოსახულება შეიძლება წარმოდგინდეს როგორც შემდეგი სახის 5-განზომილებიანი ვექტორების სიმრავლე* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ h \\ s \\ b \end{pmatrix}$*, სადაც* x *და* y *არის მონიტორზე პიქსელის მდებარეობის განმსაზღვრელი პირველი და მეორე კოორდნატი,* s*,* h *და* b *კი - შესაბამისად, მისი ტონალობა, გაჯერება და სიკაშკაშე.*

მაგალითი 10.5 ***ეკონომიკა.*** *ეკონომიკური ანალიზის ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდი მდგომარეობს ეკონომიკის დარგებად (წარმოება, მომსახურება, სოფლის მეურნეობა და სხვა) დაყოფასა და შემდეგ თითოეული ამ დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის მოცულობების შეფასებაში. მაშასადამე, თუ მაგალითად ეკონომიკა შედგება* 10 *დარგისაგან, მაშინ ამ ეკონომიკის მთლიანი წარმოებული პროდუქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ* 10*- განზომილებიანი ვექტორის სახით* $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{10} \end{pmatrix}$*, სადაც* d_1 *არის პირველი დარგის მიერ წარმოებული პროდუქციის მოცულობა,* d_2*- მეორესი, და ა.შ.,* d_{10}*- მეათესი.*

n-განზომილებიანი ვექტორების სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ვექტორები გამუქებული ლათინური პატარა ასოებით $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \cdots$ აღინიშნება. მაგალითად, ჩანაწერი $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ნიშნავს, რომ x არის n-განზომილებიანი ვექტორი. ამ ვექტორის პირველი კოორდინატი x_1 სიმბოლოთი, მეორე - x_2-ით, და ა.შ., n-ური კოორდინატი - x_n-ით აღინიშნება. მაშასადამე, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

განსაზღვრება 10.2 *ორ ვექტორს ეწოდება **ტოლი**, თუ მათი განზომილებები და შესაბამისი კომპონენტები ტოლია. ე.ი.* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ და $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ *ვექტორები ტოლია, თუ* $n = m$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ და ა. შ., $x_n = y_n$.

მაგალითი 10.6 *ვექტორები*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

არაა ტოლი, რადგან მათი განზომილებები განსხვავებულია: $\boldsymbol{x}$*-ის განზომილებაა 3, ხოლო* $\boldsymbol{y}$*-ის კი - 4.*

მაგალითი 10.7 *ვექტორები*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

მიუხედავად იმისა, რომ მათი განზომილებები ტოლია, არაა ტოლი ვექტორები, რადგან მათი მეორე კომპონენტები განსხვავებულია: $x_2 = 2$*, ხოლო* $y_2 = -2$*.*

მაგალითი 10.8 *ვექტორები*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ტოლია, რადგან მათი განზომილებებიც და შესაბამისი კოორდინატებიც ტოლია.

10.2 ოპერაციები ვექტორებზე

10.2.1 ვექტორების შეკრება.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 10.9 *რომელიღაც ქვეყნის სახელმწიფო შემოსავლების კომპონენტებია*

- *საგადასახადო შემოსავლები,*
- *გრანტები და*
- *სხვა შემოსავლები*

2018 წელს ამ ქვეყნის სახელმწიფო შემოსავლების მოცულობა მლრდ ლარებში მოცემულია შემდეგი 3-განზომილებიანი ვექტორით:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ხოლო 2019 წლის კი- ვექტორით:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 5,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}.$$

მაშინ ორივე წლის საგადასახადო შემოსავლების მოცულობას გვიჩვენებს ვექტორი

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 4+4,5 \\ 5+5,2 \\ 1+1,6 \end{pmatrix}.$$

რადგან

$$\boxed{\textit{2018-19 წლების საგადასახადო შემოსავლების მოცულობა}} =$$
$$\boxed{\textit{2018 წლის საგადასახადო შემოსავლების მოცულობა}} +$$
$$\boxed{\textit{2019 წლის საგადასახადო შემოსავლების მოცულობა}}$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

ან რაც იგივეა

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,5 \\ 5,2 \\ 1,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4,5 \\ 5+5,2 \\ 1+1,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 10,2 \\ 2,6 \end{pmatrix}$$

წინა მაგალითში $\mathbf{x}$ და $\mathbf{y}$ ვექტორების შეკრება იმიტომ შევძელით, რომ მათი განზომილებები ტოლი იყო. ანალოგიურად შეგვიძლია შევკრიბოთ ნებისმიერი ორი n-განზომილებიანი ვექტორი.

განსაზღვრება 10.3 *ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი ორი ვექტორი* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *და* $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. *მათი* ***ჯამი*** *ეწოდება n-განზომილებიან ვექტორს* $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, *სადაც*

$$z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2, \ldots, z_n = x_n + y_n.$$

ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}.$$

მაგალითი 10.10 *შევკრიბოთ ვექტორები:*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ და } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. *რადგან მოცემული ორივე ვექტორის განზომილება ოთხია, ამიტომ მათი შეკრება შესაძლებელია. გვაქვს:*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ -3 + 5 \\ 4 + 2 \\ 2 + (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ვთქვათ, n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

- n-განზომილებიან ვექტორს

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

  რომელის ყველა კომპონენტი ნულია, ეწოდება (n-განზომილებიანი) **ნულოვანი ვექტორი**.

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ვექტორის **მოპირდაპირე ვექტორი** ეწოდება ვექტორს $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

ის $-\mathbf{x}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვექტორების შეკრებას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. თუ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. თუ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
3. თუ $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
4. თუ $\mathbf{x}, \mathbf{O} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $\mathbf{x} + \mathbf{O} = \mathbf{x}$.
5. თუ $\mathbf{x}, \mathbf{O} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{O}$.

10.2.2 ვექტორის სკალარზე გამრავლება.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 10.11 *სახელმწიფომ* 2019 *წელს თავდაცვასა, განათლებასა და ჯანმრთელობის დაცვაზე დახარჯა შესაბამისად* 25, 10 *და* 100 *მლრდ ევრო. ერთ-ერთ საერთაშორისო კონფერენციაზე წარსადგენად საჭირო გახდა ამ მონაცემების ამერიკულ დოლარებში გადათვლა. როგორ შეიძლება ამის განხორციელება, თუ* 2019 *წელს ევრო/დოლარის გაცვლითი კურსი იყო* $1,11$ *?*
ამოხსნა. *ახალი მონაცემების მისაღებად, ცხადია, ევროებში არსებული თითოეული მონაცემი უნდა გამრავლდეს* $1,11$*-ზე:*

- *თავდაცვა* – $1,11 \cdot 25 = 27,75$
- *განათლება* – $1,11 \cdot 10 = 11,1$
- *ჯანმრთელობის დაცვა* – $1,11 \cdot 100 = 111$.

მაშასადამე, სახელმწიფომ თავდაცვაზე დახარჯა $27,75$*, განათლებაზე* – $11,1$*, ხოლო ჯანმრთელობის დაცვაზე კი* – 111 *მლრდ დოლარი.*

წინა მაგალითში ევროებში გამოსახულ მონაცემებს თუ წარმოვადგენთ 3-განზომილებიანი ვექტორის სახით

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix},$$

მაშინ ამერიკულ დოლარებში გამოსახული მონაცემების 3-განზომილებიანი ვექტორი იქნება

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1,11 \cdot 25 \\ 1,11 \cdot 10 \\ 1,11 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,75 \\ 11,1 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, **y** ვექტორის თითოეული კოორდინატი მიიღება **x** ვექტორიის შესაბამისი კოორდინატის ერთსა და აიმავე რიცხვზე (ან, როგორც ხშირად ამბობენ, **სკალარზე**), კერძოდ, 1,11-ზე გამრავლებით და ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ

$$\mathbf{y} = 1,11 \cdot \mathbf{x}.$$

ამ ოპერაციას **ვექტორის სკალარზე გამრავლება** ეწოდება. ეს ოპერაცია შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი განზომილებისათვის შემდეგნაირად.

თუ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ არის n-განზომილებიანი ვექტორი, ხოლო $\alpha \in \mathbb{R}$ ნამდვილი რიცხვია, მაშინ **x ვექტორის** α **სკალარზე ნამრავლი** $\alpha \cdot \mathbf{x}$ არის ვექტორი $\alpha \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$. $\alpha \cdot \mathbf{x}$ ნამრავლს ხშირად ასეც ჩაწერენ $\alpha\mathbf{x}$.

მაგალითი 10.12 *გამოვთვალოთ* $-7\mathbf{x}$*, თუ* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა. *გვაქვს:*

$$-7\mathbf{x} = -7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \cdot (-1) \\ -7 \cdot 3 \\ -7 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -21 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

ვექტორის სკალარზე ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. თუ $\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. თუ $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
3. თუ $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$.
4. თუ $\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
5. თუ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

10.2.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი

მაგალითი 10.13 *ვთქვათ, კომპანია აწარმოებს* 4 *სახის პროდუქციას, რომელთა სარეალიზაციო ფასებია* $6, 2, 4$ *და* 5*. გასული წლის განმავლობაში პირველი, მეორე, მესამე და მეოთხე სახის პროდუქციების რეალიზაციის რაოდენობები იყო შესაბამისად* 1200, 2500, 3000 *და* 2400*. გამოვთვალოთ გასულ წელს კომპანიის მიერ პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავალი.*
ამოხსნა. *რადგან პირველი სახის პროდუქციის ერთეულის ფასია* 6 *და რადგან ამ სახის პროდუქციის რეალიზაციის რაოდენობა იყო* 1200*, ამიტომ პირველი სახის პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავალი იქნებოდა* $6 \cdot 1200$*. ანალოგიურად გამოვთვლით, რომ მეორე, მესამე და მეოთხე სახის პროდიქციის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავლები იქნებოდა შესაბამისად* $2 \cdot 2500$*,* $4 \cdot 3000$ *და* $5 \cdot 2400$*. ამიტომ ოთხივე პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავალი ტოლი იქნება ჯამის*

$$6 \cdot 1200 + 2 \cdot 2500 + 4 \cdot 3000 + 5 \cdot 2400 = 7200 + 5000 + 12000 + 12000 = 36200.$$

განვიხილოთ ახლა ამ ტიპის ზოგადი ამოცანა.

მაგალითი 10.14 *ვთქვათ, კომპანია წლის განმავლობაში აწარმოებს* n *სახის პროდუქციას. თუ* $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ *არის კომპანიის მიერ წარმოებული პროდუქციის სარეალიზაციო ფასების ვექტორი (ე.ი.* p_1 *არის პირველი სახის ერთეული პროდუქციის სარეალიზაციო ფასი,* p_2 *- მეორესი და ა.შ.), ხოლო* $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ *კი - პროდუქციის რეალიზაციის მოცულობების ვექტორი, მაშინ წინა მაგალითში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მიიღება, რომ წინა წელს კომპანიის მიერ პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული მთლიანი შემოსავალი* M *გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:*

$$M = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n.$$

ბოლო მაგალითის ანალიზით დავასკვნით, რომ ნებისმიერ ორ ერთი და იგივე განზომილების ვექტორს შეგვიძლია შევუსაბამოთ რიცხვი (სკალარი), რომელიც მიიღება როგორც მოცემული ვექტორების შესაბამისი კოორდინტების ნამრავლების ჯამი. მიღებულ ჯამს მოცემული **ვექტორების სკალარული ნამრავლი** ეწოდება. ამრიგად გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება 10.4 *n-განზომილებიანი ორი $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ და $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ვექტორის* ***სკალარული ნამრავლი*** *$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ არის რიცხვი, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

სკალარული ნამრავლი შეიძლება აღვნიშნოთ ასეც: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

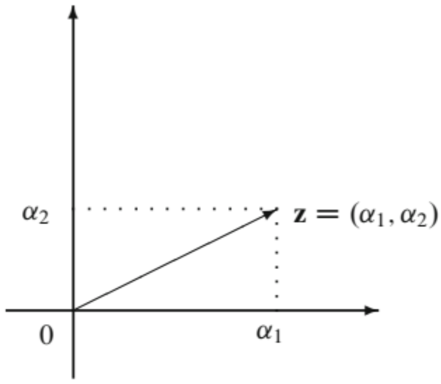
მაგალითი 10.15 *ვთქვათ, მოცემულია ორი 4-განზომილებიანი ვექტორი $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ და $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. მაშინ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 =$* $-2 + 0 + (-12) + (-3) = -17.$

ვექტორების სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. თუ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
2. თუ $\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
3. თუ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$.
4. თუ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$.
5. თუ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, მაშინ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{O}$.

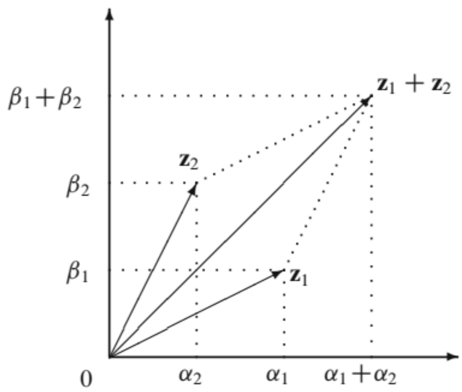
10.3 ვექტორების ინტერპრეტაცია სიბრტყეზე და სივრცეში

ყოველი 2-განზომილებიანი ვექტორი შეიძლება, წარმოდგინდეს როგორც სიბრტყის წერტილი ან როგორც მიმართული მონაკვეთი. ვექტორი $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ შეესაბამება $(\alpha_1; \alpha_2)$ წერტილს, ან იმ მიმართულ მონაკვეთს, რომლის სათავეც არის კოორდინატთა სისტემის სათავეში, ბოლო კი $(\alpha_1; \alpha_2)$ წერტილში (იხ. სურ. 10.1)
ნულოვანი ვექტორის შესაბამისი წერტილია $(0; 0)$ წერტილი, ანუ კოორდინატთა სისტემის სათავე.



სურ 10.1: 2-განზომილებიანი ვექტორი

ორი $\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$ და $\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$ ვექტორის ჯამი არის მიმართული მონაკვეთი, რომლის ბოლო არის წერტილი, რომლის კოორდინატებია $\mathbf{z}_1$ და $\mathbf{z}_2$ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების ჯამები (იხ. სურ. 10.2).



სურ 10.2: 2-განზომილებიანი ვექტორების ჯამი

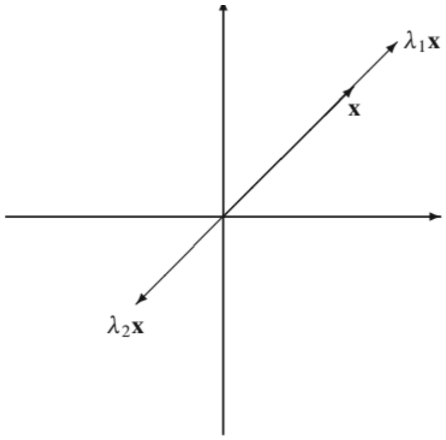
სურ. 10.2-დან ჩანს, რომ $\mathbf{z}_1$ და $\mathbf{z}_1$ ვექტორების ჯამი $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1 = (\alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2)$ შეესაბამება იმ პარალელოგრამის დიაგონალს, რომლის გვერდებია $\mathbf{z}_1$ და $\mathbf{z}_2$ ვექტორები.

ორგანზომილებიანი ვექტორის რიცხვზე (სკალარზე) გამრავლების შედეგი არის ამ ვექტორის შესაბამისი მიმართული მონაკვეთის გაჭიმვა (როცა სკალარის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია ერთზე) ან შეკუმშვა (როცა სკალარის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია ერთზე). ამ მონაკვეთის მიმართულება უცვლელია, როცა სკალარი დადებითია და იცვლება საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ სკალარი უარყოფითია. სურ. 10.3-ზე ნაჩვენებია $\mathbf{x}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი λ_1 და λ_2 სკალარებზე, სადაც $\lambda_1 > 1$ და $-1 < \lambda_2 < 0$.

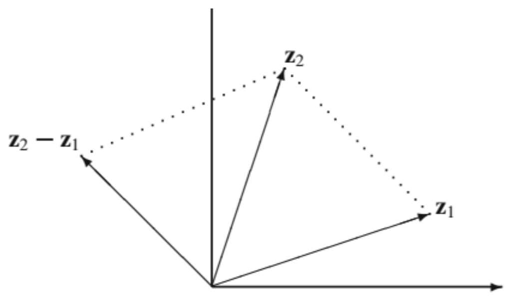
2-განზომილებიანი ორი $\mathbf{z}_2$ და $\mathbf{z}_1$ ვექტორის სხვაობა $\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1$, ან რაც იგივეა ჯამი $\mathbf{z}_2 + (-\mathbf{z}_1)$, ნაჩვენებია სურ. 10.4-ზე.

2-განზომილებიანი ვექტორების ანალოგიურად, 3-განზომილებიანი ვექტორები შეგვიძლია გრაფიკულად წარმოვადგინოთ,როგორც მიმართული მონაკვეთები სივრცეში. მაგალითად, სურ. 10.5-ზე მოცემულია 3-განზომილებიანი ვექტორი $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$.

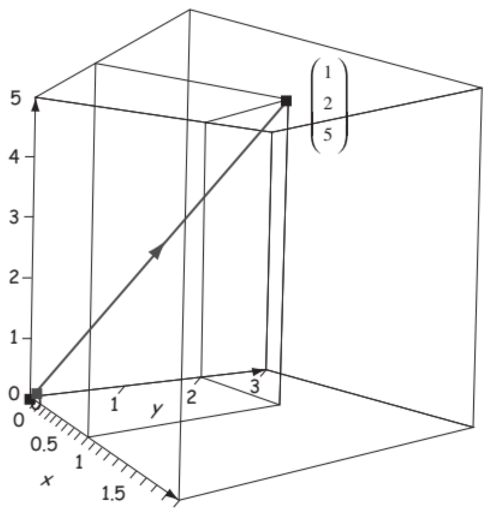
მოქმედებები ვექტორებზე სივრცეში ანალოგიურია სიბრტყეზე ვექტორებზე მოქმედებებისა.



სურ 10.3: სკალარული ნამრავლი



სურ 10.4: ვექტორების სხვაობა



სურ 10.5: 3-განზომილებიანი ვექტორი

10.4 ვექტორული სივრცეები

ჩვენ უკვე ვიცით, თუ როგორ შევკრიბოთ ერთი და იგივე განზომილების ვექტორები; ასევე ვიცით, როგორ გავამრავლოთ ნებისმიერი ვექტორი ნებისმიერ რიცხვზე. შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ეს ოპერაციები აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს. მაგალითად, ვექტორების შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია, რაც გამოიხატება იმაში, რომ ორი ვექტორის ჯამი არ იცვლება შესაკრები ვექტორების გადანაცვლებით. ეს პირობები უზრუნველყოფს იმას, რომ ერთი და იგივე განზომილების ვექტორების სიმრავლე არის ე.წ. წრფივი სივრცე.

ზოგადად, არაცარიელ V სიმრავლეს ეწოდება **წრფივი** (ან **ვექტორული**) **სივრცე** (ხოლო მის ელემენტებს - **ვექტორები**), თუ მოცემულია

1. წესი, რომლის მიხედვით V სიმრავლის ნებისმიერ ორ $\mathbf{x}$ და $\mathbf{y}$ ელემენტს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც ამ ელემენტების **ჯამი** ეწოდება და რომელიც $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ სიმბოლოთი აღინიშნება;

2. წესი, რომლის მიხედვით V სიმრავლის ნებისმიერ $\mathbf{x}$ ელემენტს და ნებისმიერ α რიცხვს შეესაბამება V სიმრავლის ელემენტი, რომელსაც α **რიცხვის $\mathbf{x}$ ელემენტზე ნამრავლი** ეწოდება და რომელიც $\alpha\mathbf{x}$ სიმბოლოთი აღინიშნება;

3. და თუ შემდეგი პირობები სრულდება:

   (a) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.

   (b) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

   (c) არსებობს $\mathbf{0}\in V$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $\mathbf{x}\in V$ ელემენტისათვის სრულდება ტოლობა $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$.

   (d) ყოველი $\mathbf{x}\in V$ ელემენტისთვის არსებობს $(-\mathbf{x})\in V$ ელემენტი ისეთი, რომ $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

   (e) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

   (f) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$.

   (g) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$.

   (h) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$.

$\mathbf{0}$ ვექტორს **ნულოვანი ვექტორი**, ხოლო $-\mathbf{x}$ ვექტორს კი $\mathbf{x}$ ვექტორის **მოპირდაპირე ვექტორი** ეწოდება.

მაგალითი 10.16 *ვთქვათ, V არის სიბრტყეზე (ან სივრცეში) ვექტორების სიმრავლე. ვექტორების შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების სტანდარტული ოპერაციების მიმართ V არის წრფივი სივრცე.*

მაგალითი 10.17 *ვთქვათ, M_2 არის მეორე რიგის კვადრატული მატრიცების სიმრავლე. მატრიცების შეკრებისა და მატრიცის რიცხვზე გამრავლების სტანდარტული ოპერაციების მიმართ M_2 არის წრფივი სივრცე. ანალოგიურად, ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის, n-ური რიგის კვადრატული მატრიცების სიმრავლე M_n არის აგრეთვე წრფივი სივრცე.*

მაგალითი 10.18 *n-განზომილებიანი ვექტორ-სვეტების სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ წრფივი სივრცეა.*

განსაზღვრება 10.5 *ვთქვათ, V წრფივი სივრცეა. ამ სივრცის $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ ვექტორების* ***წრფივი კომბინაცია*** *ეწოდება ვექტორთა ჯამს*

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n,$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ნებისმიერი რიცხვებია.

განსაზღვრება 10.6 *V წრფივი სივრცის $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ ვექტორებს ეწოდება* ***წრფივად დამოკიდებულ ვექტორთა სისტემა****, თუ ერთი მათგანი გამოისახება დანარჩენების წრფივი კომბინაციის სახით. თუ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებული არაა, მას წრფივად დამოუკიდებელი ჰქვია.*

მოვიყვანოთ რამდენიმე დებულება ვექტორთა სისტემების შესახებ:

ძნელი არაა იმის ჩვენება, რომ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

(i) ვექტორთა $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ რიცხვები რომელთაგაგან ერთი მაინც არაა ნული და სრულდება ტოლობა

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

(ii) ვექტორთა სისტემა, რომელიც შეიცავს ნულოვან ვექტორს, წრფივად დამოკიდებულია.

(iii) დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემის ნებისნიერი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 10.19 *დავადგინოთ, ვექტორი* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *არის თუ არა* $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ *და* $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *ვექტორების წრფივი კომბინაცია.*

ამოხსნა. *იმის დასადგენად, არის თუ არა* $\mathbf{x}$ *ვექტორი* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *და* $\mathbf{x}_3$ *ვექტორების წრფივი კომბინაცია, უნდა გამოვიკვლიოთ, არსებობს თუ არა* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *ისეთი ნამდვილი რიცხვები, რომ შესრულდეს ტოლობა*

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 \quad \text{ანუ} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

თუ გავიხსენებთ რიცხვზე გამრავლების და შეკრების ოპერაციებს $\mathbb{R}^3$ *ვექტორულ სივრცეში და გამოვითვლით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეს, მივიღებთ*

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + 2\alpha_2\\ \alpha_1 + 4\alpha_2\\ \alpha_1 + \alpha_3\end{pmatrix},$$

საიდანაც დავწერთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *საძიებელი რიცხვების მიმართ:*

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1\\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 2\\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3\end{cases}.$$

თუ ამოვხსნით ამ სისტემას (მაგალითად, გაუსის მეთოდით), გვექნება:

$$\begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\\ \alpha_3 = 3\end{cases}.$$

ამრიგად,

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

ე. ი. $\mathbf{x}$ *ვექტორი არის* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *ვექტორების წრფივი კომბინაცია. კერძოდ,* $\mathbf{x}$ *ვექტორი* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *ვექტორების წრფივი კომბინაციით ასე ჩაიწერება:*

$$\mathbf{x} = 0\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3.$$

მაგალითი 10.20 *დავადგინოთ, წრფივად დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი ვექტორთა შემდეგი სისტემა $\mathbb{R}^3$-ში:* $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა. *იმისათვის, რომ დავადგინოთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა ვექტორთა სისტემა, საჭიროა განვიხილოთ მათი წრფივი კომბინაცია $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3$ და ის გავუტოლოთ ნულოვან ვექტორს*

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}.$$

თუ ამ განტოლებას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, მაშინ ვექტორთა მოცემული სისტემა იქნება წრფივად დამოუკიდებელი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - წრფივად დამოკიდებული. გადავწეროთ ბოლო ვექტორული განტოლება წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემის სახით:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_1 - 1\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

რომელიც ასე გარდაიქმნება:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ - x_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

მიღებულ სისტემას ცხადია აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა, რომელთა შორის არანულოვანი ამონახსნიცაა. ეს ნიშნავს, რომ ვექტორთა მოცემული სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

10.5 ბაზისი და განზომილება

წრფივ V სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიანი, თუ V-ში არსებობს n ვექტორისაგან შედგენილი წრფივად დამოუკიდებლი სისტემა, ხოლო $n+1$ ვექტორისაგან შედგენილი ნებისმიერი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. n-ს ეწოდება V სივრცის **განზომილება** და $dim(V)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაშასადამე, წრფივი სივრცის განზომილება არის ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რაოდენობა.

განსაზღვრება 10.7 *n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის* ***ბაზისი*** *ეწოდება ამ სივრცის n ვექტორისაგან შედგენილ წრფივად დამოუკიდებელ დალაგებულ (ე.ი. გადანომრილ) სისტემას.*

ცხადია, n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში ბაზისი ყოველთვის არსებობს.

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს წრფივი სივრცეების შესახებ ერთ-ერთი ფუნდამენტურ დებულებას:

თეორემა 10.1 *ვთქვათ, V n-განზომილებიანი წრფივი სივრცეა, ხოლო $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n \,:\, \mathbf{x}_i \in V\}$ კი - მისი ბაზისი. მაშინ ნებისმიერი ვექტორი $\mathbf{x} \in V$ ერთადერთი სახით წარმოდგინდება $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით:*

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n. \tag{10.1}$$

თუ ვექტორთა $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ სისტემა V სივრცის ბაზისია (10.1) ტოლობას უწოდებენ ვექტორის გაშლას $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ ბაზისის მიხედვით, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ რიცხვებს კი-$\mathbf{x}$ ვექტორის კოორდინატებს ამ ბაზისში.

მაგალითი 10.21 *$\mathbb{R}^n$ წრფივი სივრცის ერთ-ერთი ბაზისია ვექტორთა შემდეგი სისტემა:*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

მას $\mathbb{R}^n$ სივრცის ***სტანდარტული ბაზისი*** *ეწოდება.*

მაგალითი 10.22 *ვექტორები $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ქმნიან $\mathbb{R}^2$ სივრცის ბაზისს.*

ბოლო ორი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ვექტორულ სივრცეს შესაძლოა გააჩნდეს სხვადასხვა ბაზისი. მტკიცდება, რომ მოცემული ვექტორული სივრცის ნებისმიერ ბაზისში ვექტორების რაოდენობა ერთი და იგივეა.

10.6 ვექტორების გამოყენება საბუღალტრო აღრიცხვაში

ახლა ჩვენი მიზანია გამოვიყენოთ ვექტორები ბუღალტრული აღრიცხვის მოცემული მდგომარეობის აღსაწერად, სხვადასხვა ანგარიშების ნაშთების, როგორც ვექტორის კომპონენტების, ჩამოთვლით. ამასთან, გამოსაყენებელ ვექტორებს უნდა ჰქონდეთ ის თვისება, რომ მათი კომპონენტების ჯამი ნულის ტოლი უნდა იყოს. ასეთ ვექტორებს

საბალანსო ვექტორებს უწოდებენ. იმისათვის რომ დავინახოთ, თუ როგორ აღწერს საბალანსო ვექტორები ბუღალტრული აღრიცხვის მდგომარეობებს, გავიხსენოთ, რომ ბუღალტრული აღრიცხვის ანგარიშები ძირითადად შემდეგ სამ კატეგორიად იყოფა:

- აქტივები;
- პასივები;
- საკუთარი კაპიტალი.

გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ ბუღალტრული აღრიცხვის **ორმხრივობის პრინციპი** მდგომარეობს შემდეგში:

$$\textbf{აქტივები} = \textbf{ვალდებულებები} + \textbf{საკუთარი კაპიტალი}$$

თუ დროის მოცემული t მომენტისათვის A_t-თი ავღნიშნავთ აქტივების ანგარიშებზე, V_t-თი - პასივების ანგარიშებზე და K_t-თი კი - საკუთარი კაპიტალის ანგარიშებზე არსებულ ნაშთების ჯამებს, მაშინ ორმხრივობის პრინციპი დროის აღნიშნული t მომენტისათვის მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$A_t = V_t + K_t.$$

გადავწეროთ ეს ტოლობა შემდეგნაირად:

$$A_t - V_t - K_t = 0 \tag{10.2}$$

ახლა თუ განვიხილავთ $\mathbf{x}_t$ ვექტორს, რომლის კომპონენტებად ჯერ ჩამოწერილია აქტივების ანგარიშებზე არსებულ ნაშთები, შემდეგ პასივების ანგარიშებზე არსებულ ნაშთები უარყოფითი ნიშნებით და ბოლოს კი - საკუთარი კაპიტალის ანგარიშებზე არსებულ ნაშთები ასევე უარყოფითი ნიშნებით, მაშინ $\mathbf{x}_t$ ვექტორი საბალანსო ვექტორია. უნდა აღინიშნოს, რომ $\mathbf{x}_t$ ფაქტობრივად წარმოადგენს **ნაშთთა უწყისს** და ამიტომ ცხადია, რომ $\mathbf{x}_t$ ვექტორი სრულად აღწერს ბუღალტრული აღრიცხვის მდგომარეობას დროის t მომენტისათვის. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია საბალანსო ვექტორების ერთობლიობის განხილვა. ჩვენ განვიხილავთ ისეთ საბალანსო ვექტორებს, რომელთა კომპონენტების რაოდენობა რაიმე მოცემული ნატურალური n რიცხვია. ეს არაა მნიშვნელოვანი შეზღუდვა, ვინაიდან n-ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობისათვის, მოცემული კომპანიის ბუღალტრული აღრიცხვის კონკრეტული მდგომარეობები შეიძლება სრულად აღიწეროს n-კომპონენტიანი საბალანსო ვექტორებით: n-ის როლში შეგვიძლია ავიღოთ ბუღალტრული აღრიცხვის ანგარიშების რაოდენობა. Bal_n სიმბოლოთი აღვნიშნოთ n-კომპონენტიანი საბალანსო ვექტორების სიმრავლე.

თეორემა 10.2 *Bal_n ვექტორული სივრცეა.*

დამტკიცება. წრფივი სივრცის განსაზღვრების თანახმად, უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ α ნებისმიერი რიცხვია, ხოლო $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ისეთი ვექტორებია, რომ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Bal}_n$, მაშინ

1. $\alpha\mathbf{x} \in \mathrm{Bal}_n$,

2. $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{Bal}_n$.

თუ

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Bal}_n,$$

მაშინ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. მეორეს მხრივ, რადგან

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix},$$

ამიტომ გვექნება:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n = \alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \alpha 0 = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ $\alpha\mathbf{x} \in \mathrm{Bal}_n$. ამით (1) დამტკიცებულია.

შემდეგ, თუ

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Bal}_n,$$

მაშინ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ და $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$ და რადგან განმარტების ძალით

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

მივიღებთ, რომ

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = 0.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{Bal}_n$ და, მაშასადამე, (2)-იც სრულდება. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

მოვიყვანოთ საბალანსო ვექტორების მაგალითი.

მაგალითი 10.23 *ცხადია, რომ Bal_1 არის ნულოვანი სივრცე, ე.ი. შეიცავს მხოლოდ ერთ ნულოვან ვექტორს: $Bal_1 = \{0\}$. Bal_2 სივრცის ნებისმიერ ვექტორს აქვს შემდეგი ფორმა $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$, ხოლო Bal_n სივრცის ნებისმიერი ვექტორი კი შესაძლებე-*

ლია ასეთი ფორმით ჩაიწეროს

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ -a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

საბალანსო ვექტორების მნიშვნელოვან ტიპს მიეკუთვნება საბალანსო ვექტორები, რომლებშიც მხოლოდ ორი არანულოვანი კომპონენტია. ცხადია, ეს კომპონენტები მოპირდაპირე რიცხვებია. ასეთ ვექტორებს **მარტივი საბალანსო ვექტორები** ეწოდება.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, დროის ნებისმიერი მოცემული მომენტისათვის ბუღალტრული აღრიცხვის მდგომარეობები მათემატიკურად შეიძლება სრულად აღიწეროს საბალანსო ვექტორებით. შემდეგი მნიშვნელოვანი საკითხია, თუ როგორ აღიწეროს მათემატიკურად ბუღალტრული აღრიცხვის მდგომარეობების ცვლილებები, რომლებიც განპირობებულია ეკონომიკური საქმიანობით. ასეთი ცვლილებები ხდება ტრანზაქციების განხორციელებისას. **ტრანზაქცია (გარიგება)** განისაზღვრება, როგორც ურთიერთდაკავშირებული ქმედებების თანმიმდევრობა, რომელთა მიზანია საწარმოს ფუნქციონირების (მაგალითად, გაყიდვა, ყიდვა) სრული ბუღალტრული აღრიცხვის უზრუნველყოფა. მათი განხორციელების შედეგად სისტემის ანგარიშებს შორის ხდება ღირებულებების გადადინებები. ზოგიერთ ანგარიშზე არსებული ნაშთი იზრდება, ზოგისა - კლებულობს, ხოლო ზოგიერთი ანგარიშის ნაშთი კი უცვლელი რჩება.

ტრანზაქციის განხორციელებით ბუღალტრული აღრიცხვის მდგომარეობა ცხადია იცვლება. ასევე ცხადია, რომ ამ ცვლილების შემდეგ სისტემა უნდა დარჩეს კვლავ დაბალანსებული, ანუ ახალი მდგომარეობის აღმწერი ვექტორი კვლავ უნდა იყოს საბალანსო ვექტორი. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ტრანზაქციის განხორციელებამდე ბუღალტრული აღრიცხვის მდგომარეობის საბალანსო ვექტორი იყო $\mathbf{x}_0$, განხორციელების შემდეგ კი - $\mathbf{x}_1$, მაშინ, რადგან საბალანსო ვექტორები ქმნიან წრფივ სივრცეს, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ ვექტორიც საბალანსო ვექტორია. ამიტომ $\mathbf{x}_1$ ვექტორი წარმოდგინდება ორი საბალანსო ვექტორის, კერძოდ $\mathbf{x}_0$ და $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ ვექტორების, ჯამის სახით. ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbf{x}_0$ არის სისტემის საწყისი მდგომარეობის შესაბამისი საბალანსო ვექტორი, დავასკვნით, რომ ნებისმიერი ტრანზაქციის განხორცილებით გამოწვეული ცვლილებები სრულად აღიწერება ტრანზაქციამდე არსებული მდგომარეობის შესაბამისი საბალანსო ვექტორისათვის **გარკვეული** საბალანსო ვექტორის დამატებით. მაშასადამე, ტრანზაქციის მათემატიკური განმარტება შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს.

განსაზღვრება 10.8 *ვთქვათ, n არის ბუღალტრული აღრიცხვის ანგარიშების რაოდენობა, ხოლო $\boldsymbol{x} \in Bal_n$ კი- ფიქსირებული საბალანსო ვექტორი.* ***$\boldsymbol{v}$ ვექტორის შესაბამისი ტრანზაქცია*** *არის ფუნქცია, რომელიც ყოველ n-განზომილებიან საბალანსო ვექტორს უმატებს $\boldsymbol{v}$-ს. მაშასადამე,*

$$f_{\boldsymbol{v}} : Bal_n \to Bal_n, \quad f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}.$$

$\boldsymbol{v}$ ვექტორს $f_{\boldsymbol{v}}$-ს ***ტრანზაქციის ვექტორი*** *ეწოდება.*

თუ $\mathbf{v}$ *მარტივი (შესაბამისად, ელემენტარული) საბალანსო ვექტორია, მაშინ შესაბამის ტრანზაქციასაც* ***მარტივი*** *(შესაბამისად,* ***ელემენტარული****) ტრანზაქცია ეწოდება.*

ვთქვათ, რომ საანგარიშო პერიოდის საწყის ეტაპზე ბუღალტრული აღრიცხვის საბალანსო ვექტორი იყო $\mathbf{b}_0$, და რომ ამ პერიოდში თანამიმდევრობით განხორციელდა n ტრანზაქცია, რომელთა საბალანსო ვექტორებია $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ (ჩამოწერილი ტრანზაქციების განხორციელების თანამიმდევრობის მიხედვით). მატრიცას,

$$(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n),$$

სადაც

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{v}_i, \;\; i = 1, 2, \cdots, n, \tag{10.3}$$

ეწოდება **საანგარიშო პერიოდის საბალანსო მატრიცა**.

მაგალითი 10.24 *ცნობილია, რომ საანგარიშო პერიოდში განხორციელდა მხოლოდ სამი ტრანზაქცია. ცნობილია აგრეთვე, რომ პირველი ტრანზაქციის ვექტორია* $\begin{pmatrix} 1200 \\ 1600 \\ -1400 \\ -1400 \end{pmatrix}$*, მეორესი -* $\begin{pmatrix} 1100 \\ 1500 \\ -1000 \\ -1600 \end{pmatrix}$*, მესამესი -* $\begin{pmatrix} 800 \\ 0 \\ 1200 \\ -2000 \end{pmatrix}$*, ხოლო საანგარიშო პერიოდის საწყისი ეტაპის საბალანსო ვექტორი კი -* $\begin{pmatrix} 800 \\ 1200 \\ 0 \\ -2000 \end{pmatrix}$*. ვიპოვოთ ამ პერიოდის საბალანსო მატრიცა.*

ამოხსნა. რადგან

$$\begin{pmatrix} 800 \\ 1200 \\ 0 \\ -2000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1200 \\ 1600 \\ -1400 \\ -1400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2800 \\ -1400 \\ -3400 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2000 \\ 2800 \\ -1400 \\ -3400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1100 \\ 1500 \\ -1000 \\ -1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 4300 \\ -2400 \\ -5000 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3100 \\ 4300 \\ -2400 \\ -5000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \\ 1200 \\ -2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3900 \\ 4300 \\ -1200 \\ -7000 \end{pmatrix},$$

ამიტომ მოცემული პერიოდის საბალანსო მატრიცას ექნება სახე:

$$\begin{pmatrix} 800 & 2000 & 3100 & 3900 \\ 1200 & 2800 & 4300 & 4300 \\ 0 & -1400 & -2400 & -1200 \\ -2000 & -3400 & -5000 & -7000 \end{pmatrix}.$$

მაგალითი 10.25 *ვთქვათ, რომელიმე საანგარიშო პერიოდის საბალანსო მატრიცაა*

$$\begin{pmatrix} 500 & 400 & 300 & 700 \\ 100 & 100 & -50 & 50 \\ -350 & -300 & -100 & -400 \\ -250 & -200 & -150 & -350 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ ამ პერიოდში განხორციელებული ტრანზაქციების რაოდენობა და მათი შესაბამისი ვექტორები.

ამოხსნა. *რადგან საბალანსო მატრიცას პირველი სვეტი არის მოცემული საანგარიშო პერიოდის საწყისი ეტაპის საბალანსო ვექტორი, ხოლო დანარჩენები კი - იგივე პერიოდში განხორციელებული ტრანზაქციების შემდგომი პერიოდის საბალანსო ვექტორები და რადგან მოცემულ საბალანსო მატრიცას გააჩნია ოთხი სვეტი, ამიტომ განხორციელებული ტრანზაქციების რაოდენობა იქნება სამი. აღვნიშნოთ ამ მატრიცის პირველი სვეტი* $\boldsymbol{b}_0$*-ით, მეორე -* $\boldsymbol{b}_1$*-ით, მესამე* $\boldsymbol{b}_2$*-ით და მეოთხე -* $\boldsymbol{b}_3$*-ით. მაშინ*

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -350 \\ -250 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ -300 \\ -200 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 300 \\ -50 \\ -100 \\ -150 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 700 \\ 50 \\ -400 \\ -350 \end{pmatrix}$$

და თუ ახლა (10.3) ფორმულების საშუალებით გამოვთვლით ტრანზაქციების $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ *და* $\boldsymbol{v}_3$ *ვექტორებს, მივიღეთ:*

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ -300 \\ -200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -350 \\ -250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 300 \\ -50 \\ -100 \\ -150 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ -300 \\ -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -150 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix}$$

და

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 700 \\ 50 \\ -400 \\ -350 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 300 \\ -50 \\ -100 \\ -150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ -300 \\ -200 \end{pmatrix}.$$

10.7 პროდუქციის სივრცე. ფასების ვექტორი.

პროდუქციაში იგულისხმება რაიმე საქონელი ან მომსახურება, რომელიც გამოტანილია გასაყიდად კონკრეტულ დროსა და კონკრეტულ ადგილზე. ვგულისხმობთ, რომ არსებობს n განსხვავებული პროდუქცია. i-ური პროდუქციის რაოდენობა აღვნიშნოთ

$\mathbf{x}_i$-ით. მაშინ პროდუქციის რაიმე ნაკრები მოიცემა n-განზომილებიანი ვექტორით

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

როგორც წესი, ცხადია, განიხილება პროდუქციის მხოლოდ არაუარყოფითი რაოდენობა. ასე რომ, $x_i \geq 0$ ყოველი i-სათვის. ამას ხშირად ასეც ჩაწერენ: $\mathbf{x} \geq 0$ და ამბობენ, რომ **$\mathbf{x}$ არაუარყოფითი ვექტორია**. ადვილი სანახავია, რომ ორი არაუარყოფითი ვექტორის ჯამი ისევ არაუარყოფითია. ასევე, არაუარყოფითი ვექტორის ნამრავლი არაუარყოფით რიცხვზე არის არაუარყოფითი ვექტორი. ამიტომ პროდუქციათა ყველა ნაკრების ერთობლიობას **პროდუქციათა n-განზომილებიან სივრცეს** უწოდებენ. ცხადია ყოველ პროდუქციას გააჩნია ფასი, რომელიც დადებითი რიცხვია. თუ i-ური პროდუქციის ერთეულის ფასია p_i, მაშინ ვექტორს

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

ეწოდება **ფასების ვექტორი**.

რადგან პროდუქციათა ნაკრებისა და ფასების $\mathbf{x}$ და $\mathbf{p}$ ვექტორებს ერთნაირი განზომილებები აქვთ, შეგვიძლია განვიხილოთ მათი სკალარული ნამრავლი

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

არის რიცხვი, რომელიც პროდუქციის $\mathbf{x}$ ნაკრების მთლიან ღირებულებას გამოხატავს და მას **$\mathbf{x}$ ნაკრების ფასს** უწოდებენ. იგი $c(\mathbf{x})$ სიმბოლოთი აღინიშნება. განვიხილოთ პროდუქციათა n-განზომილებიანი სივრცე C. პროდუქციათა ორ ნაკრებს $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ ეწოდება **ექვივალენტური**, თუ მათი ფასები ტოლია.

ვთქვათ, q თანხის ფიქსირებული რაოდენობაა (q-ს ხშირად **შემოსავალსაც** უწოდებენ). იმ ნაკრებთა ერთობლიობას, რომელთა ფასებიც q-ს არ აღემატება, ეწოდება **ბიუჯეტური სიმრავლე** და B_q სიმბოლოთი აღინიშნება. მაშასადამე,

$$B_q = \{\mathbf{x} \in C : (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq q\}$$

სადაც $\mathbf{p}$ არის $\mathbf{x}$-ის ფასი. ბიუჯეტური სიმრავლის **საზღვარი** ეწოდება პროდუქციათა იმ ნაკრებთა ერთობლიობას, რომელთა ფასებიც არის ზუსტად q. ის G_q სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი.,

$$G_q = \{\mathbf{x} \in C : (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = q\}$$

10.8 სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, მოცემულია ვექტორები

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

გამოთვალეთ ა) $2\mathbf{x}$, ბ) $-3\mathbf{y}$, გ) $5(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

2. გამოთვალეთ:

$$4\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\1\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

3. იპოვეთ x შემდეგი ტოლობიდან:

$$3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\6\\17\end{pmatrix}.$$

4. იპოვეთ α შემდეგი ტოლობიდან:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}.$$

5. მოცემულია ვექტორები:

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\5\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

იპოვეთ: ა) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; ბ) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\mathbf{c}$.

6. მოცემულია ვექტორები: $\mathbf{a}=(4;-1;3;5)$, $\mathbf{b}=(0;2;-4;1)$, $\mathbf{c}=(-2;1;0;3)$. იპოვეთ ა) $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}$; ბ) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

7. ფირმამ დაამზადა სამი სახის პროდუქცია: c_1, c_2, c_3 შესაბამისად 1200 ერთეული, 1400 ერთეული, 2000 ერთეული. ერთეული პროდუქციის ფასი შესაბამისად არის 5 ლარი, 3 ლარი, 4 ლარი. გამოთვალეთ სრული ამონაგები, როგორც ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

8. საწარმო იყენებს ოთხი n_1, n_2, n_3, n_4 სახის ნედლეულს შესაბამისად შემდეგი რაოდენობით: 110 ერთეული, 100 ერთეული, 500 ერთეული, 130 ერთეული. n_1, n_2, n_3 ნედლეულის ერთეულის ფასი შესაბამისად არის 50 ლარი, 20 ლარი, 7 ლარი. როგორი უნდა იყოს n_4 ნედლეულის ერთეულის ფასი, რომ ნედლეულის შესყიდვაზე მთლიანად დაიხარჯოს არაუმეტეს 13600 ლარისა?

9. შეისწავლეთ, წრფივად დამოუკიდებელია თუ წრფივად დამოკიდებული ვექტორთა შემდეგი სისტემები:

$$\text{ა)}\ \left\{\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}\right\};\quad \text{ბ)}\ \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\9\\3\\15\end{pmatrix}\right\};$$

გ) $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$; დ) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\\4\end{pmatrix}\right\}$.

10. აჩვენეთ, რომ თუ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ნებისმიერი ვექტორებია $\mathbb{R}^n$ სივრციდან, მაშინ $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{c}-\mathbf{a}\}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

11. ვექტორთა შემდეგი სიმრავლებიდან რომელი წარმოადგენს $\mathbb{R}^3$ ვექტორული სივრცის ბაზისს?

ა) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$; ბ) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$;

გ) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$; დ) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

12. არის თუ არა ვექტორთა სისტემა $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ წრფივად დამოუკიდებელი $\mathbb{R}^3$-ში?

13. $\mathbb{R}^2$ ვექტორულ სივრცეში წარმოადგინეთ $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ვექტორი $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით (თუ ეს შესაძლებელია).

14. $\mathbb{R}^3$ ვექტორულ სივრცეში წარმოადგინეთ $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ვექტორი $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით (თუ ეს შესაძლებელია).

15. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

სისტემა არის ბაზისი $\mathbb{R}^3$-ში და ჩაწერეთ ამ ბაზისის ვექტორების საშუალებით შემდეგი ვექტორები:

ა) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$; ბ) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$.

16. ქვემოთ მოყვანილი ვექტორებიდან რომელია საბალანსო ვექტორი?

ა) $\begin{pmatrix}120\\60\\-40\\-140\end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix}124\\64\\12\\-40\\160\end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix}120\\60\\60\\0\\-40\\140\end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix}120\\60\\60\\0\\-20\\220\end{pmatrix}$; ე) $\begin{pmatrix}120\\60\\60\\0\\-20\\-220\end{pmatrix}$.

17. x-ის რა მნიშვნელობისათვისაა $\begin{pmatrix}1200\\-1700\\-40\\80\\1350\\x\\2750\end{pmatrix}$ საბალანსო ვექტორი?

18. ცნობილია, რომ საანგარიშო პერიოდში განხორციელდა მხოლოდ სამი ტრანზაქცია, რომელთა ვექტორები შესაბამისად არის $\begin{pmatrix}1200\\600\\-400\\0\\-1400\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2100\\0\\1500\\-1000\\0\\-2600\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1600\\1000\\-1200\\-1400\\0\\0\end{pmatrix}$. იპოვეთ ამ პერიოდის საბალანსო მატრიცა, თუ საანგარიშო პერიოდის საწყისი ეტაპის საბალანსო ვექტორია $\begin{pmatrix}850\\1300\\0\\-2000\\0\\-150\end{pmatrix}$.

19. გარკვეული საანგარიშო პერიოდის საბალანსო მატრიცაა

$$\begin{pmatrix}270&470&310&710\\360&180&-50&160\\-350&-300&-110&-420\\-280&-350&-150&-450\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ ამ პერიოდში განხორციელებული ტრანზაქციების რაოდენობა და მათი შესაბამისი ვექტორები.

20. 4-პროდუქციან სივრცეში გამოთვალეთ $\begin{pmatrix}130\\140\\80\\90\end{pmatrix}$ ნაკრების ფასი, თუ ამ სივრცის ფასთა ვექტორია $\begin{pmatrix}12\\18\\9\\30\end{pmatrix}$.

21. 3-პროდუქციან სივრცეში, რომლის ფასების ვექტორია $\begin{pmatrix}10\\15\\6\end{pmatrix}$, არის პროდუქციათა ნაკრებები $\begin{pmatrix}150\\150\\200\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}120\\240\\180\end{pmatrix}$ ექვივალენტური?

22. იპოვეთ x, თუ ცნობილია, რომ 4-პროდუქციან სივრცეში, რომლის ფასების ვექტორია $\begin{pmatrix}10\\5\\15\\12\end{pmatrix}$, პროდუქციათა ნაკრებები $\begin{pmatrix}120\\x\\60\\50\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}75\\180\\80\\100\end{pmatrix}$ ექვივალენტურია.

23. 3-პროდუქციანი სივრცის ფასების ვექტორია $\begin{pmatrix}5\\2\\8\end{pmatrix}$. ამ სივრცის პროდუქციათა შემდეგი ნაკრებებიდან რომელია ერთმანეთის ექვივალენტური?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}100\\150\\50\end{pmatrix};\ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}80\\50\\150\end{pmatrix};\ \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix}160\\150\\75\end{pmatrix};\ \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix}120\\140\\40\end{pmatrix}.$$

ლექცია 11

ეკონომიკასა და ბიზნესში წრფივი ალგებრის გამოყენების ზოგიერთი მაგალითი

11.1 წარმოების დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა

წარმოების დარგთაშორისი ბალანსის მიზანს წარმოადგენს პასუხი გასცეს კითხვას, რომელიც ეხება მრავალდარგოვანი ეკონომიკის ეფექტურ მართვას და რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: როგორი უნდა იყოს თითოეული დარგის წარმოებული პროდუქციის მოცულობა, რომ შესაძლებელი იყოს ამ დარგის პროდუქციაზე არსებული ყველა მოთხოვნის დაკმაყოფილება? ამ დროს იგულისხმება, რომ თითოეული დარგი გამოდის ერთის მხრივ როგორც გარკვეული პროდუქციის მწარმოებელი, ხოლო მეორეს მხრივ, როგორც თავისივე ან სხვა დარგის მიერ გამოშვებული პროდუქციის მომხმარებელი.

წარმოების დარგთაშორისი ბალანსის მოდელი შემუშავებული იქნა 1936 წელს ამერიკელი მეცნიერის ვ. ლეონტიევის მიერ, რომელსაც, მოგვიანებით ნობელის პრემია მიენიჭა ეკონომიკის დარგში წარმოებული გამოკვლევებისთვის. ამ მოდელის განხილვა დავიწყოთ მაგალითით.

მაგალითი 11.1 *კომპანია ფლობს ქვანახშირზე მომუშავე თბოელექტროსადგურს და ქვანახშირის მაღაროს. 1 პირობითი ერთეული (შემოკლებით, პ/ე) ელექტროენერგიის საწარმოებლად საჭიროა 0,1 პ/ე ელექტროენერგია და 0,5 პ/ე ქვანახშირი. 1 პ/ე ქვანახშირის მოსაპოვებლად საჭიროა 0,2 პ/ე ელექტროენერგია და 0 პ/ე ქვანახშირი. მომდევნო თვეში კომპანიამ მოსახლეობას უნდა მიაწოდოს 16 პ/ე ელექტროენერგია და 8 პ/ე ქვანახშირი. რამდენი პ/ე ელექტროენერგია და რამდენი პ/ე ქვანახშირი უნდა აწარმოოს კომპანიამ მიწოდების ამ პირობების შესასრულებლად?*

ამოხსნა. *მიწოდების პირობების შესასრულებლად ელექტროენერგიისა და ქვანახშირის საჭირო რაოდენობები შეიძლება დაიყოს შემდეგ სამ ნაწილად:*

- *ელექტროენერგიის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მოსახლეობისათვის მისაწოდებელი ელექტროენერგიის საწარმოებლად და ელექტროენერგიის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მოსახლეობისათვის მისაწოდებელი ქვანახშირის მოსაპოვებლად;*

- *ქვანახშირის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მოსახლეობისათვის მისაწოდებელი ელექტროენერგიის საწარმოებლად და ქვანახშირის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მოსახლეობისთვის მისაწოდებელი ქვანახშირის მოსაპოვებლად;*

- *ელექტროენერგიის და ქვანახშირის ის რაოდენობები, რომელიც მოსახლეობას უნდა მიეწოდოს.*

ახლა შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობები:

$\boxed{\text{ელექტროენერგიის მთლიანი რაოდენობა}}$ =

+ *ელექტროენერგიის მთლიანი რაოდენობის საწარმოებლად საჭირო ელექტროენერგიის რაოდენობა*

+ *ქვანახშირის მთლიანი რაოდენობის მოპოვებისათვის საჭირო ელექტროენერგიის რაოდენობა*

+ *მოსახლეობისთვის მისაწოდებელი ელექტროენერგიის რაოდენობა.*

და

$\boxed{\text{ქვანახშირის მთლიანი რაოდენობა}}$ =

+ *ელექტროენერგიის მთლიანი რაოდენობის საწარმოებლად საჭირო ქვანახშირის რაოდენობა*

+ *ქვანახშირის მთლიანი რაოდენობის მოსაპოვებლად საჭირო ქვანახშირის რაოდენობა*

+ *მოსახლეობისათვის მისაწოდებელი ქვანახშირის რაოდენობა.*

ახლა თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$x = \text{ელექტროენერგიის მთლიანი რაოდენობა},$$

$$y = \text{ქვანახშირის მთლიანი რაოდენობა},$$

მაშინ

- *მთლიანი ელექტროენერგიის საწარმოებლად საჭირო ელექრტოენერგიის რაოდენობა* $= 0,1x$;

- *ქვანახშირის მთლიანი რაოდენობის მოსაპოვებლად საჭირო ელენერგიის რაოდენობა* $= 0,2y$;

- *ელექტროენერგიის მთლიანი რაოდენობის საწარმოებლად საჭირო ქვანახშირის რაოდენობა* $= 0,5x$, *და*

- *ქვანახირის მთლიანი რაოდენობის მოსაპოვებლად საჭირო ქვანახშირის რაოდენობა* $= 0,0y$.

ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ორი ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x = 0,1x + 0,2y + 16$$

და

$$y = 0,5x + 0,0y + 8.$$

რადგან ეს ორივე ტოლობა ერთდროულად უნდა სრულდებოდეს, გვექნება წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემა:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,2y + 16 = x \\ 0,5x + 0,0y + \ \ 8 = y \end{cases}$$

რომელიც მატრიცული ფორმით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ *მატრიცას* ***წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა*** *ეწოდება,* $d = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ *ვექტორს -* ***პროდუქციაზე მოთხოვნის ვექტორი*** *(ან,* ***საბოლოო პროდუქციის ვექტორი****), ხოლო* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *ვექტორს კი -* ***მთლიანი წარმოების ვექტორი****.* *მაშასადამე, გვაქვს ტოლობა*

$$Ap + d = p,$$

რომელიც ასე გადავწეროთ:

$$(I - A)p = d.$$

ამ ტოლობიდან p რომ ვიპოვოთ, ამისათვის ჯერ ვიპოვოთ $I - A$ *(სადაც* I *არის მეორე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა). გვაქვს:*

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

რადგან

$$\begin{vmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,5 & 1 \end{vmatrix} = 0,8,$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -0,2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 1,6 = 17,6$$

და

$$\begin{vmatrix} 0,9 & 16 \\ -0,5 & 8 \end{vmatrix} = 7,2 + 8,0 = 15,2,$$

ამიტომ კრამერის წესით გვექნება: $x = 17,6 : 0,8 = 22$ *და* $y = 15,2 : 0,8 = 19$. *მაშასადამე, კომპანიამ მომავალი თვის მიწოდების პირობების შესასრულებლად უნდა აწარმოოს 22 პ/ე ელექტროენერგია და 19 პ/ე ქვანახშირი.*

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, წარმოება შედგება n დარგისაგან. თითოეული დარგი აწარმოებს პროდუქციას, რომლის ნაწილიც გამოიყენება როგორც მოცემული დარგის შიგნით, ასევე სხვა დარგებში ამ პროდუქციაზე არსებული მოთხოვნების უზრუნველსაყოფად, ხოლო დარჩენილი ნაწილი, რომელიც არ გამოიყენება მოცემული დარგების პროდუქციის წარმოებაში, განკუთვნილია ბაზრის (პირადი და საზოგადოებრივი) საბოლოო მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად.

განვიხილოთ მოცემული დარგების ოპერირების გარკვეული პერიოდი (ვთქვათ, ერთი წელი) და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

- x_i– დროის მოცემულ პერიოდში i-ური დარგის მიერ გამოშვებული მთლიანი პროდუქციის მოცულობა $(i = 1, 2, \cdots, n)$;
- x_{ij}– დროის იგივე პერიოდში i-ური დარგის მიერ გამოშვებული იმ პროდუქციის მოცულობა, რომელიც გამოიყენება j-ური დარგის პროდუქციის საწარმოებლად $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$;
- y_i– იგივე პერიოდში i-ური დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობა. $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

რადგან თითოეული i-ური დარგის მიერ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა არის ყველა n დარგის მიერ მოხმარებული პროდუქციისა და საბოლოო პროდუქციის მოცულობების ჯამი, ამიტომ გვაქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + y_1 \\ \quad\vdots \\ x_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + y_i \\ \quad\vdots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + y_n \end{cases}$$

განტოლებათა ამ სისტემას **წარმოების საბალანსო განტოლებები** ეწოდება.

განვსაზღვროთ **პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტები** შემდეგნაირად:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

ცხადია, რომ a_{ij} გამოხატავს i-ური დარგის პროდუქციის იმ მოცულობას პირობით ერთეულში (შემოკლებით,პ/ე-ში), რომელიც საჭიროა j-ური დარგის ერთი პ/ე პროდუქციის საწარმოებლად. რადგან $x_{ij} = a_{ij}x_j$, ამიტომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

მაშინ $\mathbf{x}$ ვექტორს ეწოდება **მთლიანი წარმოების ვექტორი**, $\mathbf{y}$ ვექტორს - **საბოლოო პროდუქციის ვექტორი** (ან, **პროდუქციაზე მოთხოვნის ვექტორი**), ხოლო A მატრიცას კი - **წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა**.

ამ აღნიშვნებით წარმოების საბალანსო განტოლებები მატრიცულად ასე გადაიწერება:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{y},$$

რომელიც თავის მხრივ ასე ჩავწეროთ:

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{11.1}$$

თუ $(I - A)$ მატრიცას დეტერმინატი ნული არაა (ანუ თუ მატრიცა გადაუგვარებელია), მაშინ არსებობს მისი შებრუნებული მატრიცა $(I - A)^{-1}$ და (11.1) განტოლების ამონახსნი მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{y} \tag{11.2}$$

$(I - A)^{-1}$ მატრიცას **წარმოების სრული დანახარჯების მატრიცა** ეწოდება. თუ

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ b_{ij} რიცხვების ეკონომიკური შინაარსი გამოიხატება იმაში, რომ b_{ij} არის i-ური დარგის პროდუქციის ის მოცულობა, რომელიც საჭიროა j-ური დარგის ერთი პ/ე საბოლოო პროდუქციის საწარმოებლად. წარმოების სრული დანახარჯების მატრიცის გამოყენებით (11.2) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \quad\vdots \\ x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \cdots + b_{in}y_n \\ \quad\vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \tag{11.3}$$

მიღებული (11.3) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ თითოეული დარგის მიერ გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობა x_i, თუ ცნობილია წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა და თითოეული დარგის მიერ საბოლოო პროდუქციის მთლიანი მოცულობები y_i. ამ პროცესს **წარმოების გეგმის შედგენა** ეწოდება.

არაუარყოფით A მატრიცას (მატრიცა **არაუარყოფითია**, თუ მისი ყველა კომპონენტი არაუარყოფითია) ეწოდება **რენტაბელური**, თუ (11.2) განტოლებას ყოველი არაუარყოფითი **y** ვექტორისათვის გააჩნია არაუარყოფითი ამონახსნი **x**. მოცემული არაუარყოფითი მატრიცის რენტაბელურობის დასადგენად არსებობს რამდენიმე კრიტერიუმი. ერთ-ერთი ასეთი კრიტერიუმის თანახმად, არაუარყიფითი A მატრიცა რენტაბელურია, თუ მისი სვეტების ელემენტების ჯამების მაქსიმუმი არ აღემატება 1-ს და არსებობს ერთი მაინც ისეთი სვეტი, რომლის ელემენტების ჯამი **ნაკლებია** 1-ზე. ამ კრიტერიუმის ეკონომიკური შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ ერთი პ/ე პროდუქციის წარმოებაზე არ უნდა დაიხარჯოს ერთ პ/ე-ზე მეტი.

მაგალითი 11.2 *შემდეგი მატრიცებიდან რომელია რენტაბელური?*

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,24 \\ 0,23 & 0,34 & 0,1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,24 \\ 0,5 & 0,2 & 0,16 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,24 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. *რადგან* $0,4+0,4+0,34 = 1,14 > 1$, *ამიტომ* A *არაა რენტაბელური. შემდეგ, რადგან* $0,3+0,2+0,5 = 1$, $0,4+0,4+0,2 = 1$ *და* $0,6+0,24+0,16 = 1$, *ამიტომ არც* B *არაა რენტაბელური. ბოლოს, რადგან* $0,3+0,2+0,5 = 1$, $0,4+0,4+0,2 = 1$ *და* $0,6+0,24+0,1 = 0,94 < 1$, *ამიტომ* C *რენტაბელურია.*

მაგალითი 11.3 *ვთქვათ, წარმოება შედგება ორი დარგისაგან და ცნობილია მისი ტექნოლოგიური მატრიცა*

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

განვსაზღვროთ წარმოების გეგმა, თუ პირველი დარგის პროდუქციაზე მოთხოვნა შეადგენს 144 პ/ერთეულს ($y_1 = 144$)*, მეორეზე კი 123-ს* ($y_2 = 123$).

ამოხსნა. *პირველ რიგში უნდა გამოვთვალოთ* $I-A$ *მატრიცა. გვექნება*

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix}.$$

რადგან $|I-A| = 0,93 \cdot 0,9 - 0,12 \cdot 0,14 = 0,8202 \neq 0$, *ამიტომ არსებობს* $(I-A)$ *მატრიცის შებრუნებული, რომელიც ასე გამოითვლება:*

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

მაშინ

$$\boldsymbol{x} = (I-A)^{-1} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}$$

მაშასადამე, პირველმა დარგმა უნდა აწარმოოს 179,0 პ/ე პროდუქცია, მეორემ კი - 160,5.

11.2 წარმოებაში დასაქმების განსაზღვრა.

შრომის რესურსების გამოყენებისა და განაწილების საკითხები ძალზე მნიშვნელოვანია, რადგან მათი გადაწყვეტა დიდწილად განსაზღვრავს წარმოების ეფექტურობას. განვიხილოთ თუ როგორ ხდება ამ საკითხების გადაწყვეტა ლეონტიევის მოდელში.

თითოეულ i-ურ დარგს შევუსაბამოთ დადებითი რიცხვი $l_i > 0$, რომელიც გამოხატავს მოცემულ ტექნოლოგიურ პროცესში i-ური დარგის ერთეული პროდუქციის წარმოებისათვის შრომითი რესურსების საჭირო ხარჯებს. მოდელის მიზნებიდან გამომდინარე, ეს რიცხვები შეიძლება იზომებოდეს როგორც კაც/დღეებში (კაცი/საათებში), ასევე დასაქმებულთა რაოდენობის მიხედვით. შემოვიღოთ ვექტორი $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$, რომელსაც

შრომითი რესურსების დანახარჯების ვექტორი ეწოდება. ადვილი დასანახია, რომ შრომითი რესურსების აუცილებელი დანახარჯები, რომელსაც T-თი აღვნიშნავთ, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$T = (\mathbf{L}, \mathbf{x}) = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n,$$

რომელიც ფორმულა (11.3)-ის გათვალისწინებით მიიღებს ასეთ სახეს:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}l_iy_j.$$

T-ს გამოთვლას **შრომის გეგმის შედგენა** ეწოდება.

მაგალითი 11.4 *ვთქვათ, წარმოება შედგება ორი დარგისაგან და ცნობილია მისი ტექნოლოგიური მატრიცა*

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

განვსაზღვროთ შრომითი გეგმა, თუ პირველი დარგის შრომითი რესურსების დანახარჯი შეადგენს 5 ერთეულს ($l_1 = 5$), მეორესი კი 10-ს ($l_2 = 10$). გეგმის შესამუშავებლად მოცემულია პირველი და მეორე დარგების პროდუქციაზე მოთხოვნა $y_1 = 144$ და $y_2 = 123$.

ამოხსნა. *პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ მაგალითი 11.3-ის თანახმად, პირველი და მეორე დარგების მიერ გეგმით გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობებია $x_1 = 179,0$ და $x_2 = 160,5$. ახლა თუ გამოვიყენებთ შრომის დანახარჯების ფორმულას*

$$T = l_1x_1 + l_2x_2,$$

მივიღებთ:

$$T = 5 \cdot 179,0 + 10 \cdot 160,5 = 895,0 + 1605,0 = 2500,0.$$

11.3 საერთაშორისო ვაჭრობის მოდელი

ვთქვათ, მოცემულია n ქვეყანა, რომელთა ეროვნული შემოსავლებია $x_1, x_2, ..., x_n$. ვთქვათ, i-ური ქვეყნიდან საქონლის შესყიდვაზე j-ური ქვეყანა ხარჯავს თავისი ეროვნული შემოსავლის a_{ij} ნაწილს. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული ქვეყანა თავის ეროვნულ შემოსავალს ხარჯავს საქონლის შესყიდვაზე ან ქვეყნის შიგნით ან სხვა ქვეყნებიდან იმპორტზე, ე. ი.

$$a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj} = 1, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{11.4}$$

მატრიცას

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ვაჭრობის სტრუქტურულ მატრიცას უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ (11.4) ტოლობების გამო სტრუქტურული მატრიცის ყოველ სვეტში ელემენტთა ჯამი 1-ის ტოლია.

ცხადია, i-ური ქვეყნისთვის საშინაო და საგარეო ვაჭრობიდან მიღებული შემოსავალი იქნება

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ, როდის იქნება ვაჭრობა ბალანსირებული, თითოეული ქვეყნისათვის არადეფიციტური, ე. ი. თითოეული ქვეყნის მიერ ვაჭრობიდან მიღებული შემოსავალი როდის იქნება ეროვნულ შემოსავალზე არანაკლები? სხვანაირად რომ ვთქვათ, როდის შესრულდება $p_i \geq x_i (i \in \{1, 2, ..., n\})$ უტოლობები? თუ ამ უტოლობებს ჩავწერთ გაშლილი სახით

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \geq x_n \end{cases} \tag{11.5}$$

და მათ წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$(a_{11}+a_{21}+...+a_{n1})x_1+(a_{12}+a_{22}+...+a_{n2})x_2+...+(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{nn})x_n \geq x_1+x_2+...+x_n.$$

მიღებულ უტოლობაში, ფრჩხილებში მოთავსებული თითოეული გამოსახულება, (11.4) ტოლობების გამო, 1-ის ტოლია, ამიტომ ეს უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

ახლა ცხადია, რომ თუ ერთი მაინც i-თვის ადგილი ექნებოდა მკაცრ უტოლობას $p_i > x_i$, მივიღებდით, რომ

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

რაც შეუძლებელია. ამის გამო, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყოველი i-სთვის $p_i = x_i$ $(i \in \{1, 2, ..., n\})$.

ამრიგად, (11.5) უტოლობათა სისტემა გადაიქცევა განტოლებათა სისტემად, რომელიც მატრიცულად შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$AX = X, \tag{11.6}$$

სადაც

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(11.6) განტოლების ამოხსნით დავადგენთ, თუ როგორი შემოსავლის პირობებში იქნება ვაჭრობა დაბალანსებული.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 11.5 *ვთქვათ, სამი ქვეყნის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

ამ ქვეყნების ეროვნული შემოსავლების როგორი თანაფარდობის შემთხვევაში იქნება მათ შორის ვაჭრობა ბალანსირებული?

ამოხსნა. *თუ* (11.6) *ტოლობას ჩავწერთ* $(A - I)X = 0$ *სახით, მივიღებთ*

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

რაც სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემაა. თუ ამ სისტემას ამოვხსნით გაუსის მეთოდით, მივიღებთ, რომ მისი ზოგადი ამონახსნია $\left(\frac{3}{2}x_3, 2x_3, x_3\right)$, $x_3 \in \mathbb{R}$. *აქედან კი ჩანს, რომ ეროვნული შემოსავლები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც* $\frac{3}{2} : 2 : 1$, *ანუ როგორც* $3 : 4 : 2$.

11.4 სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცაა $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - მთლიანი წარმოების ვექტორი, ხოლო $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ კი - პროდუქციაზე მოთხოვნის ვექტორი. თუ $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, მაშინ რა ეკონომიკური აზრი აქვს გამოსახულებებს: a_{23}; $a_{11} + a_{12} + a_{13}$; $x_2 - y_2$; b_{11}?

2. იპოვეთ წარმოების საბოლოო პროდუქციის მთლიანი მოცულობა, თუ წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცაა $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$, ხოლო მთლიანი წარმოების ვექტორი კი - $\begin{pmatrix} 400 \\ 350 \\ 300 \end{pmatrix}$.

3. შეუძლია თუ არა წარმოებას, რომლის ტექნოლოგიური მატრიცაა $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, უზრუნველყოს პროდუქციაზე ნებისმიერი $\mathbf{y}$ $(\mathbf{y} \geq 0)$ მოთხოვნის დაკმაყოფილება?

4. შემდეგი მატრიცებიდან რომელია რენტაბელური?

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

5. x-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა შემდეგი მატრიცა რენტაბელური?

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & x & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

6. y-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა შემდეგი მატრიცა რენტაბელური?

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & y \\ 0.3 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

7. z-ის რა მნიშვნელობებისთვისაა შემდეგი მატრიცა რენტაბელური?

$$\begin{pmatrix} z & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & z \end{pmatrix}$$

8. სამდარგიანი წარმოების ტექნოლოგიურ კოეფიციენტთა მატრიცაა

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0,2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

   თითოეული დარგის რამდენი ერთეული პროდუქცია უნდა აწარმოოს საწარმომ იმისათვის, რომ ყველა დარგმა შეძლოს 90 ერთეული პროდუქციის გაყიდვა?

9. სამდარგიანი წარმოების ტექნოლოგიურ კოეფიციენტთა მატრიცაა

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix},$$

   ხოლო დარგების პროდუქციაზე მოთხოვნის ვექტორი კი -

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

   შეადგინეთ წარმოების გეგმა.

10. სამდარგიანი წარმოებისათვის ტექნოლოგიურ კოეფიციენტთა მატრიცაა

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix},$$

დარგების პროდუქციაზე მოთხოვნის ვექტორი -

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix},$$

ხოლო შრომის დანახარჯის ვექტორი კი -

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 400 \\ 350 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრეთ შრომის აუცილებელი მთლიანი დანახარჯი.

11. სამი ქვეყნის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა:

$$\text{ა)} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad \text{ბ)} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ, თავისი ეროვნული შემოსავლის რა ნაწილს ხარჯავს თითოეული ქვეყანა დანარჩენი ორი ქვეყნიდან საქონლის შესაძენად.

12. ეროვნული შემოსავლების როგორი თანაფარდობის შემთხვევაში იქნება სამ ქვეყანას შორის ვაჭრობა ბალანსირებული, თუ მათ შორის ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცაა:

$$\text{ა)} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad \text{ბ)} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

ლექცია 12

ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

12.1 ინტუიციური წარმოდგენა ფუნქციის ზღვრის შესახებ

ფუნქციის ზღვარი მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა. ის ასევე წარმატებით გამოიყენება მრავალი ეკონომიკური ამოცანის მათემატიკური მოდელის შესწავლის დროსაც. სანამ მოვიყვანდეთ ფუნქციის ზღვრის მკაცრ განმარტებას, მანამდე შევეცადოთ მაგალითების საშუალებით შევიქმნათ წარმოდგენა მისი არსის შესახებ.

მაგალითი 12.1 *განვიხილოთ ფუნქცია* $y = \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$ *და შევისწავლოთ მისი ყოფაქცევა* $x = 2$ *წერტილის მიდამოში. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე* $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

გავიხსენოთ, რომ a წერტილის მიდამოს ვუწოდებთ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ სახის ინტერვალს, სადაც ε რაიმე დადებითი რიცხვია.

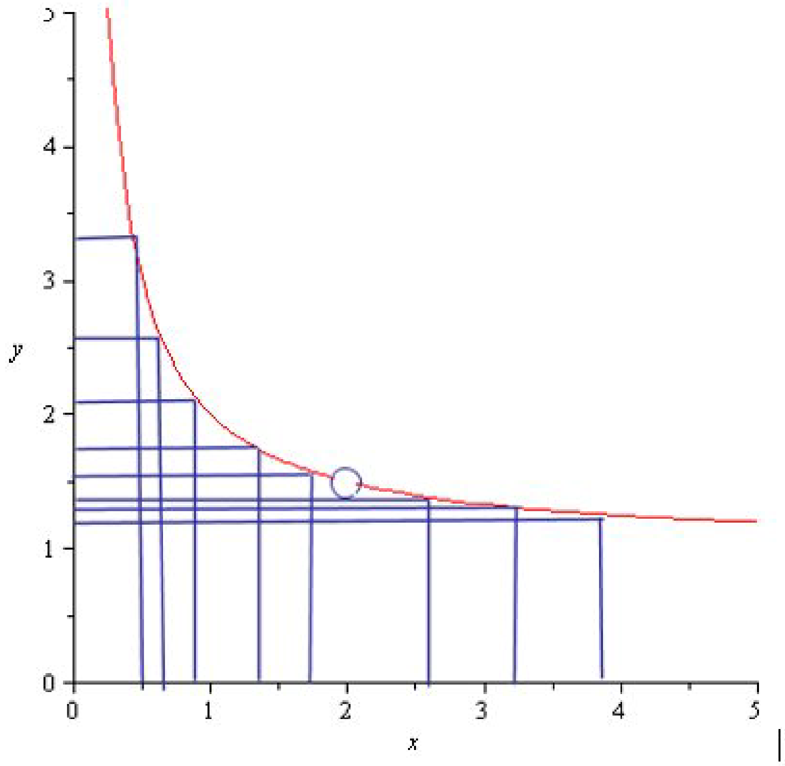
განვიხილოთ $x = 2$ წერტილის რომელიმე მიდამო და ავიღოთ x-ის მნიშვნელობები ამ წერტილთან იმდენად ახლოს, რომ ისინი მოხვდნენ მოცემულ მიდამოში; შემდეგ კი ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	3.4	1.5	5.0
2.1	3.857142857	1.9	4.157894737
2.01	3.985074627	1.99	4.015075377
2.001	3.998500750	1.999	4.001500750
2.0001	3.999850007	1.9999	4.000150008
2.00001	3.999985000	1.99999	4.000015000

როგორც მიღებული ცხრილიდან ვხედავთ, თუ ავიღებთ x -ს $x = 2$ წერტილის მარჯვნივ და ვამოძრავებთ ამავე წერტილისკენ, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები მიუახლოვდება 4 ს. ანალოგიურად, თუ ავიღებთ x -ს $x = 2$ წერტილის მარცხნივ და ვამოძრავებთ $x = 2$ წერტილისაკენ, ფუნქციის მნიშვნელობები აგრეთვე მიუახლოვდება 4-ს; ე.ი f. ფუნქციის მნიშვნელობები ახლოსაა 4-თან, როცა x უახლოვდება $x = 2$ წერტილს. განხილულ პროცესს მივყავართ ფუნქციის ზღვრის ცნების ინტუიციურ წარმოდგენამდე

და ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მოცემული ფუნქციის ზღვარი $x = 2$ წეერტილში 4-ის ტოლია. ამ ფაქტს ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x} = 4.$$



სურ 12.1

ვთქვათ, ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია $x = a$ წერტილისა. ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის ზღვარი $x = a$ წერტილში არის A, თუ$f(x)$ წინასწარ განსაზღვრული სიზუსტით ახლოსაა A-თან, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ:$\lim_{x \to a} f(x) = A$ ან ასე: $f(x) \to A$, როცა $x \to a$.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, უკანასკნელი მსჯელობა არ არის ზღვრის მკაცრი განსაზღვრება, თუმცა ის გვეხმარება გავერკვეთ ფუნქციის ზღვრის ცნების არსში; და მაინც, უფრო ზუსტად, რას გულისხმობს ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა? ვთქვათ, ვიცით, რომ ზღვარი არსებობს და ის არის A . წინასწარ განვსაზღვროთ A -დან რა სიახლოვეში გვინდა იყოს $f(x)$. ვთქვათ, ჩვენი სურვილია $f(x)$ იყოს A -დან არაუმეტეს 0.001 ერთეულით დაშორებული, ანუ უნდა შესრულდეს უტოლობა $|f(x) - A| < 0,001$, როცა x ახლოს არის a – თან. შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია შემდეგი ორმაგი უტოლობის

$$A - 0,001 < f(x) < A + 0,001.$$

არ არის ძნელი ისეთი δ –ს მოძებნა, რომ როცა $2 - \delta < x < 2 + \delta$ და $x \neq 2$, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ორმაგი უტოლობა სამართლიანი იქნება.

ყურადსაღებია ის ფაქტი, რომ ზღვრის განსაზღვრებაში არ ვიხილავთ $x = a$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობას (ფუნქცია, შესაძლებელია არც იყოს განსაზღვრული

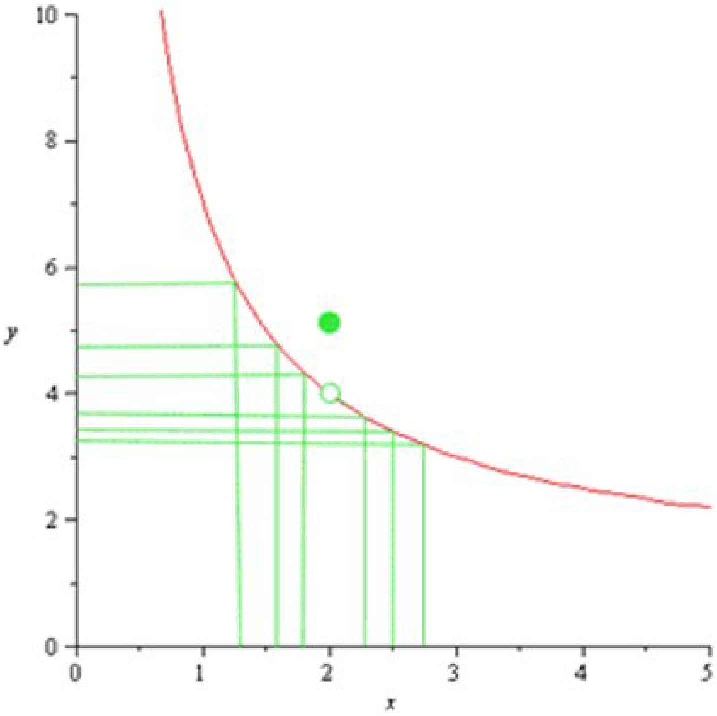
$x = a$ წერტილზე). ზღვრის ცნება საშუალებას გვაძლევს, მივიღოთ გარკვეული ინფორმაცია $f(x)$ -ის ყოფაქცევის შესახებ, როცა x იცვლება a წერტილის მიდამოში. მაგრამ ფუნქციის ზღვრის მნიშვნელობის მოსაძებნად არ არის საინტერესო, თუ რა ხდება თვით a წერტილში. ზემოთ განხილულ მაგალითში $x = 2$ წერტილში ფუნქცია არ არის განსაზღვრული. ამის მიუხედავად ამ წერტილში ჩვენ ვიხილავთ ფუნქციის ზღვარს.

მაგალითი 12.2 *ვიპოვოთ* $\lim_{x\to 2} g(x)$, *თუ*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}, & \text{თუ } x \neq 2, \\ 5, & \text{თუ } x = 2. \end{cases}$$

ამოხსნა. *თუ დავაკვირდებით* $g(x)$ *ფუნქციის გრაფიკს (სურ 12.2), ადვილი მისახვედრია, რომ*

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4.$$

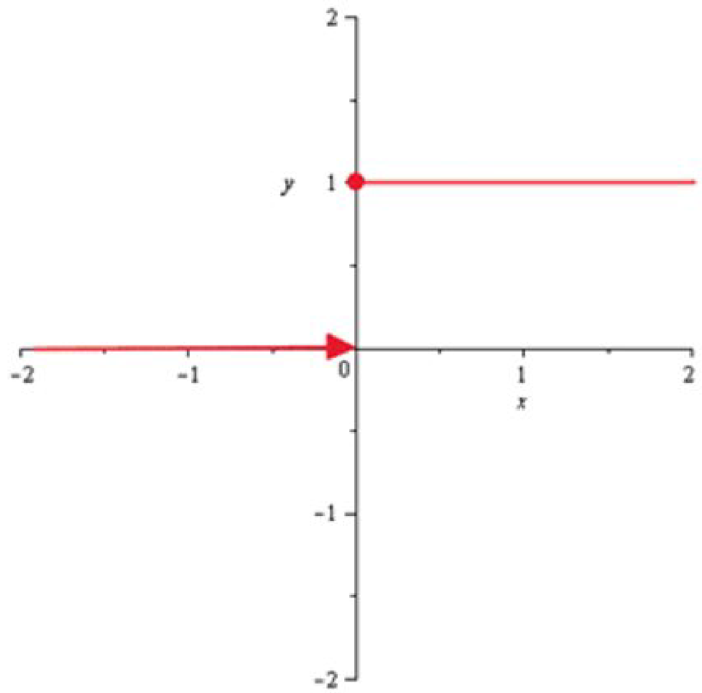


სურ 12.2

მაგალითი 12.3 *ვიპოვოთ* $\lim_{x\to 0} h(x)$, *თუ*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x < 0, \\ 1, & \text{თუ } x \geq 0. \end{cases}$$

__ამოხსნა.__ ამ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზიდან (სურ 12.3) ადვილად დავასკვნით, რომ როცა x ღერძზე 0 წერტილს მარჯვნიდან დავუახლოვებთ x -ებს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდება 1-ს (უფრო ზუსტად, ტოლია 1-ის), ხოლო თუ x -ებს 0 წერტილს ვუახლოვებთ მარცხნიდან, მაშინ $f(x)$ მნიშვნელობები უახლოვდება 0-ს. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების ძალით, ფუნქციის მნიშვნელობები უნდა მიუახლოვდეს ერთსა და იმავე კონკრეტულ რიცხვს, როცა x უახლოვდება (ორივე მხრიდან) 0 -ს. ამ შემთხვევაში ეს არ ხდება. მაშასადამე, ამ ფუნქციას წერტილში არა აქვს ზღვარი



სურ 12.3

12.2 ფუნქციის ზღვრის თვისებები

ვთქვათ, მოცემულია f და g ფუნქციები. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს $\lim_{x\to a} f(x)$ და $\lim_{x\to a} g(x)$ და c რაიმე ნამდვილი რიცხვია. მაშინ:

1) $\lim_{x\to a} c = c$.

2) ნებისმიერი $c \in \mathbb{R}$ რიცხვისთვის $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$. სხვა სიტყვებით, მუდმივი მამრავლი "გადის" ზღვრის ნიშნის გარეთ.

3) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$. სხვა სიტყვებით, ჯამის (სხვაობის) ზღვარი ზღვართა ჯამის (სხვაობის) ტოლია.

4) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$. სხვა სიტყვებით, ნამრავლის ზღვარი ზღვართა ნამრავლის ტოლია.

5) თუ დამატებით ცნობილია, რომ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ მაშინ

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}.$$

6) თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)\leq g(x)$, მაშინ $\lim_{x\to a}f(x)\leq\lim_{x\to a}g(x)$.

7) $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\alpha}=[\lim_{x\to a}f(x)]^{\alpha}$, თუ $\alpha\in\mathbb{R}$ და f დადებითი ფუნქციაა. თუ $\alpha\in\mathbb{N}$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n,$$

სადაც f ნებისმიერი ნიშნის ფუნქციაა.

მაგალითად, თუ $n=2$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^2=\lim_{x\to a}[f(x)f(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}f(x)=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^2.$$

8)

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}.$$

მაგალითი 12.4 *გამოვთვალოთ* $\lim_{x\to-2}(3x^2+5x-9)$.

ამოხსნა. *ფუნქციის ზღვრის მე-3 თვისების ძალით*

$$\lim_{x\to-2}\left(3x^2+5x-9\right)=\lim_{x\to-2}3x^2+\lim_{x\to-2}5x-\lim_{x\to-2}9.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ მეორე თვისებას, მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\left(3x^2+5x-9\right)&=\lim_{x\to-2}3x^2+\lim_{x\to-2}5x-\lim_{x\to-2}9\\&=3\lim_{x\to-2}x^2+5\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}9.\end{aligned}$$

აქ კი, უშუალოდ ზღვარზე გადასვლით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\left(3x^2+5x-9\right)=&3\lim_{x\to-2}x^2+5\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}9\\=&3(-2)^2+5(-2)-9=-7\end{aligned}.$$

12.3 ცალმხრივი ზღვრები

როგორც ვნახეთ, 12.3 მაგალითში მოცემულ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია $a=0$ წერტილში, რადგან ფუნქციის მნიშვნელობები არ უახლოვდება ერთ კონკრეტულ სიდიდეს, როცა განსაზღვრის არის წერტილები ახლოს არის 0-თან. ამის მიზეზი არის ის, რომ ფუნქციის მნიშვნელობები ორი სხვადასხვა რიცხვის ირგვლივ იყრის თავს იმის მიხედვით, თუ რომელი მხრიდან უახლოვდება x -ები 0-ს. ამ შემთხვევას მივყავართ ე.წ. ცალმხრივი ზღვრების ცნებამდე.

მარჯვენა ზღვარი. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია $(a,a+\varepsilon)$ შუალედში, სადაც ε რაიმე დადებითი რიცხვია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან $x=a$ წერტილში არის A რიცხვი, თუ $f(x)$ საკმაოდ ახლოსაა A-თან, როცა x წერტილი a -ს მარჯვნივაა და ისიც, თავის მხრივ, საკმაოდ ახლოსაა a -თან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\lim_{x\to a+}f(x)=A$ ან $f(x)\to A$, როცა $x\to a+$.

მარცხენა ზღვარი. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია $(a-\varepsilon, a)$ შუალედში, სადაც ε რაიმე დადებითი რიცხვია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან $x = a$ წერტილში არის A რიცხვი, თუ $f(x)$ საკმაოდ ახლოსაა A -თან, როცა x წერტილი a -ს მარცხნივაა და ისიც, თავის მხრივ, საკმაოდ ახლოსაა a -თან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ:$\lim_{x\to a_-} f(x) = A$ ან $f(x) \to A$, როცა $x \to a-$.

მაგალითი 12.5 *კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ 13.3 მაგალითში განხილულ ფუნქციას. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ x მარჯვნიდან უახლოვდება 0-ს , მაშინ h ფუნქციის მნიშვნელობები(რომლებიც 1-ის ტოლია) უახლოვდებიან 1-ს. ე.ი*

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = 1$$

.

ანალოგიურად, თუ x მარცხნიდან უახლოვდება 0-ს , მაშინ ამ ფუნქციის მნიშვნელობები (რომლებიც 0-ის ტოლია) უახლოვდებიან 0-ს. ე. ი.

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = 0.$$

მივაქციოთ ყურადღება, რომ ამ მაგალითში ცალმხრივი ზღვრები $x = 0$ წერტილში არსებობენ, თუმცა ამ წერტილში ფუნქციას ზღვარი არ აქვს.

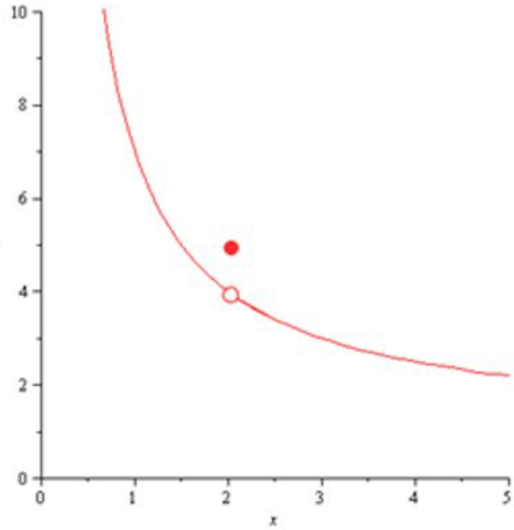
მაგალითი 12.6 *ვიპოვოთ $\lim_{x\to 2+} g(x)$ და $\lim_{x\to 2-} g(x)$ თუ*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x^2-2x}, \text{ თუ } x \neq 2 \\ 5, \text{ თუ } x = 2. \end{cases}$$

ამოხსნა. *ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში $\lim_{x\to 2+} g(x) = 4$, $\lim_{x\to 2-} g(x) = 4$ და $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$ (ნურ 12.4).*

შევნიშნოთ, რომ ცალმხრივი ზღვრების განხილვისას წერტილში (ისევე როგორც ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრებისას), მნიშვნელოვანია ფუნქციის ყოფაქცევა ამ წერტილის ცალმხრივ მიდამოში და არა თვით წერტილში.

თუ დავუბრუნდებით 13.4 და 13.5 მაგალითებს, შევნიშნავთ, რომ პირველ შემთხვევაში ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს და ერთმანეთისგან განსხვავებულია. მაშინ, როცა 13.5 მაგალითში ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს და ერთმანეთის ტოლია. უფრო მეტიც, ისინი ფუნქციის ზღვრის ტოლია მოცემულ წერტილში. ეს არ არის შემთხვევითი, რადგან არსებობს გარკვეული კავშირი ცალმხრივ ზღვრებსა და ფუნქციის ზღვარს შორის. კერძოდ, მართებულია შემდეგი



სურ 12.4

თეორემა 12.1 *ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია f რომლისთვისაც*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A$$

მაშინ არსებობს f ფუნქციის ზღვარი a წერტილში და

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

პირიქითაც, თუ არსებობს $\lim_{x\to a} f(x) = A$, მაშინ არსებობს ორივე ცალმხრივი ზღვარი a წერტილში და

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A.$$

თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია (a, b) ინტერვალზე, მაშინ a და b წერტილებში ამ ფუნქციის ზღვრის ქვეშ გვესმის, შესაბამისად $\lim_{x\to a+} f(x)$, და $\lim_{x\to b-} f(x)$ ზღვრები.

თუ

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

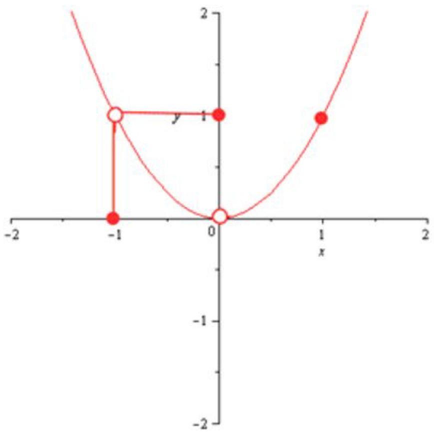
მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უსასრულოდ მცირე** a წერტილში.

მაგალითი 12.7 *მოცემულია ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი: (სურ 12.5)-ის a) . ვიპოვოთ ამ ფუნქციის ზღვრები $x = -1, x = 0, x = 1$ წერტილებში.*

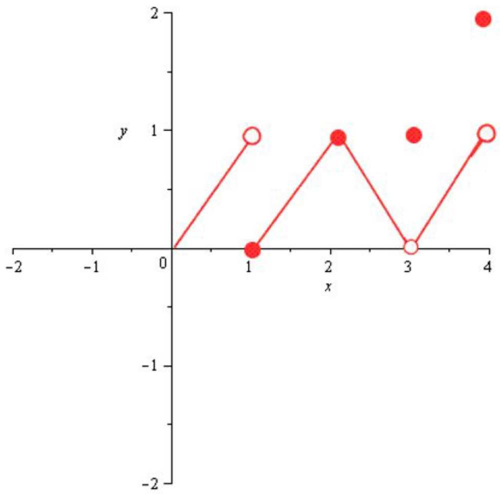
ამოხსნა. *ადვილი დასანახია, რომ* $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. *მეორე მხრივ კი* $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

მაგალითი 12.8 *სურ 12.5-ის b)-ს ანალიზიდან ვასკვნით:*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1, \lim_{x\to 1+} f(x) = 0, \quad f(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \lim_{x\to 4-} f(x) = 1, f(4) = 2.$$



(a)



(b)

სურ 12.5

მაგალითი 12.9 *მოცემულია ფუნქცია (სურ 12.6):*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \textit{თუ } 0 \le x < 2, \\ 2x + 1, & \textit{თუ } x \ge 2. \end{cases}$$

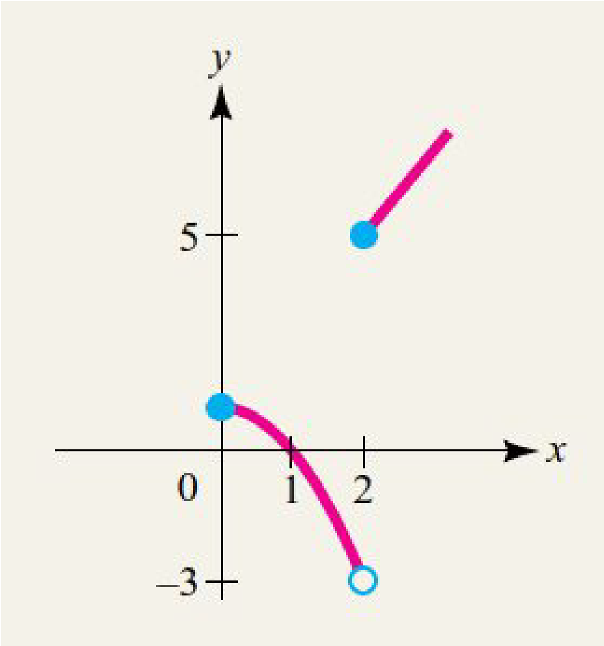
იპოვეთ ცალმხრივი ზღვრები $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *და* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

ამოხსნა. *რადგანაც* $f(x) = 1 - x^2$, *როცა* $0 \le x < 2$, *მივიღებთ:*

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(1 - x^2\right) = -3.$$

ანალოგიურად, $f(x) = 2x + 1$, *თუ* $x \ge 2$, *და*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x + 1) = 5.$$



სურ 12.6

მაგალითი 12.10 *მოცემული ფუნქცია (სურ 12.7):*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{თუ } x < 1, \\ -x^2 + 4x - 1, & \text{თუ } x \ge 1. \end{cases}$$

შევისწავლოთ $\lim_{x\to 1} f(x)$ *ზღვრის არსებობის საკითხი.*
გამოვთვალოთ ცალმხრივი ზღვრები $x = 1$ *წერტილში.*
ამოხსნა.

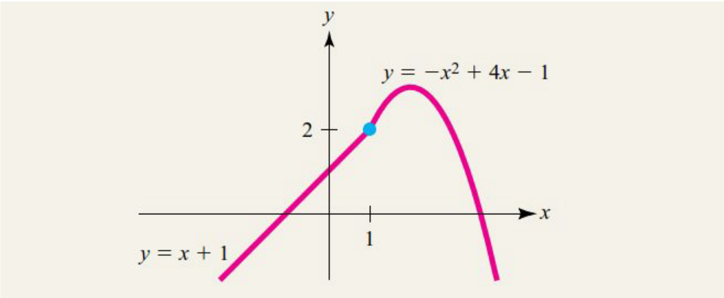
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = (1) + 1 = 2, \quad \text{რადგანაც } f(x) = x + 1, \text{ როცა } x < 1,$$

ხოლო

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-x^2 + 4x - 1\right) = -(1)^2 + 4(1) - 1 = 2. \quad \text{რადგანაც } f(x) = -x^2 + 4x - 1, \text{ როცა } x \ge 1.$$

ვინაიდან ცალმხრივი ზღვრები ემთხვევა ერთმანეთს $x=1$ წერტილში, ამიტომ მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2.$$



სურ 12.7

12.4 ფუნქციის უწყვეტობა

უწყვეტი პროცესები ჩვენი ცხოვრების მნიშვნელოვანი ნაწილია. მაგალითად, ხის ზრდა უწყვეტია, ისევე როგორც რაკეტის მოძრაობა და აბაზანაში ჩამდინარე წყლის მოცულობა. ამ პარაგრაფში ვიმსჯელებთ, თუ რას ნიშნავს ფუნქციის უწყვეტობა და განვიხილავთ ასეთი ტიპის ფუნქციების რამდენიმე მნიშვნელოვან თვისებას.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის უწყვეტობა $x=c$ წერტილში ნიშნავს, რომ მას მოცემულ წერტილში არ აქვს "ხვრელი". მაშინ საინტერესოა, ფუნქციის რა თვისებები უზრუნველყოფენ ამას? პასუხი გასაოცრად მარტივია.

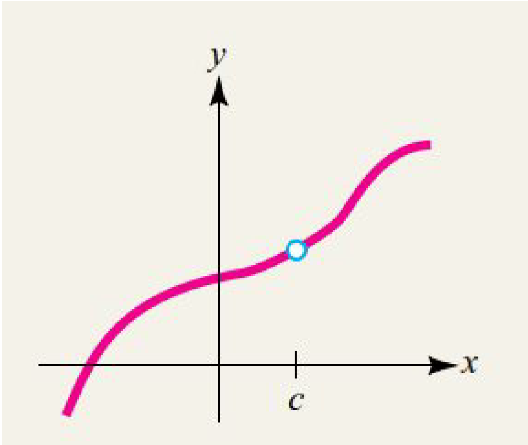
f ფუნქცია **უწყვეტია** c წერტილში, თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:
ა) $f(c)$ განსაზღვრულია;
ბ) $\lim_{x\to c} f(x)$ არსებობს;
გ) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
თუ f ფუნქცია არ არის უწყვეტი c წერტილში, ანუ თუ ამ სამი პირობიდან ერთ-ერთი მაინც არ სრულდება, მაშინ მას ამ წერტილში ეწოდება **წყვეტილი** (სურ 12.8 და სურ 12.9) .

მაგალითი 12.11 *დავამტკიცოთ, რომ ფუნქცია $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ უწყვეტია $x=3$ წერტილში.*

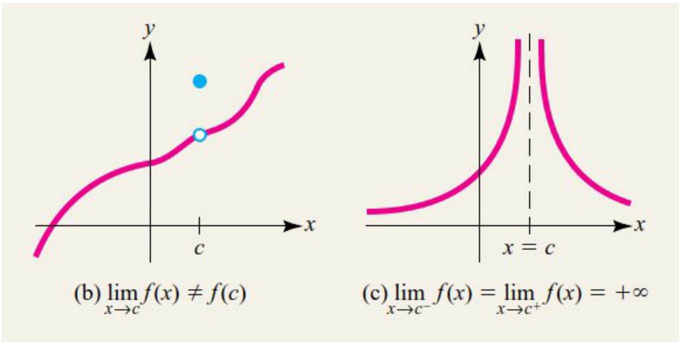
ამოხსნა. *შევნიშნოთ, რომ $f(3)=\frac{3+1}{3-2}=4$. რადგანაც $\lim_{x\to 3}(x-2)\neq 0$, მივიღებთ:*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x+1)}{\lim_{x\to 3}(x-2)} = \frac{4}{1} = 4 = f(3).$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=3$ წერტილში.



(a)



(b)

სურ 12.8

მაგალითი 12.12 *შევისწავლოთ უწყვეტობაზე შემდეგი ფუნქციები (სურ 12.10) :*

ა) $f(x) = \frac{1}{x}$*;*

ბ) $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$*;*

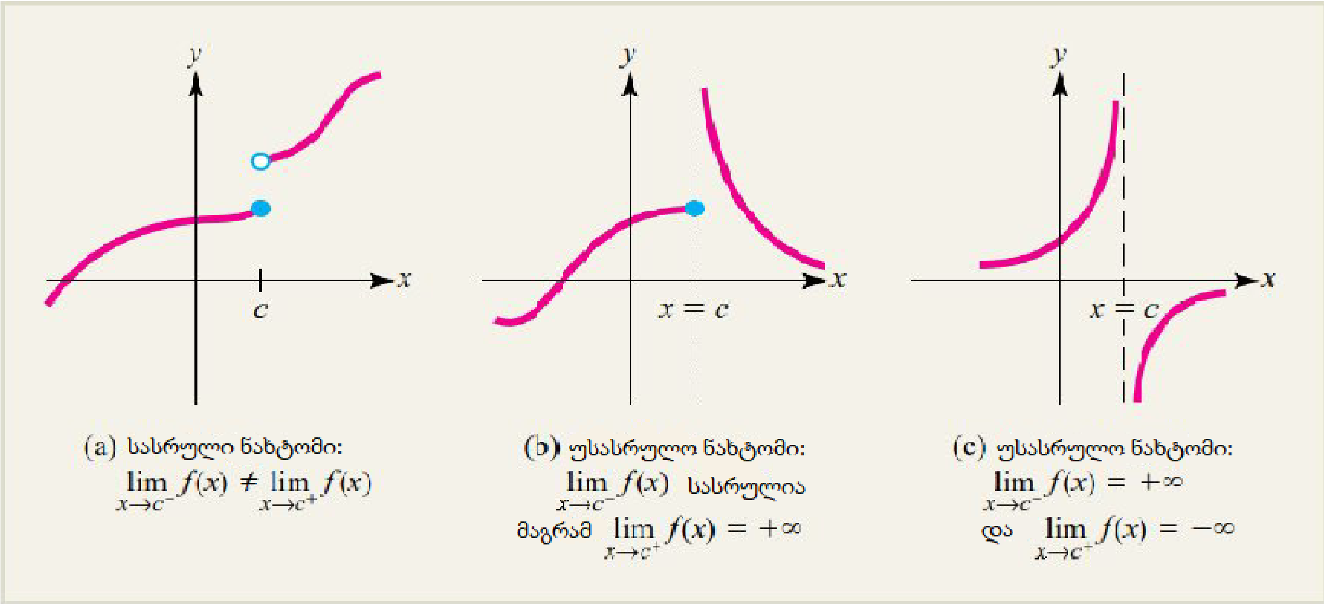
გ) $h(x) = \begin{cases} x+1, & \text{თუ } x < 1 \\ 2-x, & \text{თუ } x \geq 1. \end{cases}$

ამოხსნა:

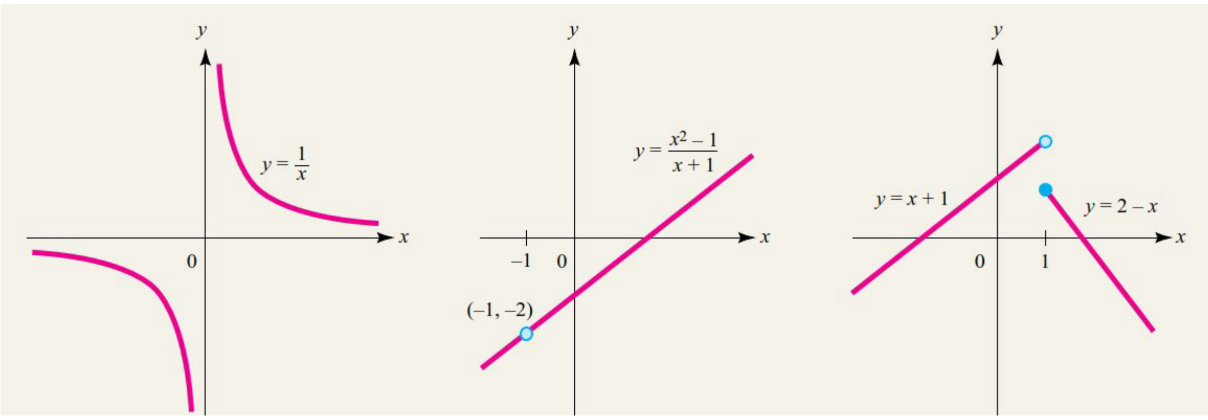
ა) $f(x) = \frac{1}{x}$ *განსაზღვრულია ყველგან, გარდა* $x = 0$ *წერტილისა და, მაშასადამე, უწყვეტია ყველგან განსაზღვრის არეში;*

ბ) რადგანაც ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $x = -1$ *წერტილისა, დავასკვნით, რომ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.*

გ) ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზღვარი $\lim_{x\to 1} h(x)$ *არ არსებობს, რადგანაც* $h(x)$ *მნიშვნელობები უახლოვდება ორ სხვადასხვა მნიშვნელობას(1-სა და 2-ს), როცა* x*-ის მნიშვნელობები უახლოვდებიან* $x = 1$*-ს მარჯვნიდან და მარცხნიდან. მაშასადამე,* $h(x)$ *წყვეტილია* $x = 1$ *წერტილში . მეორეს მხრივ,* $x+1$ *და* $2-x$ *პოლინომები უწყვეტებია* x*-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. საბოლოოდ დავასკვნით, რომ* $h(x)$ *ფუნქცია უწყვეტია* x*-ის დანარჩენი მნიშვნელობებისათვის.*



სურ 12.9



სურ 12.10

მაგალითი 12.13 *ვიპოვოთ A პარამეტრის ყველა ის x მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემული ფუნქცია უწყვეტია.*

$$f(x) = \begin{cases} Ax + 5, & \text{როცა } x < 1, \\ x^2 - 3x + 4, & \text{როცა } x \geq 1. \end{cases}$$

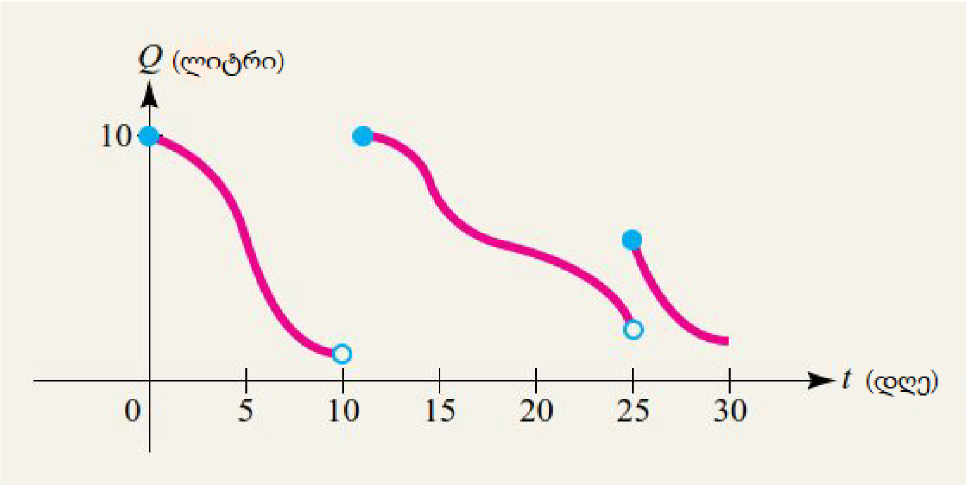
ამოხსნა. *რადგანაც $Ax + 5$ და $x^2 - 3x + 4$ პოლინომებია, ამიტომ $f(x)$ უწყვეტია ყველგან გარდა $x = 1$ წერტილისა. ადვილი დასანახია, რომ, $f(x)$ უახლოვდება $A + 5$ მნიშვნელობას, როცა x უახლოვდება 1-ს მარცხნიდან, და უახლოვდება 2-ს როცა x უახლოვდება 1-ს მარჯვნიდან. მაშასადამე, იმისათვის რომ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ზღვარი არსებობდეს აუცილებელია $A + 5 = 2$, ანუ $A = -3$. ამრიგად,*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1).$$

მაშასადამე, f ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის მხოლოდ მაშინ, როცა $A = -3$.

მაგალითი 12.14 *სურ 12.11-ზე მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც აღწერს ნიკას ავტომობილის ავზში ბენზინის რაოდენობას 30 დღის განმავლობაში. როდის არის გრაფიკი წყვეტილი და რას ფიქრობთ, რა ხდება დროის ამ მომენტში?*

ამოხსნა. *როგორც გრაფიკიდან ჩანს, ფუნქციას $t = 10$ და $t = 25$ წერტილებში არ გააჩნია ზღვრები, ვინაიდან ამ წერტილებში ცალმხრივი ზღვრები განსხვავებულია. ამდენად, ფუნქციის წყვეტის წერტილებია $t = 10$ და $t = 25$. კვლავ, გრაფიკის ანალიზიდან ვასკვნით, რომ მე-10 და 25-ე დღეს ნიკა ავტოგასამართ სადგურზე ყიდულობს ბენზინის გარკვეულ რაოდენობას.*



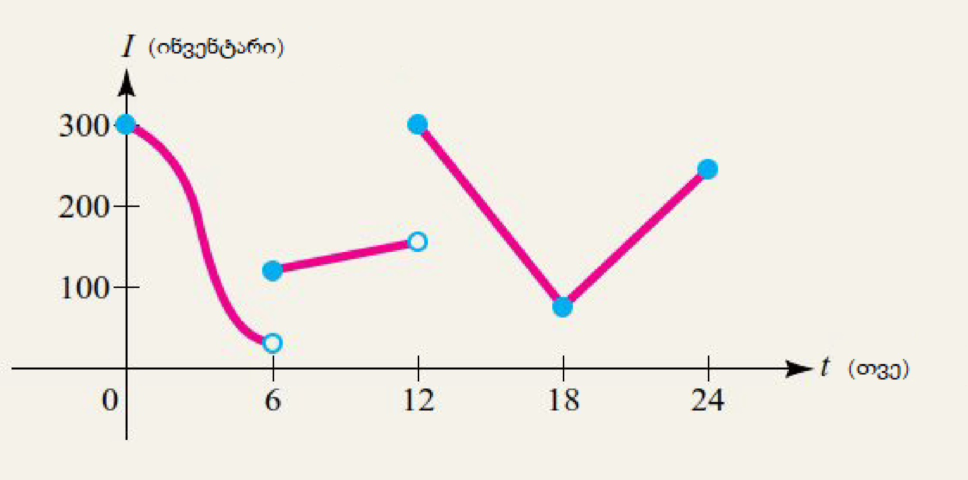
სურ 12.11

მაგალითი 12.15 *სურ 12.12-ზე მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც აღწერს ორი წლის განმავლობაში საწარმოში ინვენტარის რაოდენობას. როდის არის გრაფიკი წყვეტილი და რა ხდება საწარმოში დროის ამ მომენტში?*

ამოხსნა. *როგორც გრაფიკიდან ჩანს, ფუნქციას $t = 6$ და $t = 12$ წერტილებში არ გააჩნია ზღვრები, ვინაიდან ამ წერტილებში ცალმხრივი ზღვრები განსხვავებულია.მაშასადამე, ფუნქციის წყვეტის წერტილებია $t = 6$ და $t = 12$. გრაფიკის ანალიზიდან ვასკვნით, რომ საწარმოში მე-6 და მე-12 თვეს მოხდა დიდი რაოდენობით ახალი ინვენტარის შეძენა.*

განსაზღვრება 12.1 *$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $a < x < b$ ინტერვალზე, თუ ის უწყვეტია მოცემული ინტერვალის ყველა $x = c$ წერტილში. f ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $a \le x \le b$ სეგმენტზე, თუ ის უწყვეტია $a < x < b$ ინტერვალზე და*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{და} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$



სურ 12.12

მაგალითი 12.16 *შევისწავლოთ*

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

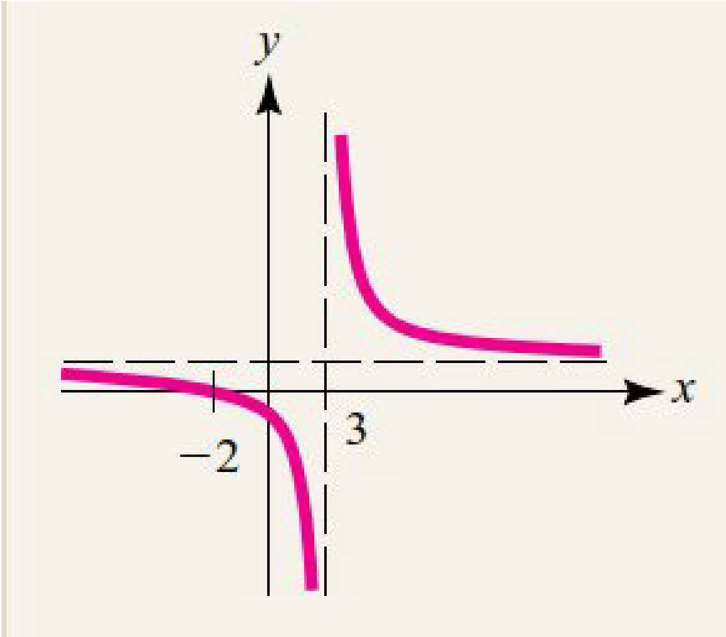
ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი ღია $-2 < x < 3$ *და ჩაკეტილ* $-2 \le x \le 3$ *ინტერვალებზე.*

ამოხსნა. *რაციონალური* $f(x)$ *ფუნქცია უწყვეტია ყველგან გარდა* $x = 3$ *წერტილისა. მაშასადამე, ის უწყვეტი იქნება ღია* $-2 < x < 3$ *ინტერვალზეც, მაგრამ არა ჩაკეტილ* $-2 \le x \le 3$ *ინტერვალზე, ვინაიდან ამ ინტერვალის ბოლო წერტილი 3(იქ, სადაც მნიშვნელი ხდება ნული), ფუნქციის წყვეტის წერტილია (სურ 12.13).*

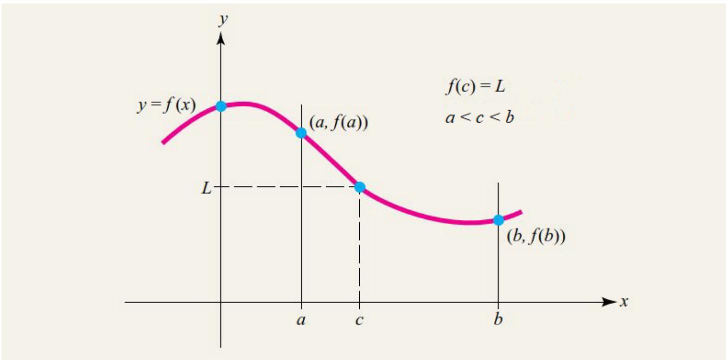
უწყვეტი ფუნქციების მნიშვნელოვანი მახასიათებელია შუალედური მნიშვნელობის მიღების თვისება. ამ თვისების თანახმად, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a \le x \le b$ ინტერვალზე და L არის რაიმე რიცხვი $f(a)$ და $f(b)$ მნიშვნელობებს შორის, მაშინ a და b რიცხვებს შორის აუცილებლად მოიძებნება ისეთი c რიცხვი, რომ $f(c) = L$ (სურ 12.14). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უწყვეტი ფუნქცია ღებულობს **ყველა** მნიშვნელობას მის რომელიმე ორ მნიშვნელობას შორის.
მაგალითად, თუ გოგონა დაბადებისას იწონიდა 5 კგ-ს, ხოლო 12 წლის ასაკში იწონის 35 კგ-ს, მაშინ მისი წონა აუცილებლად იქნებოდა 26 კილოგრამი 12 წლიანი ცხოვრების რომელიმე მომენტში, ვინაიდან გოგონას წონა არის დროის უწყვეტი ფუნქცია.

მაგალითი 12.17 *გამოვიკვლიოთ, აქვს თუ არა ამონახსნი* $x^2 - x - 1 = \frac{1}{x+1}$ *განტოლებას, როცა* $1 < x < 2$.

ამოხსნა *განვიხილოთ ფუნქცია* $f(x) = x^2 - x - 1 - \frac{1}{x+1}$. *ცხადია,* $f(1) = -\frac{3}{2}$ *და* $f(2) = \frac{2}{3}$. *ამასთანავე,* $f(x)$ *უწყვეტია როცა* $1 \le x \le 2$ *და მისი გრაფიკი მდებარეობს*



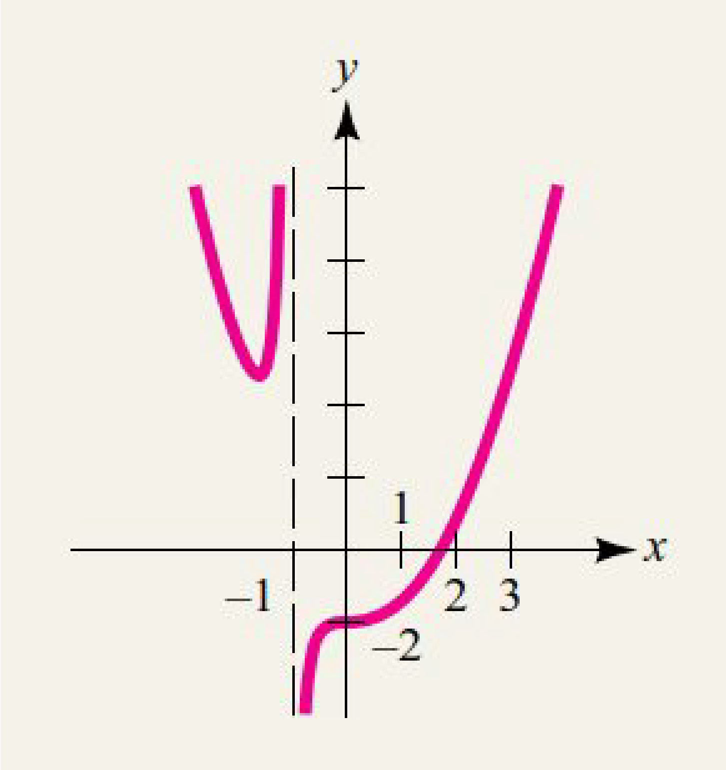
სურ 12.13



სურ 12.14

x ღერძის ქვემოთ $x = 1$ წერტილში და x ღერძის ზემოთ $x = 2$ წერტილში-ანუ, ამ წერტილებში ფუნქციას სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობები გააჩნია. მაშინ უწყვეტი ფუნქციის ზემოთ ნახსენები თვისების თანახმად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკი აუცილებლად გადაკვეთს x ღერძს $x = 1$ და $x = 2$ წერტილებს შორის მდებარე რომელიმე წერტილში(სურ 12.15). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არსებობს რიცხვი c, ისეთი რომ $1 < c < 2$ და $f(c) = 0$, ანუ

$$c^2 - c - 1 = \frac{1}{c+1}.$$



სურ 12.15

12.5 უსასრულო ზღვრები და ზღვარი უსასრულობაში

"გრძელვადიანი"ქცევა ხშირად არის ბიზნესისა და ეკონომიკის ან ფიზიკური და სიცოცხლის შემსწავლელი მეცნიერებების ინტერესი. მაგალითად, ბიოლოგს სურს განუსაზღვრელი პერიოდის შემდეგ იცოდეს ბაქტერიული კოლონიის პოპულაცია, ან ბიზნესმენეჯერს სურს იცოდეს, თუ როგორ მოქმედებს კონკრეტული საქონლის წარმოების დონის უსასრულოდ გაზრდა ამავე საქონლის წარმოების საშუალო დანახარჯზე. მათემატიკაში უსასრულობის სიმბოლო ∞ გამოიყენება უსასრულო ზრდის ან ამგვარი ზრდის შედეგის წარმოსადგენად. მოვიყვანოთ უსასრულო ზღვრების თვისებები, რომელთაც გამოვიყენებთ გრძელვადიანი ქცევის შესასწავლად.

თეორემა 12.2 *სამართლიანია შემდეგი:*
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$*;*
(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = A$*;*
(3) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(1/x)} = 0.$

თუ
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$
მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უსასრულოდ დიდი** a წერტილში.

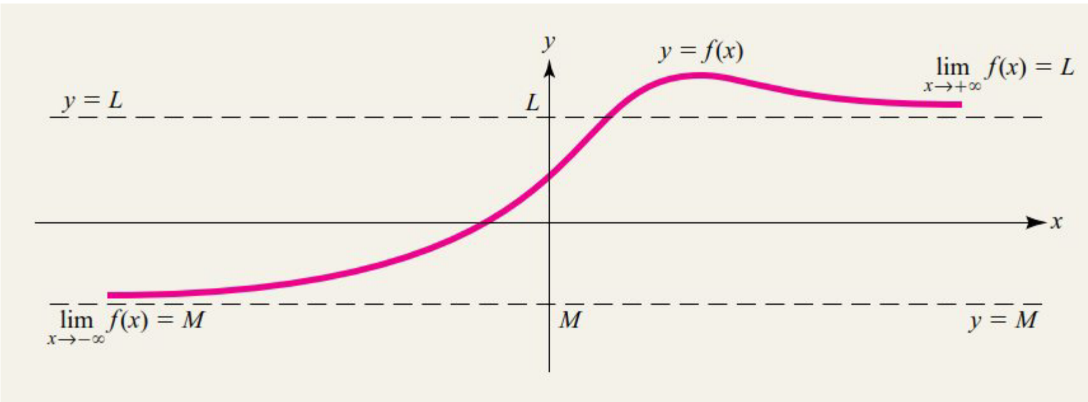
მაგალითი 12.18 *შევნიშნოთ, რომ*

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x+1}=\infty, \quad \text{რადგანაც} \quad \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x+3}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2, \quad \text{რადგანაც} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(2/x)+1}{(1/x)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{1+x}=2;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^2+1}=\infty, \quad \text{რადგანაც} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1/x^2)+1}{(2/x^3)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^3}{2-x^3}=0.$$

გეომეტრიულად შემდეგი ზღვრის $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ არსებობა ნიშნავს, რომ როცა x შემოუსაზღვრელად იზრდება, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი უახლოვდება $y=L$ ჰორიზონტალურ წრფეს. ისევე როგორც $\lim_{x\to-\infty} f(x)=M$ ზღვრის არსებობა ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი უახლოვდება $y=M$ ჰორიზონტალურ წრფეს x-ის უსასრულოდ კლების შემთხვევაში. ამ დროს $y=L$ და $y=M$ წრფეებს $f(x)$ ფუნქციის **ჰორიზონტალური ასიმპტოტები** ეწოდებათ(სურ. 12.16)



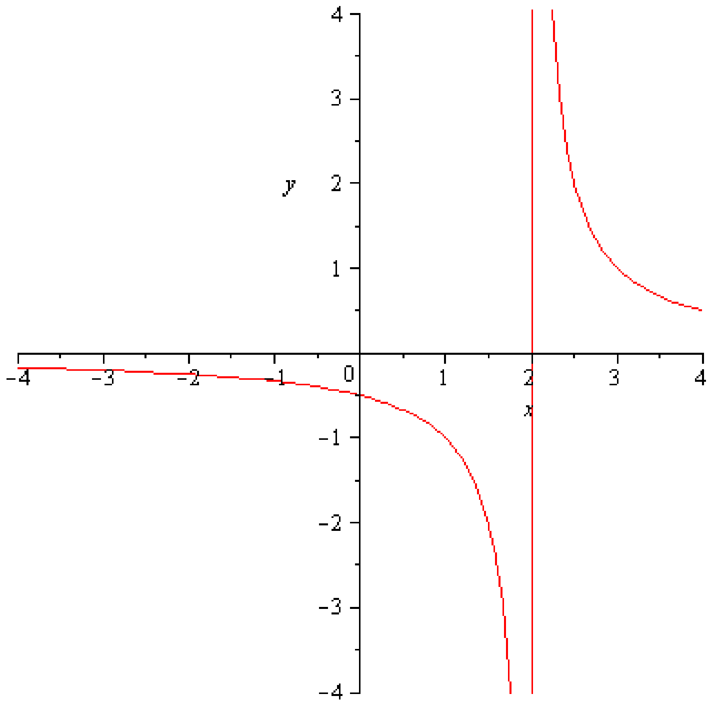
სურ 12.16

თუ $\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty$ ან $\lim_{x\to c^-} f(x)=\infty$, მაშინ $x=c$ ვერტიკალურ წრფეს $f(x)$ ფუნქციის **ვერტიკალური ასიმპტოტი** ეწოდება. სურ. 12.17-ზე მოცემული ფუნქციის გრაფიკისთვის $x=2$ წრფე წარმოადგენს ვერტიკალურ ასიმპტოტს.

მაგალითი 12.19 *თუ მარცვლეული კულტურა დათესილია ნიადაგში, რომელშიც აზოტის შემცველობის დონე N-ის ტოლია, მაშინ მისი მოსავლიანობა Y შესაძლებელია მოდელირდეს მიხაელის-მენტენის(Michaelis-Menten)ფუნქციის საშუალებით*

$$Y(N)=\frac{A\cdot N}{B+N},\ N\geqslant 0,$$

სადაც A და B დადებითი მუდმივებია. რა მოხდის მარცვლეულის მოსავლიანობას, როცა ნიადაგში აზოტის დონე უსასრულოდ იზრდება?



სურ 12.17

ამოხსნა. *ცხადია, ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვარი:*

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} Y(N) &= \lim_{N\to+\infty} \frac{A\cdot N}{B+N} = \\ = \lim_{N\to+\infty} \frac{AN/N}{B/N+N/N} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{A}{B/N+1} = \\ &= \frac{A}{0+1} = A. \end{aligned}$$

მაშასადამე, როცა აზოტის დონე ნიადაგში უსასრულოდ იზრდება, მოსავლიანობა მიისწრაფის მუდმივი A მნიშვნელობისკენ. ამის გამო A-ს მაქსიმალურად მიღწევად მოსავლიანობას უწოდებენ.

მაგალითი 12.20 *ქალაქის განვითარების გეგმის მიხედვით, მისი ერთ-ერთი ახალი რაიონის მოსახლეობის რაოდენობა(ათასებში) t წლის შემდეგ მოდელირდება შემდეგი ფუნქციით:*

$$P(t) = \frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70.$$

ა) რისი ტოლია ამ რაიონის მოსახლეობის საწყისი(ამჟამინდელი) რაოდენობა?

ბ) რამდენით შეიცვლება(იზრდება თუ მცირდება) მოსახლეობა მესამე წლის განმავლობაში?

გ) რა მოსდის მოსახლეობას გრძელვადიან პერსპექტივაში(ანუ, როცა $t\to\infty$)?

ამოხსნა:

ა) გამოვთვალოთ $P(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $t = 0$ საწყისი მომენტისათვის.

$P(0) = -50 + 70 = 20$. *ე.ი. საწყის მომენტში მოსახლეობის რაოდენობაა 20 ათასი.*

ბ) $P(3) - P(2) \approx 63.8 - 59.04 = 4.76$. *მაშასადამე, მესამე წლის განმავლობაში რაიონის მოსახლეობა გაიზარდა 4.76 ათასით.*

გ) ცხადია, უნდა გამოვთვალოთ $P(t)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $t \to \infty$. მივიღებთ:

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{40t}{t^2+10} - \lim\limits_{t\to\infty}\frac{50}{t+1} + \lim\limits_{t\to\infty}70 = 0 - 0 + 70 = 70.$

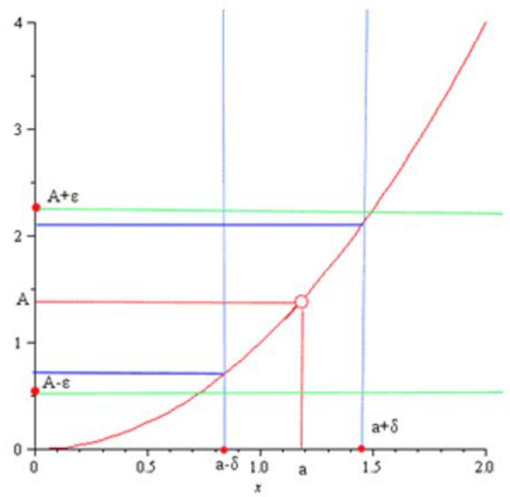
მაშასადამე, გრძელვადიან პერსპექტივაში რაიონის მოსახლეობა მიუახლოვდება 70 ათასს.

12.6 ფუნქციის ზღვრის მკაცრი განსაზღვრება

განსაზღვრება 12.2 *ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა. ვიტყვით, რომ A რიცხვი წარმოადგენს f ფუნქციის ზღვარს a წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $|f(x) - A| < \varepsilon$, როცა $0 < |x - a| < \delta$.*

მოყვანილი განსაზღვრების მიხედვით δ რიცხვი დამოკიდებულია ε ზე. შემდგომში ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ $\delta = \delta(\varepsilon)$.

უკანასკნელი განსაზღვრების არსში გასარკვევად დაგვეხმარება სურ 12.18-ზე გამოსახული ნახაზი:



სურ 12.18

მაგალითი 12.21 *ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ*

$$\lim_{x\to 2}(10x-6)=14.$$

ამოხსნა. *ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების გათვალისწინებით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის უნდა მოვძებნოთ ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ როცა $0 < |x-2| < \delta$, მაშინ*

$$|(10x-6)-14| < \varepsilon.$$

ამოვხსნათ უტოლობა:

$$|(10x-6)-14| < \varepsilon.$$

გვაქვს,

$$|10x-20| < \varepsilon,$$
$$10\cdot|x-2| < \varepsilon.$$

საიდანაც

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{10}.$$

უკანასკნელი მსჯელობიდან მარტივად დავასკვნით, რომ თუ $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{10}$, მაშინ $|(10x-6)-14| < \varepsilon$. ამრიგად, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვისთვის მოვძებნეთ $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{10}$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{10}$, მაშინ $|(10x-6)-14| < \varepsilon$, ანუ

$$\lim_{x\to 2}(10x-6)=14.$$

ახლა მოვიყვანოთ ცალმხრივი ზღვრების მკაცრი განსაზღვრება:

ვთქვათ, ε რაიმე დადებითი რიცხვია. შემდგომში შუალედს $[a, a+\varepsilon)$ ვუწოდებთ a წერტილის მარჯვენა მიდამოს, ხოლო შუალედს $(a-\varepsilon, a]$ – მარცხენა მიდამოს.

განსაზღვრება 12.3 *ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის მარჯვენა (მარცხენა) მიდამოში, გარდა შესაძლებელია, თვით a წერტილისა. ვიტყვით, რომ A რიცხვი წარმოადგენს f ფუნქციის* ***მარჯვენა ზღვარს (მარცხენა ზღვარს)*** *a წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ როცა $a < x < a+\delta \quad (a-\delta < x < a)$, გვექნება $|f(x)-A| < \varepsilon$.*

12.7 სენდვიჩის თეორემა

განვიხილოთ ფუნქციის ზღვრის კიდევ ერთ საინტერესო თვისება, რომელიც დაგვეხმარება ზღვრების გამოთვლაში.

ვთქვათ, ყოველი $x \in (a,b)$-თვის

$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

და

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A,$$

სადაც $a \le c \le b$. მაშინ

$$\lim_{x\to c} h(x) = A.$$

მაგალითი 12.22 *ვიპოვოთ შემდეგი ზღვარი*

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

ამოხსნა. *ცხადია,* $-1 \le \cos x \le 1$ *ნებისმიერი* x *-თვის, ამიტომ გვექნება:*

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1.$$

შედეგად,

$$-x^2 \le x^2 \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \le x^2,$$
$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

12.8 სავარჯიშოები:

1. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 5)$;

ბ) $\lim_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5\right)$;

გ) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

დ) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

ე) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

ვ) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

ზ) $\lim_{x\to 1/3} \frac{x+1}{x+2}$;

თ) $\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+1}$;

ი) $\lim_{x\to 5}\frac{x+3}{5-x}$;

კ) $\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x-3}$;

ლ) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$;

მ) $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{x-3}$;

ნ) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x-5}$;

ო) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$;

პ) $\lim_{t\to 4}\frac{t^2-3t-4}{t^2-5t+4}$.

2. გამოთვალეთ $\lim_{x\to\infty} f(x)$:

ა) $f(x)=x^3-4x^2-4$;

ბ) $f(x)=1-x+2x^2-3x^3$;

გ) $f(x)=(1-2x)(x+5)$;

დ) $f(x)=(1+x^2)^3$;

ე) $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{2x^2+5x+1}$;

ვ) $f(x)=\frac{1-3x^3}{2x^3-6x+2}$;

ზ) $f(x)=\frac{2x+1}{3x^2+2x-7}$;

თ) $f(x)=\frac{x^2+x-5}{1-2x-x^3}$;

ი) $f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{2x-9}$;

კ) $f(x)=\frac{1-2x^3}{x+1}$;

ლ) $f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$;

მ) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}$;

ნ) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$.

3. ცხოველთა ორი სახეობა თანაარსებობს ერთ ეკოსისტემაში. t წლის განმავლობაში პირველი სახეობის პოპულაცია შეადგენს $P(t)$ ათასს, ხოლო მეორე სახეობის პოპულაცია- $Q(t)$ ათასს, სადაც P და Q მოდელირდება ფუნქციებით:

$$P(t)=\frac{30}{3+t},\ Q(t)=\frac{64}{4-t}, t\geqslant 0.$$

ა) რისი ტოლია ორივე სახეობის საწყისი პოპულაცია ?

ბ) რა მოსდით $P(t)$ და $Q(t)$ ფუნქციებს, როცა t იზრდება?

გ) დახაზეთ $P(t)$ და $Q(t)$ ფუნქციების გრაფიკების ესკიზები.

4. კვლევების მიხედვით დგინდება, რომ გარკვეული ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობა t წლის შემდეგ იქნება $p=0.2t+1500$ ათასი, ხოლო ამავე ქვეყნის მთლიანი შიდა შემოსავალი კი- E მილიონი დოლარი, სადაც

$$E(t)=\sqrt{9t^2+0.5t+179}.$$

ა) გამოსახეთ ერთ სულ მოსახლეზე მთლიანი შემოსავლის $P = E/p$ ფუნქცია, როგორც დროის t ცვლადის ფუნქცია;

ბ) რა მოსდის ერთ სულ მოსახლეზე მთლიან შემოსავალს გრძელვადიან პერიოდში(ანუ, როცა $t \to \infty$)?

5. საწარმოს მენეჯერმა გამოთვალა, რომ ახალი პროდუქტის გამოშვების დაწყებიდან t თვის შემდეგ წარმოებული ერთეულების რაოდენობა იქნება P ათასი, სადაც

$$P(t) = \frac{6t^2 + 5t}{(t+1)^2}.$$

რა მოსდის გამოსაშვები პროდუქციის რაოდენობას გრძელვადიან პერსპექტივაში(ანუ, როცა $t \to \infty$)?

6. საერთაშორისო სატელეფონო ზარის ღირებულება პირველი 20 წუთის განმავლობაში შეადგენს 0.99 ლარს და შემდგომ 0.07 ლარს ყოველ მომდევნო წუთზე.

ა) შეადგინეთ სატელეფონო ზარის ღირებულების გამოსათვლელი $F(x)$ ფუნქცია, სადაც x საუბრის ხანგრძლივობაა წუთებში;

ბ) ააგეთ $F(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $0 < x \leq 40$;

გ) გამოთვალეთ $\lim\limits_{x \to 20-} F(x)$, $\lim\limits_{x \to 20+} F(x)$ და $\lim\limits_{x \to 20} F(x)$.

7. სკეიტბორდის მწარმოებელი კომპანიის ყოველდღიური ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს 200 ლარს, ხოლო დღეში 20 ერთეული სკეიტბორდის დასამზადებლად მთლიანი დანახარჯი კი -3800 ლარს.

ა) შეადგინეთ ყოველდღიური მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია $C(x)$, თუ ის წრფივია დღიურად გამოშვებული პროდუქციის x რაოდენობის მიმართ;

ბ) x რაოდენობა სკეიტის გამოშვებისას საშუალო დანახარჯის ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით: $\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x}$. იპოვეთ ეს ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი ასიმპტოტების ჩვენებით, როცა $1 \leq x \leq 30$;

გ) საითკენ მიისწრაფის საშუალო დანახარჯის მნიშვნელობა, როცა გამოშვებული სკეიტების რაოდენობა იზრდება?

8. კომპიუტერების კომპონენტების მწარმოებელი კომპანიის მენეჯერმა დაადგინა, რომ საშუალოდ, ახალ თანამშრომელს შეუძლია დღეში გამოუშვას $N(t)$ რაოდენობის კომპონენტი მისი სამუშაო ადგილზე t -დღიანი დატრენინგების შემდეგ, სადაც

$$N(t) = \frac{100t}{t+9}, t \geq 0.$$

ა) რამდენი კომპონენტის დამზადება შეუძლია ყოველდღიურად ახალ თანამშრომელს 6 დღიანი ტრენინგის გავლის შემდგომ?

ბ) რამდენ დღიანი გადამზადება დასჭირდება ახალ თანამშრომელს, რომ მან შეძლოს დღეში 70 კომპონენტის გამოშვება?

დ) იპოვეთ $\lim\limits_{t \to \infty} N(t)$ და გაანალიზეთ მიღებული შედეგი.

9. ინექციის საშუალებით პაციენტს ენიშნება პრეპარატი. პრეპარატის კონცენტრაცია (მლგრ/მლლიტრ) სისხლში ინექციიდან t საათის შემდეგ მოიცემა ფორმულით

$$C(t) = \frac{5t^2(t+50)}{t^3+100}.$$

იპოვეთ $\lim_{t\to\infty} C(t)$ და გაანალიზეთ შედეგი.

10. დადგენილია, რომ ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა P (ათასებში) მომდევნო t წლის განმავლობაში მოდელირდება ფორმულით:

$$P(t) = 20 - \frac{7}{t+2}.$$

ამასთანავე, ეკოლოგებმა გამოიკვლიეს, რომ ატმოსფეროში ნახშირბადის მონოქსიდის საშუალო დონე P ათას მოსახლეობაზე იქნება c მემილიონედი, სადაც

$$c(P) = 0.4\sqrt{P^2+P+21}.$$

რა მოსდის ჰაერის დაბინძურების c დონეს გრძელვადიან პერიოდში(როცა $t \to \infty$)?

11. ვთქვათ :

$$\begin{array}{lcl} \lim_{x\to c} f(x) = 5 & \text{და} & \lim_{x\to\infty} f(x) = -3 \\ \lim_{x\to c} g(x) = -2 & \text{და} & \lim_{x\to\infty} g(x) = 4 \end{array}$$

იპოვეთ:

ა) $\lim_{x\to c}[2f(x) - 3g(x)]$;

ბ) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$;

გ) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)+g(x)}$;

დ) $\lim_{x\to c} f(x)[g(x)-3]$;

ე) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$;

ვ) $\lim_{x\to c} \frac{2f(x)-g(x)}{5g(x)+2f(x)}$;

ზ) $\lim_{x\to\infty} \frac{2f(x)+g(x)}{x+f(x)}$;

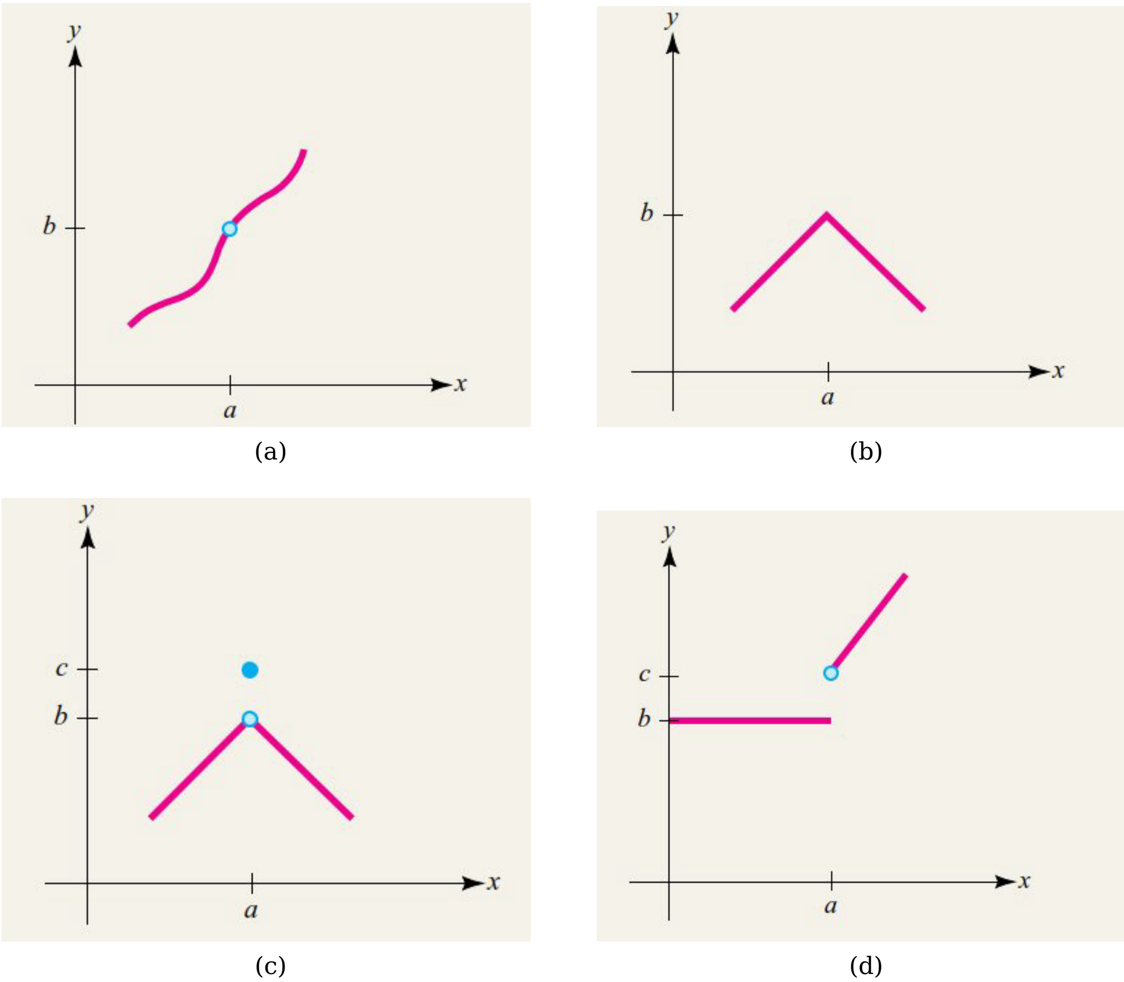
თ) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{g(x)}$.

12. სურ 12.19 და სურ 12.20-ზე გამოსახული გრაფიკების ესკიზებიდან გამოიკვლიეთ $\lim_{x\to a} f(x)$ ზღვრის არსებობის საკითხი.

13. სურ 12.21-ზე გამოსახული გრაფიკების ესკიზებიდან იპოვეთ ცალმხრივი ზღვრები $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ და $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ და დაადგინეთ ზღვრის $\lim_{x\to 2} f(x)$ არსებობა.

14. გააჩნია თუ არა $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ ფუნქციას ვერტიკალური ასიმპტოტი? პასუხი დაასაბუთეთ.

15. იპოვეთ $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტები.



სურ 12.19

16. აქვთ თუ არა ჰორიზონტალური ასიმპტოტები შემდეგ ფუნქციებს?

ა) $f(x) = \frac{7x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$;

ბ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

17. გამოთვალეთ ცალმხრივი ზღვრები:

ა) $\lim_{x\to 4^+}(3x^2-9)$;

ბ) $\lim_{x\to 1^-} x(2-x)$;

გ) $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{3x-9}$;

დ) $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-2x}$;

ე) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x+2}$;

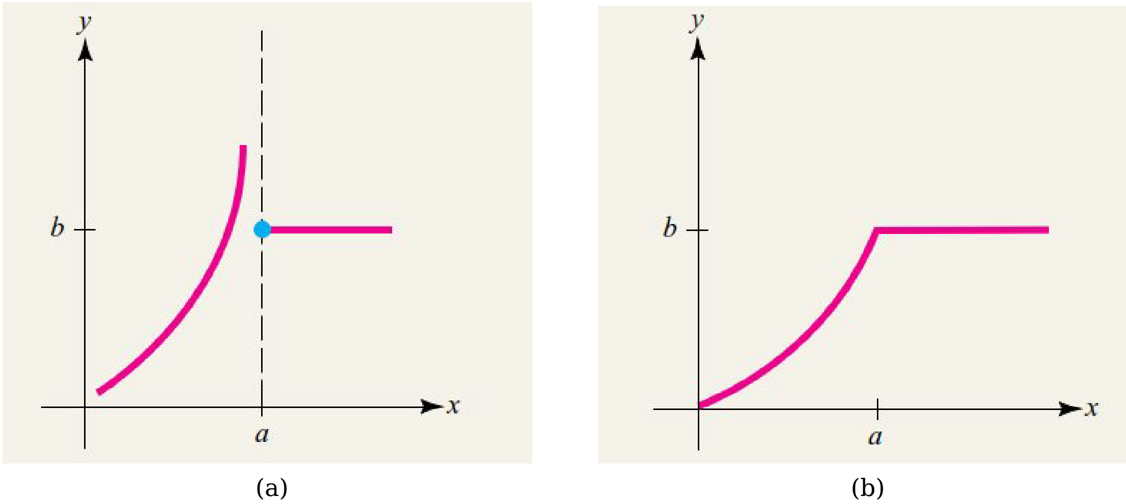
ვ) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+4}{x-2}$;

ზ) $\lim_{x\to 0^+}(x-\sqrt{x})$;

თ) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$;

ი) $\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

კ) $\lim_{x\to 5^+}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$.



სურ 12.20

18. გამოთვალეთ $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები x_0 წერტილში :

ა) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ და $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, სადაც $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & \text{როცა } x < 3, \\ 3 - x, & \text{როცა} x \geq 3. \end{cases}$

ბ) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ და $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, სადაც $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{როცა } x < -1, \\ x^2 + 2x, & \text{როცა } x \geq -1. \end{cases}$

გ) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $x_0 = 4$;

დ) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $x_0 = 2$;

ე) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{როცა } x \leq 2, \\ 2, & \text{როცა } x > 2. \end{cases}$ $x_0 = 2$;

ვ) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{როცა } x < 0, \\ x - 1, & \text{როცა } x \geq 0. \end{cases}$ $x_0 = 0$;

ზ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{როცა } x \leq 3, \\ 2x + 4 & \text{როცა } x > 3. \end{cases}$ $x_0 = 3$;

თ) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{როცა } x < -1, \\ x^2 - 3, & \text{როცა } x \geq -1. \end{cases}$ $x_0 = -1$.

19. დაადგინეთ, გააჩნია თუა არა

$$f(x) = \frac{x-5}{|x-5|}$$

ფუნქციას ზღვარი $x = 5$ წერტილში.

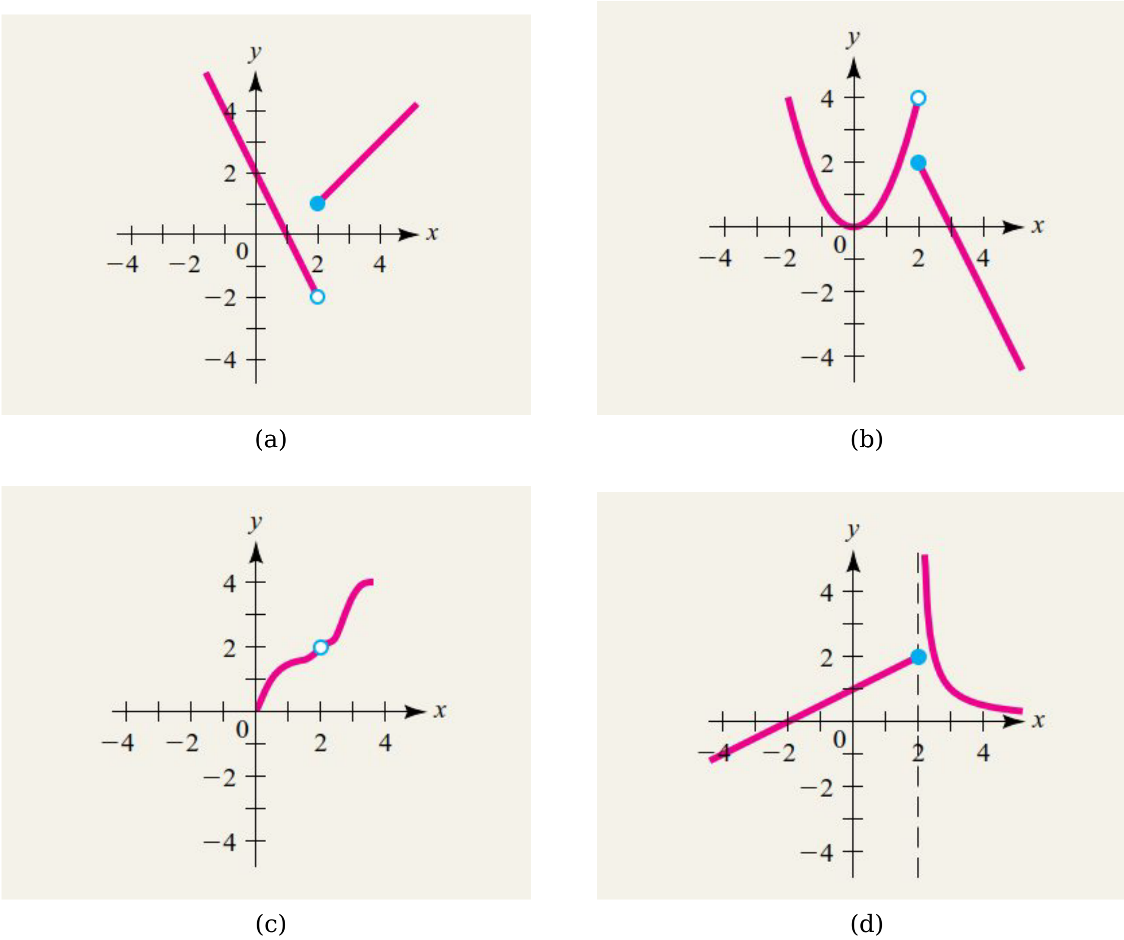
20. გამოიკვლიეთ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტობაზე x_0 წერტილში

ა) $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$, $x_0 = 2$;

ბ) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$, $x_0 = 0$;

გ) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $x_0 = 1$;

დ) $f(x) = \frac{2x-4}{3x-2}$, $x_0 = 2$;



სურ 12.21

ე) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 1$;

ვ) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-6}$, $x_0 = 2$.

21. გამოიკვლიეთ უწყვეტობაზე

ა) $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$;

ბ) $f(x) = x^5 - x^3$;

გ) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$;

დ) $f(x) = \frac{3x-1}{2x-6}$;

ე) $f(x) = \frac{3x+3}{x+1}$;

ვ) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$;

ზ) $f(x) = \frac{3x-2}{(x+3)(x-6)}$;

თ) $f(x) = \frac{x}{(x+5)(x-1)}$;

ი) $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$;

კ) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$;

ლ) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{როცა } x \leq 1, \\ 6x-1, & \text{როცა } x > 1. \end{cases}$;

მ) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{როცა } x \leq 2, \\ 9, & \text{როცა } x > 2. \end{cases}$;

ნ) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{როცა } x < 0, \\ x^2 + x, & \text{როცა } x \geq 0. \end{cases}$.

22. აჩვენეთ, რომ $\sqrt[3]{x-8} + 9x^{2/3} = 29$ განტოლებას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი $0 \leq x \leq 8$ ინტერვალზე.

23. აჩვენეთ, რომ $\sqrt[3]{x} = x^2 + 2x + 1$ განტოლებას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი $0 \leq x \leq 1$ ინტერვალზე.

24. საოფისე მოწყობილობების გამქირავებელი კომპანია ქსეროქსის აპარატებს აქირავებს ერთი დღის განმავლობაში 10 ლარად ან კვირეულად(7 დღე) 50 ლარად. $C(x)$ იყოს x დღის განმავლობაში ქსეროქსის გაქირავების ღირებულება.

    ა) ააგეთ $C(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $0 \leq x \leq 10$;

    ბ) იპოვეთ $C(4.5)$ და $\lim\limits_{x \to 4.5} C(x)$;

    გ) იპოვეთ $C(8)$ და $\lim\limits_{x \to 8} C(x)$;

    დ) არის თუ არა $C(x)$ უწყვეტი $x = 4.5$ და $x = 8$ წერტილებში?

25. "საფოსტო ფუნქცია"$p(x)$ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$p(x) = \begin{cases} 41 & , \text{როცა } 0 < x \leq 1; \\ 58 & , \text{როცა } 1 < x \leq 2; \\ 75 & , \text{როცა } 2 < x \leq 3.5 \end{cases}$$

    სადაც x არის წერილის წონა უნციებში, ხოლო $p(x)$ შესაბამისი საფოსტო გადასახადი ცენტებში.

    ა) ააგეთ $p(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $0 < x \leq 3$;

    ბ) x-ის რა მნიშვნელობისთვისაა $p(x)$ ფუნქცია წყვეტილი?

26. იპოვეთ A-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი x-ის ყველა მნიშვნელობისთვის.

    ა) $f(x) = \begin{cases} Ax - 3, & \text{როცა } x < 2, \\ 3 - x + 2x^2, & \text{როცა } x \geq 2. \end{cases}$

    ბ) $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{როცა } x < 4, \\ Ax^2 + 2x - 3, & \text{როცა } x \geq 4. \end{cases}$

ლექცია 13

ფუნქციის წარმოებული. გაწარმოების წესები

13.1 წირის მხები. წირის დახრა

როგორც ვიცით, თუ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ მოცემული წრფის ნებისმიერი წერტილებია, მათი ორდინატთა ცვლილების $\Delta Y = y_1 - y_2$ შეფარდებას აბსცისთა ცვლილებასთან $\Delta X = x_1 - x_2$ წრფის **დახრა**(იგივე დახრის კოეფიციენტი ანუ გრადიენტი) ეწოდება (იგულისხმება, რომ წრფე არ არის ვერტიკალური). თუ წრფის დახრას m ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X}.$$

მაგალითი 13.1 *ვიპოვოთ მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრა*
1)$A(1,2), B(3,4)$
2)$A(1,2), C(4,1)$
3)$A(1,2), D(5,2)$

ამოხსნა: 1) როგორც სურ. 13.1 -დან ჩანს, როცა A წერტილიდან ვმოძრაობთ B წერტილისკენ, y კოორდინატი იცვლება 2-დან 4-მდე, ანუ იზრდება 2 ერთეულით; ხოლო x კოორდინატი იცვლება 1-დან 3-მდე, ე.ი ისიც იზრდება 2 ერთეულით. მაშინ წრფის დახრა

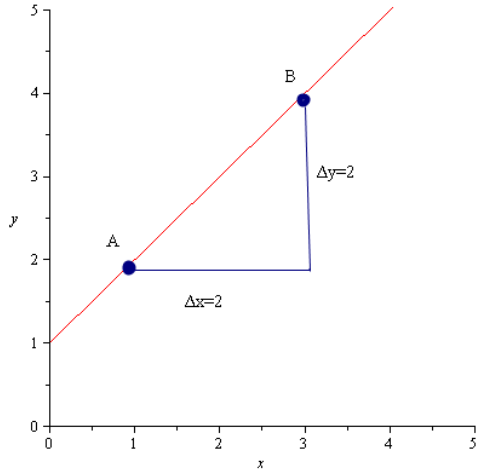
$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1.$$

2) A წერტილიდან C წერტილისკენ მოძრაობისას (სურ. 13.2), y კოორდინატი იცვლება 2-დან 1-მდე. ანუ მცირდება 1 ერთეულით, ხოლო x კოორდინატი იცვლება 1-დან 4-მდე, ე.ი. იზრდება 3 ერთეულით. მაშასადამე, დახრა

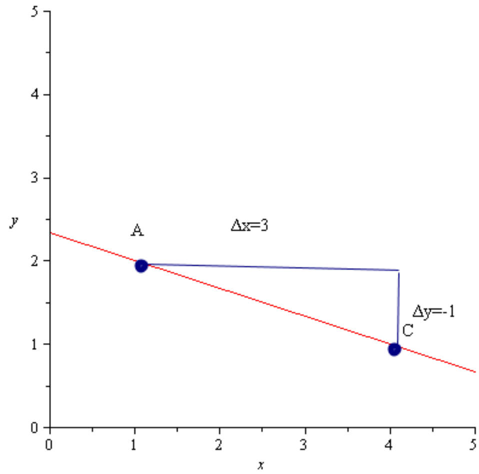
$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{1-2}{4-1} = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3}.$$

3) A წერტილიდან D წერტილისკენ მოძრაობისას (სურ. 13.3) y კოორდინატი უცვლელად 2-ის ტოლია, ხოლო x კოორდინატი იცვლება 1-დან 5-მდე, ანუ იზრდება 4 ერთეულით. მაშასადამე, დახრა

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{2-2}{5-1} = \frac{0}{4} = 0.$$



სურ 13.1



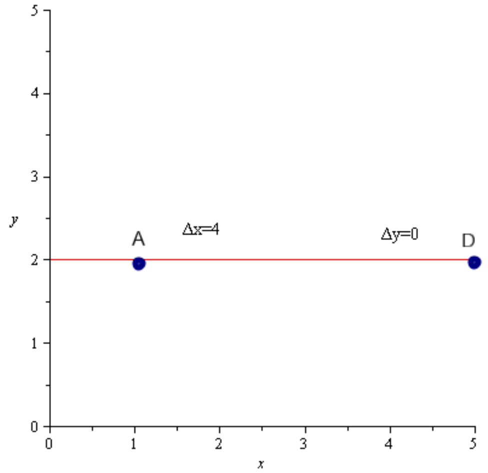
სურ 13.2

განხილული მაგალითიდან ჩანს, რომ **ზრდადი წრფივი ფუნქციის(ანუ, ზრდადი წრფის) გრაფიკის დახრა დადებითი სიდიდეა, კლებადი წრფივი ფუნქციისა(ანუ, კლებადი წრფის)-უარყოფითი, ხოლო ჰორიზონტალური წრფის დახრა ნულის ტოლია.**

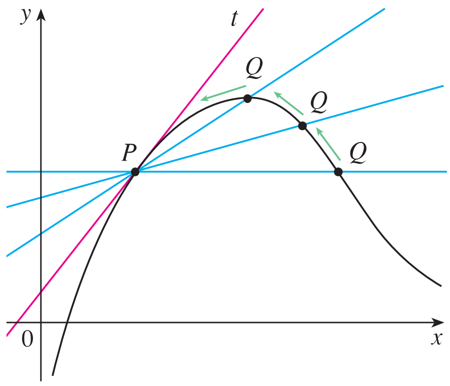
ეკონომიკაში გამოყენებული ფუნქციებიდან ყველა არ არის წრფივი. ამიტომ, აუცილებელია დახრის ცნების გაფართოება უფრო ზოგადი წირებისთვის. ამისათვის დაგვჭირდება წირის მხების ცნების შემოღება.

რაიმე წირზე მოვნიშნოთ P და Q წერტილები (სურ 13.4). წრფეს, რომელიც გადის P და Q წერტილებზე, ვუწოდოთ მოცემული წირის მკვეთი წრფე. როცა Q წერტილი მოძრაობს წირის გასწვრივ P წერტილისკენ ნებისმიერი მხრიდან, მაშინ მკვეთი წრფე იცვლის თავის მდებარეობას და შეიძლება უახლოვდებოდეს გარკვეულ ფიქსირებულ t წრფეს . ეს t წრფე, როგორც ზღვრული მდებარეობა მკვეთი წრფისა, არის მოცემული წირის მხები წრფე P წერტილში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ფუნქციებს, რომელთა გრაფიკის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება მხების გავლება.



სურ 13.3

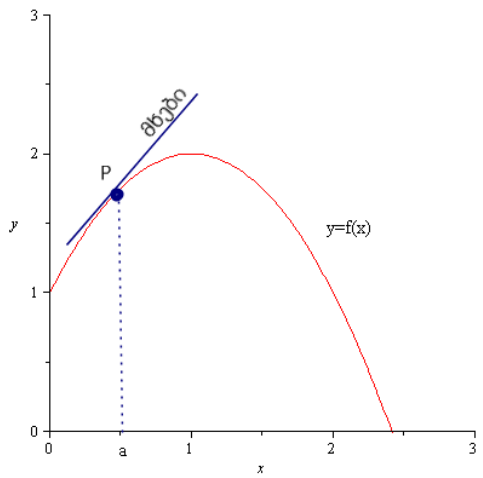


სურ 13.4

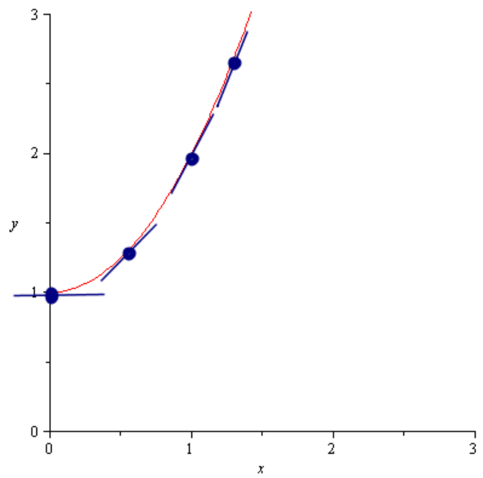
წირის დახრა რაიმე P წერტილში განიმარტება, როგორც ამ წერტილზე გავლებული მხები წრფის დახრა(სურ. 13.5).
$y = f(x)$ ფუნქციის დახრა $x = a$ წერტილში ვუწოდოთ ამ ფუნქციის გრაფიკის დახრას $P(a, f(a))$ წერტილში.

სურ. 13.6 -ზე გამოსახულია წირი, რომლის რამდენიმე წერტილზე გავლებულია მხები წრფე.აქ ყურადსაღებია ის ფაქტი, რომ როცა წერტილი გადაადგილდება წირზე მარცხნიდან მარჯვნივ, მასზე გავლებული მხების დახრა იზრდება.

ეს გარემოება ხაზს უსვამს მნიშვნელოვან განსხვავებას წრფისა და წირის დახრებს შორის. წრფის შემთხვევაში **დახრა უცვლელია და არ არის დამოკიდებული** თუ წრფის რომელ ორ წერტილს შევარჩევთ მის გამოსათვლელად. სურ. 13.7 -ზე გამოსახული წრფის ყველა წერტილისთვის $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ სახის შეფარდების მნიშვნელობა $\frac{1}{2}$-ის ტოლია. თუმცა, როგორც ზემოთ ვნახეთ, წირის დახრა იცვლება მასზე აღებული წერტილის მოძრაობისას.



სურ 13.5



სურ 13.6

13.2 ფუნქციის წარმოებული

$x = a$ წერტილში f ფუნქციის გრაფიკის დახრის (გრადიენტის) ჩასაწერად მათემატიკაში გამოიყენება აღნიშვნა

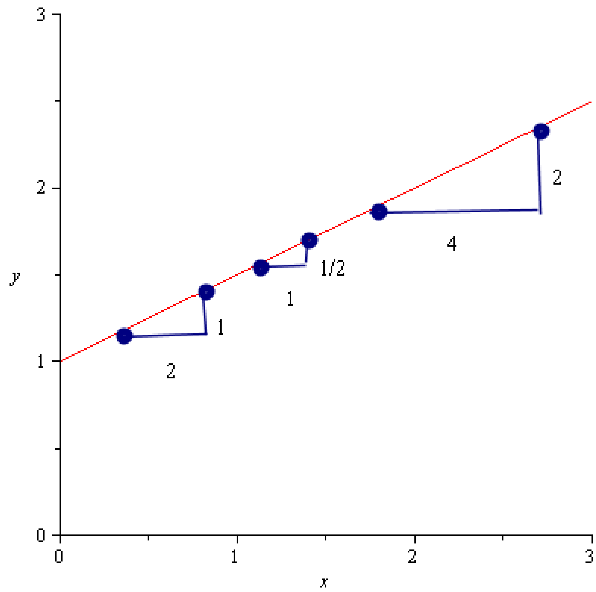
$$f'(a).$$

ამ ჩანაწერში f გამოსახავს განსახილველ ფუნქციას, a აღნიშნავს იმ წერტილს, რომელშიც ვეძებთ გრადიენტს, ხოლო სიმბოლო შტრიხი $'$ გამოიყენება იმისათვის, რომ განვასხვავოთ გრადიენტი ფუნქციის მნიშვნელობისგან. $f(a)$ გამოსახავს წირის "სიმაღლეს"OX ღერძიდან $x = a$ წერტილში, მაშინ როცა $f'(a)$ აღნიშნავს ამ წერტილში წირის გრადიენტის მნიშვნელობას.

ფუნქციის გრაფიკის დახრას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული.

მაშასადამე, $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $(c; f(c))$ წერტილში გავლებული მხები წრფის დახრა წარმოადგენს c წერტილში $f(x)$-ის წარმოებულს: $m = f'(c)$. სწორედ ესაა **წარმოებულის გეომეტრიული არსი.**

აქვე შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ფუნქციის წარმოებულის ცნება ფაქტობრივად შემოვიღეთ გეომეტრიულად. თუ გავაანალიზებთ წირის მხების, მხები წრფის დახრისა და ფუნ-



სურ 13.7

ქციის ზღვრის ცნებებს, დავასკვნით, რომ ფუნქციის წარმოებული ანალიზურად შესაძლებელია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

> $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება სიდიდეს
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
>
> აქ $f(x+h) - f(x)$ გამოსახულებას ფუნქციის ნაზრდი ეწოდება, ხოლო h-ს- არგუმენტის ნაზრდი.
> ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული რაიმე x წერტილში წარმოადგენს ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

წარმოებული ფუნქციის აღსანიშნავად ასევე გამოიყენება სიმბოლო

$$\frac{dy}{dx}.$$

(იკითხება: დე იგრეკი დე იქსით, და არა- დე იგრეკი შეფარდებული დე იქსთან).

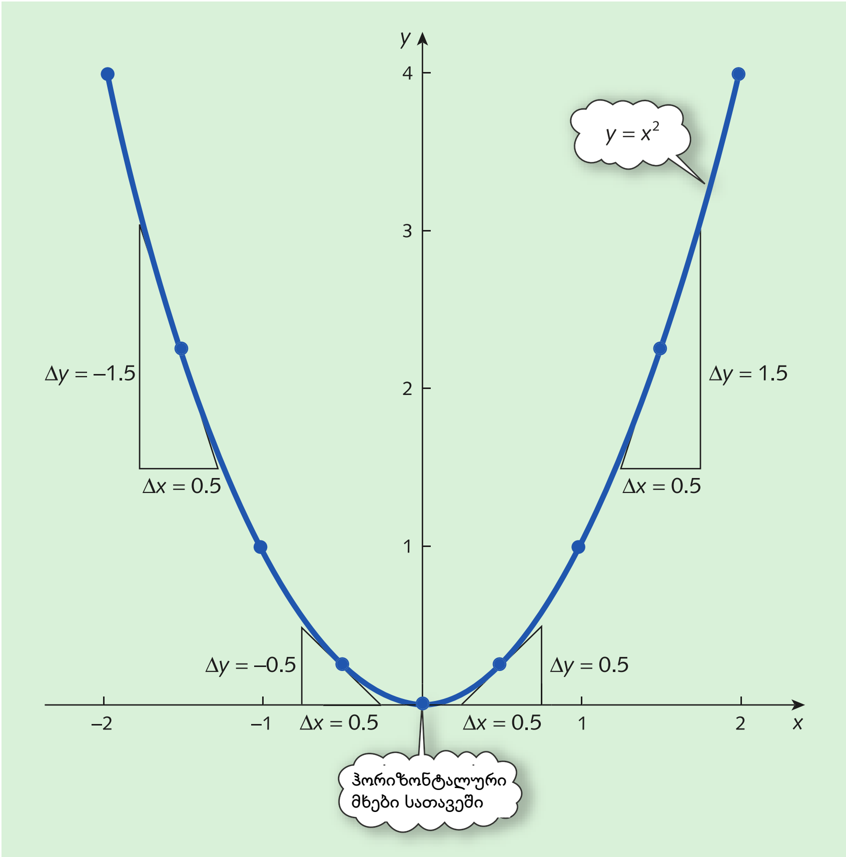
მაგალითი 13.2 *გამოვთვალოთ* $f(x) = x^2$ *ფუნქციის მნიშვნელობები* $x = -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2$ *წერტილებში და ავაგოთ გრაფიკი. ამავე გრაფიკის* $x = -1,5; -0,5; 0; 0,5; 1,5$ *შესაბამის წერტილებზე გავავლოთ მხები წრფეები.*

მაშასადამე, შევაფასოთ $f'(-1,5), f'(-0,5), f'(0), f'(0,5), f'(1,5)$ *მნიშვნელობები.*

ამოხსნა. კალკულატორის გამოყენებით $f(x) = x^2$ ფუნქციისთვის შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	4	$2,25$	1	$0,25$	0	$0,25$	1	$2,25$	4

ამ მონაცემებით შეგვიძლია ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი(სურ. 13.8)



სურ 13.8

გრაფიკიდან, ზუსტი ნახაზისა და ზუსტი გაზომვების შემთხვევაში, დავინახავთ, რომ მხები წრფეების დახრები არის :

$$
\begin{gathered}
f'(-1,5) = \frac{-1{,}5}{0{,}5} = -3 \\
f'(-0,5) = \frac{-0{,}5}{0{,}5} = -1 \\
f'(0) = 0 \\
f'(0,5) = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \\
f'(1,5) = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3
\end{gathered}
$$

როგორც ვხედავთ, Y ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წერტილებზე გავლებული გრაფიკის მხებების დახრები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან. ეს იმიტომ ხდება, რომ წირი მიემართება ქვემოთ Y ღერძის მარცხნივ და მიემართება ზემოთ Y ღერძის მარჯვნივ.

განხილული მაგალითიდან ნათლად ჩანს, თუ რამდენად ძნელია გრაფიკულად $f'(a)$-ს პოვნა. მართლაც, შეუძლებელია დაიხატოს იდეალურად გლუვი წირი და მასზე ზუსტად მოინიშნოს მხებების გავლების წერტილები. სირთულეს წარმოადგენს ასევე გრადიენტის გამოსათვლელად "ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მანძილების"გაზომვა. ამ ყველაფერმა შეიძლება მოგვცეს დიდი ცდომილება $f'(a)$-ს ზუსტ მნიშვნელობასთან მიმართებაში.

უფრო მარტივი შეიძლება აღმოჩნდეს წარმოებულის გამოთვლა ანალიზურად, ე.ი. როცა ფუნქცია მოცემულია ფორმულით.

მაგალითი 13.3 *ვიპოვოთ* $f(x) = x^2$ *ფუნქციის წარმოებული.*

ამოხსნა. *განვიხილოთ ფუნქციის ნაზრდი* x *წერტილში:*

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

ამის გამო,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

ამრიგად,

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

მაგალითი 13.4 *ვიპოვოთ* $f(x) = x^3$ *ფუნქციის წარმოებული.*

ამოხსნა. *განვიხილოთ ფუნქციის ნაზრდი* x *წერტილში:*

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

ამის გამო,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

ამრიგად,

$$\left(x^3\right)' = 3x^2.$$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ, საზოგადოდ, ხარისხოვანი ფუნქციისთვის სამართლიანია ფორმულა

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

ანუ, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, სადაც $y = x^n$ და n ნატურალური რიცხვია.

ფუნქციის წარმოებულის პოვნის პროცესს ფუნქციის **დიფერენცირება** ეწოდება. ამრიგად, x^n-ის დიფერენცირებისთვის საჭიროა ხარისხის მაჩვენებელი გადმოვიტანოთ წინ მამრავლად და ხარისხი შევამციროთ ერთით. $f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ტოლია $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.

ამ ფაქტის გამოყენებით მარტივად ვნახავთ, რომ $f(x) = x^2$ ფუნქციისთვის

$$\begin{gathered}
f'(-1,5) = 2 \times (-1,5) = -3 \\
f'(-0,5) = 2 \times (-0,5) = -1 \\
f'(0) = 2 \times (0) = 0 \\
f'(0,5) = 2 \times (0,5) = 1 \\
f'(1,5) = 2 \times (1,5) = 3,
\end{gathered}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა **მაგალითი 13.2**-ში გრაფიკული ხერხით მიღებულ შედეგებს.

მაგალითი 13.5 *გავაწარმოოთ ფუნქციები:*

$$1)y = x^4 \quad 2)y = x^{10} \quad 3)y = x \quad 4)y = 1 \quad 5)y = \frac{1}{x^4} \quad 6)y = \sqrt{x}$$

ამოხსნა: ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება:

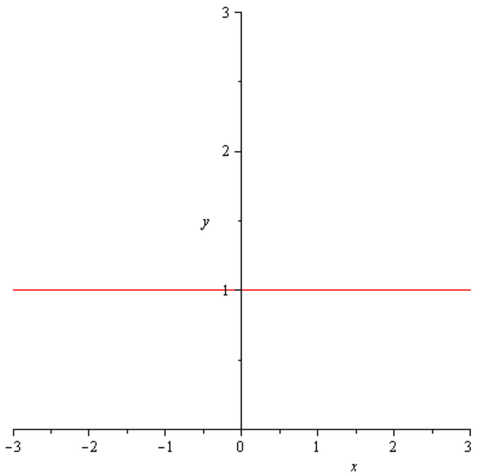
1) $\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} = 4x^3$.

2) $\frac{dy}{dx} = 10x^{10-1} = 10x^9$

3) გამოვიყენოთ გაწარმოების ფორმულა იმ შემთხვევისთვის, როცა $n = 1$. რადგანაც $x^1 = x$, ამიტომ მივიღებთ:

$\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$, ვინაიდან $x^0 = 1$. თუმცა, ეს ფაქტი პირდაპირ წარმოებულის განსაზღვრებიდანაც მიიღება, რადგან, ცხადია $y = x$ ფუნქციის შემთხვევაში ფუნქციის ნაზრდი არგუმენტის ნაზრდის ტოლია: $\Delta y = \Delta x$. ამიტომ მათი შეფარდება და ამ შეფარდების ზღვარიც ერთის ტოლი იქნება.

4) 1-ის წარმოებული არის ნული, ამ ფაქტის სამართლიანობა ცხადი ხდება $y = 1$ ფუნქციის გრაფიკის განხილვისას. ვინაიდან ეს გრაფიკი (სურ. 13.9) წარმოადგენს ჰორიზონტალურ წრფეს (x ღერძის პარალელურს), ამიტომ მისი გრადიენტი ყველგან ნულის ტოლია.



სურ 13.9

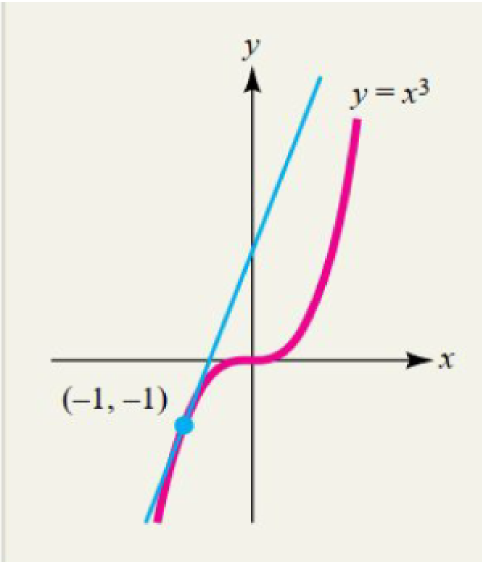
5) ვინაიდან $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$, მივიღებთ
$\frac{dy}{dx} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

6) შევნიშნოთ, რომ $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. ამიტომ
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

მაგალითი 13.6 *ვთქვათ,* $f(x) = x^3$ *ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილზე, რომლის აბსცისაა* $x = -1$ *გავლებულია მხები. შევადგინოთ მისი განტოლება.*

ამოხსნა: გავაწარმოოთ $f(x)$, მივიღებთ: $f'(x) = 3x^2$. მაშასადამე, წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან დავასკვნით, რომ $y = x^3$ წირის $x = -1$ წერტილში გავლებული მხების დახრა არის $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$ (სურ. 13.10). ამას გარდა, მხების განტოლების დასაწერად გვჭირდება ერთი წერტილი, რომელზეც ის გადის. ამ წერტილად გამოდგება სწორედ წრფისა და წირის შეხების წერტილი, რომლის აბსცისა, ცხადია, არის $x = -1$, ხოლო ორდინატი $y = (-1)^3 = -1$. საბოლოოდ მივიღებთ მხების შემდეგ განტოლებას:

$$y - (-1) = 3[x - (-1)],$$
$$y = 3x + 2.$$



სურ 13.10

13.3 წარმოებულის ეკონომიკური შინაარსი

ვთქვათ, $U = U(t)$ არის მწარმოებლის მიერ დროის t მომენტისათვის გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა. გვინდა ვიპოვოთ მწარმოებლის შრომის ნაყოფიერება დროის t მომენტში.

დროის $[t; t+\Delta t]$ პერიოდში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაა სხვაობა $U(t+\Delta t) - U(t)$, ამიტომ ამ პერიოდში საშუალო შრომის ნაყოფიერება გამოისახება ასე:

$$V_{\text{საშ}} = \frac{U(t+\Delta t) - U(t)}{\Delta t}.$$

ცხადია, რომ დროის t მომენტში შრომის ნაყოფიერება $V(t)$ შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც დროის $[t; t+\Delta t]$ შუალედში შრომის საშუალო ნაყოფიერების ზღვარი, როცა $\Delta t \to 0$, ე.ი.

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{საშ}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t+\Delta t) - U(t)}{\Delta t} = U'(t).$$

ამრიგად, **წარმოებულის ეკონომიკური შინაარსი** მდგომარეობს შემდეგში: შრომის ნაყოფიერება ტოლია პროდუქციის რაოდენობის, როგორც დროის ფუნქციის, წარმოებულის.

13.4 წარმოებულის კავშირი უწყვეტობასთან

სამართლიანია შემდეგი **თეორემა:**

თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში.

ამ თეორემის შებრუნებული დებულება არაა სამართლიანი. ამის მაგალითს წარმოადგენს $f(x) = |x|$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია ყველგან, მაგრამ არაა წარმოებადი $x = 0$ წერტილში.

13.5 გაწარმოების წესები

წესი 1. თუ $h(x) = cf(x)$, მაშინ $h'(x) = cf'(x)$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

მაგალითი 13.7 *გავაწარმოოთ ფუნქციები:*

$1) y = 2x^4 \quad 2) y = 11x$

ამოხსნა:

1) $2x^4$-ის გასაწარმოებლად ჯერ გავაწარმოოთ x^4, რაც უდრის $4x^3$-ს და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 2-ზე. მაშასადამე, $\frac{dy}{dx} = 2(4x^3) = 8x^3$.

2) $11x$-ის გასაწარმოებლად ჯერ გავაწარმოოთ x: $x' = 1$ და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 11-ზე. საბოლოოდ გვექნება: $\frac{dy}{dx} = 10 \cdot (1) = 10$.

მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. მართლაც, ვინაიდან მუდმივი $y = c$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს ჰორიზონტალურ წრფეს, ამიტომ მისი დახრა ნულის ტოლია.

წესი 2. ფუნქციათა ჯამისა და სხვაობის წარმოებულის გამოთვლა.
თუ $h(x) = f(x) + g(x)$, მაშინ $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
ხოლო, თუ $h(x) = f(x) - g(x)$, მაშინ $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

მაგალითი 13.8 *გავაწარმოოთ ფუნქციები:*

$1) y = x^3 + x^{40} \quad 2) y = x^4 + 5 \quad 3) y = x^5 - x^2 \quad 4) y = x^6 - 4$

ამოხსნა.

1) გავაწარმოოთ x^3 და x^{40} ცალ-ცალკე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ. გვექნება:

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 40x^{39}$.

2) აქაც გავაწარმოოთ x^4 და 5 ცალ-ცალკე. ვინაიდან 5-ის, როგორც მუდმივის, წარმოებული ნულის ტოლია, საბოლოოდ მივიღებთ: $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 0 = 4x^3$.

3) ანალოგირად, გავაწარმოოთ x^5 და x^2 ცალ-ცალკე და მიღებული შედეგები გამოვაკლოთ ერთმანეთს. მივიღებთ: $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 2x$.

4) აქაც, გავაწარმოოთ ცალ-ცალკე და წარმოებულები გამოვაკლოთ ერთმანეთს: $\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 0 = 6x^5$.

წინა ორი წესის კომბინირებული გამოყენებით შეიძლება უფრო "მსუყე"ფუნქციების გაწარმოება. ასე მაგალითად, გავაწარმოოთ ფუნქცია

$$y = x^3 + 6x^2 - 3x + 15$$

მივიღებთ: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 3$.

წესი 3. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი

თუ y არის u-ს ფუნქცია, ხოლო u თავის მხრივ წარმოადგენს x-ის ფუნქციას, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \tag{13.1}$$

ან სხვანაირად, თუ $y = f(g(x))$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

ამ წესის მიხედვით გავაწარმოვოთ, მაგალითად, $y = (2x+3)^{10}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $y = u^{10}$ და $u = 2x + 3$. მაშინ

$$\frac{dy}{du} = 10u^9 = 10(2x+3)^9,$$
$$\frac{du}{dx} = 2.$$

საბოლოოდ, (13.1)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 10(2x+3)^9 \cdot 2 = 20(2x+3)^9.$$

პრაქტიკაში, წარმოებულების გამოთვლისას, არაა აუცილებელი ყოველთვის შუალედური u ფუნქციის შემოღება. უბრალოდ, ჯერ უნდა გავაწარმოოთ "გარე"ფუნქცია და შედეგი გავამრავლოთ "შიდა"ფუნქციის წარმოებულზე.

მაგალითი 13.9 *გავაწარმოოთ ფუნქცია*

$$y = (x^2 + 4x - 7)^3$$

ამოხსნა. *ჯერ გავაწარმოოთ "გარე"ხარისხოვანი* u^3 *ფუნქცია, მივიღებთ* $3u^2$*-ს, ანუ გამოსახულებას* $3(x^2 + 4x - 7)^2$*. შემდეგ ის გავამრავლოთ "შიდა"ფუნქციის-კვადრატული სამწევრის წარმოებულზე, რომელიც ტოლია* $2x + 4$*-ის. მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:*

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 4x - 7)^2 \cdot (2x + 4).$$

მაგალითი 13.10 *საყოფაცხოვრებო ტექნიკის მწარმოებელი ფირმის მენეჯერმა დაადგინა, რომ როცა ბლენდერის საცალო ფასია p ლარი, მაშინ ყოველთვიური გაყიდვების რაოდენობა მოდელირდება ფორმულით*

$$D(p) = \frac{8000}{p},$$

ხოლო t თვის შემდეგ კი ერთი ბლენდერის ფასი იქნება $p(t) = 0.06t^{3/2} + 22.5$ ლარი. რა ტემპით შეიცვლება ბლენდერზე $D(p)$ მოთხოვნა 25 თვის შემდეგ? იზრდება თუ იკლებს მოთხოვნა ამ დროის განმავლობაში?

ამოხსნა. *ცხადია, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $\frac{dD}{dt}$ როცა $t = 25$. გვექნება:*

$$\frac{dD}{dp} = \frac{d}{dp}\left[\frac{8000}{p}\right] = -\frac{8000}{p^2}$$

და

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0.06t^{3/2} + 22.5\right] = 0.06\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right) = 0.09t^{1/2}.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dp}\frac{dp}{dt} = \left[-\frac{8000}{p^2}\right]\left(0.09t^{1/2}\right).$$

როცა $t = 25$, ერთი ბლენდერის ფასი არის

$$p(25) = 0.06(25)^{3/2} + 22.5 = 30 \text{ ლარი} .$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{t=25} = \left[-\frac{8000}{30^2}\right]\left[0.09(25)^{1/2}\right] = -4$$

ამრიგად, 25 თვის განმავლობაში ბლენდერზე მოთხოვნა იცვლება თვეში 4 ერთეულით. კონკრეტულად კი- მცირდება, ვინაიდან $\frac{dD}{dt}$ უარყოფითია..

წესი 4. ფუნქციათა ნამრავლის წარმოებული
თუ $y = uv$, მაშინ $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, ანუ $(uv)' = u'v + v'u$.
მაშასადამე, ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულის საპოვნელად, თითოეული მათგანი უნდა გავამრავლოთ მეორის წარმოებულზე და შევკრიბოთ.

მაგალითი 13.11 *გავაწარმოოთ ფუნქცია:*

$$y = x(x^2 + 5)^3$$

ამოხსნა. *მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს ორი ფუნქციის ნამრავლს:* x *და* $(x^2+5)^3$*. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად* u *და* v*-თი. მაშინ, თუ* $u = x$ *და* $v = (x^2+5)^3$*, მაშინ* $\frac{du}{dx} = 1$ *და* $\frac{dv}{dx} = 6x(x^2+5)^2$*. საბოლოოდ, ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ:*

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = x \cdot 6x(x^2+5)^2 + (x^2+5)^3 \cdot 1 = \\ = 6x^2(x^2+5)^2 + (x^2+5)^3 = (x^2+5)^2(7x^2+5).$$

წესი 5. წილადის წარმოებული.
თუ $y = \frac{u}{v}$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - \frac{dv}{dx}u}{v^2}.$$

ანუ,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

მაგალითი 13.12 *გავაწარმოოთ ფუნქცია:*

$$y = \frac{1+x^2}{2-x^3}$$

ამოხსნა. *წილადის გაწარმოების ფორმულის გამოსაყენებლად მოცემული წილადის მრიცხველი აღვნიშნოთ* u*-თი, ხოლო მნიშვნელი–*v*-თი. ე.ი.*
$u = 1 + x^2$ *და* $v = 2 - x^3$*. მაშინ*
$\frac{du}{dx} = 2x$ *და* $\frac{dv}{dx} = -3x^2$*. საბოლოოდ გვექნება:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(2-x^3)-(-3x^2)(1+x^2)}{(2-x^3)^2} = \\ = \frac{4x-2x^4+3x^2+3x^4}{(2-x^3)^2} = \frac{x^4+3x^2+4x}{(2-x^3)^2}.$$

13.6 ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულები

როგორც უკვე ვნახეთ, თუ მოცემულია **ხარისხოვანი ფუნქცია** $y = x^\alpha$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ტრიგინომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ და $\cot x$ ტრიგინომეტრიული ფუნქციების წარმოებული განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{ll} y = \sin x, & \frac{dy}{dx} = \cos x, \\ y = \cos x, & \frac{dy}{dx} = -\sin x, \\ y = \tan x, & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ y = \cot x & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{array}$$

რაც შეეხება მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს, მათ თვისებებსა და გაწარმოების წესებს დაწვრილებით ქვემოთ შევისწავლით.

მაგალითი 13.13 *გავაწარმოოთ ფუნქციები:*

$1)y = \sin 3x \quad 2)y = \cos 2x \cdot tanx$

ამოხსნა. *1) რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ:*

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

2) აქ გამოვიყენოთ ნამრავლისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესები კომბინირებულად. გვექნება:

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin 2x) \cdot 2 \cdot tanx + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos 2x = -2\sin 2x \cdot tanx + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

მაგალითი 13.14 *ცნობილია, რომ ქალაქის ახალი რაიონის პოპულაცია x თვის შემდეგ იქნება $P(x) = x^2 + 20x + 8000$.*

რა სიჩქარით შეიცვლება მოსახლეობა 15 თვის გასვლის მომენტისათვის?

ამოხსნა. *მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე წარმოადგენს პოპულაციის $P(x)$ ფუნქციის წარმოებულს:*

ცვლილების სიჩქარე=$P'(x) = 2x + 20$.

აქედან მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე(მატება) 15 თვის თავზე იქნება

$P'(15) = 2(15) + 20 = 50$ *ადამიანი თვეში.*

მრავალ პრაქტიკულ სიტუაციაში Q რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე არ არის ისეთი მნიშვნელოვანი, როგორც მისი **ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე**, რომელიც განისაზღვრება, როგორც თანაფარდობა $\frac{Q'(x)}{Q(x)}$, და ასევე შესაბამისი **პროცენტული ცვლილების სიჩქარე** $\frac{100Q'(x)}{Q(x)}$.

მაგალითი 13.15 *ქვეყნის მთლიანი შიდა პროდუქტი(მშპ) 1998 წლიდან t წლის გასვლის მომენტისათვის მოდელირდება ფორმულით $N(t) = t^2 + 5t + 106$ (მლრდ. დოლარი).*

ა) რა ტემპით(სიჩქარით) იცვლებოდა მშპ 2008 წელს?

ბ) რა იყო მშპ-ს პროცენტული ცვლილების სიჩქარე 2008 წელს?

ამოხსნა. *ა) მშპ-ს ცვლილების სიჩქარეს გამოსახავს წარმოებული $N'(t) = 2t+5$. 2008 წლისთვის კი ეს სიჩქარე ტოლი იქნებოდა $N'(10) = 2(10) + 5 = 25$ მლრდ. დოლარის ყოველწლიურად.*

ბ) მშპ-ს პროცენტული ცვლილების ტემპი 2008 წლისთვის იქნება:

$$100\frac{N'(10)}{N(10)} = 100\frac{25}{256} \approx 9.77\%.$$

მაგალითი 13.16 *მეწარმემ დაადგინა, რომ ახალი პროდუქტის წარმოების დაწყებიდან t თვის შემდეგ ბაზარს შეიძლება მიეწოდოს $x(t) = t^2 + 3t$ ასეული ერთეული საქონელი და თითოეული გაიყიდოს $p(t) = -2t^{3/2} + 30$ ლარად.*

ა) გამოვსახოთ ამ პროდუქტის მთლიანი ამონაგების $R(x)$ ფუნქცია, როგორც დროის ფუნქცია.

ბ) როგორია შემოსავლის ცვლილების ტემპი 4 თვის შემდეგ? იზრდება თუ მცირდება შემოსავალი ამ დროს?

ამოხსნა. *ა) მთლიანი ამონაგების ფორმულიდან მივიღებთ:*

$$R(t) = x(t)p(t) = \left(t^2 + 3t\right)\left(-2t^{3/2} + 30\right)$$

ასეული ლარი.

ბ) $R(t)$ ამონაგების ცვლილების ტემპი განისაზღვრება $R'(t)$ წარმოებულის საშუალებით, რომელსაც ვიპოვით ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებით:

$$\begin{aligned} R'(t) &= \left(t^2 + 3t\right)\frac{d}{dt}\left[-2t^{3/2} + 30\right] + \left(-2t^{3/2} + 30\right)\frac{d}{dt}\left[t^2 + 3t\right] \\ &= \left(t^2 + 3t\right)\left[-2\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)\right] + \left(-2t^{3/2} + 30\right)[2t + 3]. \end{aligned}$$

როცა $t = 4$, მაშინ ამონაგებისს ცვლილების სიჩქარე არის

$$\begin{aligned} R'(4) &= \left\lfloor (4)^2 + 3(4)\right\rfloor\left[-3(4)^{1/2}\right] + \left\lfloor -2(4)^{3/2} + 30\right\rfloor [2(4) + 3\rfloor \\ &= -14. \end{aligned}$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ 4 თვის შემდეგ ამონაგების კლების ტემპი იქნება 1400 ლარი თვეში.

13.7 სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ (0;2) და (3;0) წერტილები ეკუთვნის $2x + 3y = 6$ წრფეს. იპოვეთ ამ წრფის დახრა. ასევე დაადგინეთ, მოცემული წრფე ზრდადია, კლებადი თუ ჰორიზონტალური?

2. აჩვენეთ, რომ (0;b) და (1;a+b) წერტილები ეკუთვნის $y = ax + b$ წრფეს. აჩვენეთ, რომ ამ წრფის აქვს a-ს ტოლი დახრა.

3. დახაზეთ $f(x) = 5$ ფუნქციის გრაფიკი და ახსენით, რატომ არის სწორი ტოლობა $f'(x) = 0$.

4. გამოთვალეთ $f(x) = x^7$ ფუნქციის გრაფიკის დახრა $x = 2$ წერტილზე.

5. გააწარმოეთ ფუნქციები:

   ა) $y = x^8$;

   ბ)$y = x^{50}$;

   გ)$y = x^{17}$;

   დ)$y = x^{777}$.

6. გააწარმოეთ შემდეგი ფუნქციები და პასუხები ჩაწერეთ რადიკალების გამოყენებით

   ა) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

   ბ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

   გ) $f(x) = x\sqrt{x}$.

7. იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატები, რომელზეც წირს გააჩნია მოცემული გრადიენტი

   ა)$y = x^5$, გრადიენტი=405;

   ბ)$y = \frac{1}{x^2}$, გრადიენტი=16.

8. გააწარმოეთ ფუნქციები:

   ა) $y = 6x^3$;

   ბ)$y = \frac{4}{x}$;

   გ) $y = 5x + 7$;

   დ)$y = x^2 + x + 3$;

   ე) $y = x^3 - 4x + 9$;

   ვ) $y = 2x - \frac{11}{x}$;

   ზ) $y = 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 - x - 7$;

   თ) $y = ax + b$;

   ი) $y = ax^2 + bx + c$.

9. ყოველი $f(x)$ ფუნქციისთვის შეაფასეთ $f'(a)$ მოცემულ წერტილში

   ა) $f(x) = 3x^9, a = 1$;

   ბ)$f(x) = x^2 - 2x, a = 3$;

   გ)$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8, a = 0$;

   დ)$f(x) = 5x^4 - \frac{4}{x^4}, a = -1$;

   ე)$f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x}, a = 4$.

10. იპოვეთ:

ა) $\frac{dQ}{dP}$ მიწოდების $Q = P^2 + P + 1$ ფუნქციისთვის;

ბ) $\frac{d(TR)}{dQ}$ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისთვის $TR = 50Q - 3Q^2$;

გ) $\frac{d(AC)}{dQ}$ საშუალო დანახარჯის ფუნქციისთვის $AC = \frac{30}{Q} + 10$;

დ) $\frac{d\pi}{dQ}$ მოგების ფუნქციისთვის $\pi = -2Q^3 + 15Q^2 - 24Q - 3$.

11. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებული $\frac{dy}{dx}$ და გაამარტივეთ მიღებული პასუხი

ა) $y = u^2 + 1; u = 3x - 2$;

ბ) $y = 1 - 3u^2; u = 3 - 2x$;

გ) $y = \sqrt{u}; u = x^2 + 2x - 3$;

დ) $y = 2u^2 - u + 5; u = 1 - x^2$;

ე) $y = \frac{1}{u^2}; u = x^2 + 1$;

ვ) $y = \frac{1}{u}; u = 3x^2 + 5$.

12. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები

ა) $y = (2x + 1)^{11}$;

ბ) $y = (x^2 + 3x - 6)^4$;

გ)$y = \frac{1}{8x-5}$;

დ)$y = \frac{1}{x^2+1}$;

ე)$y = \sqrt{7x - 3}$.

13. ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები

ა)$y = x^2(x + 3)^5$;

ბ)$y = x^5(4x + 3)^2$;

გ)$y = x^4\sqrt{x + 1}$;

დ)$y = \sin 3x \cos 2x$.

14. წილადის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები

ა)$y = \frac{x^2}{x+4}$;

ბ)$y = \frac{2x-1}{x+5}$;

გ)$y = \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$;

დ)$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$;

ე)$y = \frac{2+x}{tanx}$.

15. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მოცემული ფუნქციის გრაფიკს ეხება მითითებულ წერტილში

ა) $y = -x^3 - 5x^2 + 3x - 1; (-1, -8)$;

ბ) $y = x^5 - 3x^3 - 5x + 2; (1, -5)$;

გ) $y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}; \left(4, \frac{7}{4}\right)$;

დ) $y = \sqrt{x^3} - x^2 + \frac{16}{x^2}; (4, -7)$;

ე) $y = (x^2 - x)(3 + 2x); (-1, 2)$;

ვ) $y = 2x^4 - \sqrt{x} + \frac{3}{x}; (1, 4)$.

16. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მოცემული ფუნქციის გრაფიკს ეხება $(c; f(c))$ წერტილში $x = c$ მითითებული მნიშვნელობისთვის

ა) $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{x^2}; x = -1$;

ბ) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6; x = 2$;

გ) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}; x = 1$;

დ) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}; x = 4$;

ე) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{8x}; x = 2$;

ვ) $f(x) = x(\sqrt{x} - 1); x = 4$.

17. ქარხანაში დილის ცვლის ეფექტურობის შესწავლა მიუთითებს: თუ მუშა თავის სამუშაოს შეუდგება დილის 8:00 საათზე, მაშინ t საათის შემდეგ ის დაამზადებს $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ რაოდენობის პროდუქტს.

ა) გამოთვალეთ მუშის შრომის ნაყოფიერება $R(t) = Q'(t)$.

ბ) რა იქნება მუშის შრომის ნაყოფიერების ცვლილების ტემპი დილის 9 საათისთვის?

18. მოტოციკლეტების მწარმოებელმა დაადგინა, რომ თუ რეკლამაზე დაიხარჯება x ათასი დოლარი, მაშინ გაიყიდება

$$M(x) = 2300 + \frac{125}{x} - \frac{517}{x^2}, \quad 3 \leq x \leq 18$$

მოტოციკლი. რა ტემპით შეიცვლება გაყიდვები, როცა რეკლამაზე დაიხარჯება 9 000 დოლარი? იზრდება თუ მცირდება გაყიდვები სარეკლამო ხარჯების ამ დონისთვის?

19. პროგნოზირდება, რომ x თვის შემდეგ გარკვეული ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა იქნება $P(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5000$.

ა) რა ტემპით შეიცვლება მოსახლეობა 9 თვის გასვლის მომენტისათვის?

ბ) რამდენი იქნება მოსახლეობის პროცენტული ცვლილების ტემპი 9 თვის შემდეგ?

20. თქვენი საწყისი წლიური ხელფასი შეადგენს 45 000 ლარს, ყოველ მომდევნო წელიწადში 2000 ლარიანი ზრდით.

ა) ჩაწერეთ თქვენი ხელფასის პროცენტული ზრდის ტემპის ფუნქცია როგორც t წლების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკის ესკიზი.

ბ) რამდენი პროცენტით იზრდება ხელფასი ერთი წლის შემდეგ?

გ) რა ტენდენცია ახასიათებს გრძელვადიან პერსპექტივაში თქვენი ხელფასის პროცენტული ზრდის ტემპის მაჩვენებელს?

ლექცია 14

მაღალი რიგის წარმოებულები. ფუნქციის დიფერენციალი. მარგინალური ანალიზის ელემენტები

14.1 მაღალი რიგის წარმოებულები

თუ გავაანალიზებთ წინა ლექციაში განხილულ მაგალითებს, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ფუნქციის გაწარმოების შედეგი კვლავ ფუნქციას წარმოადგენს. ამიტომ, ბუნებრივია, შეგვიძლია განვიხილოთ $f'(x)$ ფუნქციის წარმოებულიც. იგი

$$f''(x)$$

ან

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

სიმბოლოთი აღინიშნება. მაშასადამე,

$$f''(x) = (f'(x))'$$

და

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

$f'(x)$ ფუნქციას ეწოდება **პირველი რიგის წარმოებული**, ხოლო $f''(x)$-ს **მეორე რიგის წარმოებული.**

მაგალითი 14.1 *ვიპოვოთ* $f(x) = 7x^2-4x+8$ *ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული.*

ამოხსნა. *ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის წარმოებული:*

$$f'(x) = 14x - 4,$$

მიღებული ფუნქცია კიდევ ერთხელ გავაწარმოოთ, ანუ ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = 14.$$

მაგალითი 14.2 *გამოვთვალოთ $f''(1)$, თუ $f(x)=7x^3-10x^2$.*

ამოხსნა. *$f''(1)$ ჩანაწერი ნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის მნიშვნელობას, როცა $x=1$. ამიტომ, მის საპოვნელად ჯერ უნდა ვიპოვოთ $f''(x)$ და შემდეგ მასში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ 1. გვექნება:*

$f'(x)=21x^2-20x$ და $f''(x)=42x-20$. საბოლოოდ მივიღებთ: $f''(1)=42\cdot(1)-20=22$.

მაგალითი 14.3 *ქარხანაში დილის ცვლის ეფექტურობის შესწავლა მიუთითებს იმაზე, რომ თუ მუშა თავის სამუშაოს შეუდგება დილის 8:00 საათზე, მაშინ ის t საათის შემდეგ აწარმოებს $Q(t)=-t^3+6t^2+24t$ რაოდენობის პროდუქტს.*

ა) გამოვთვალოთ მუშის შრომის ნაყოფიერება დილის 11 საათზე.

ბ) რა იქნება მუშის შრომის ნაყოფიერების ცვლილების ტემპი დილის 11 საათისთვის?

ამოხსნა. *ა) როგორც ვიცით შრომის ნაყოფიერება წარმოადგენს გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის ფუნქციის წარმოებულს დროით. გვექნება*

$$R(t)=Q'(t)=-3t^2+12t+24.$$

მაშინ დილის 11 სთ-ზე ($t=3$) შრომის ნაყოფიერება ტოლი იქნება

$$R(3)=Q'(3)=-3(3)^2+12(3)+24=33$$

ერთეული საათში

ბ) მუშის შრომის ნაყოფიერების ცვლილების ტემპი კი იქნება $R(t)$ ფუნქციის წარმოებული, ანუ $Q(t)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$R'(t)=Q''(t)=-6t+12.$$

11 საათზე ამ ცვლილების ტემპი იქნება

$$R'(3)=Q''(3)=-6(3)+12=$$

$=-6$ ერთეული საათში.

უარყოფითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ მუშის შრომის ნაყოფიერება მცირდება, ე.ი. ის ანელებს მუშაობის ტემპს და უშვებს ყოველ საათში 6 ერთეულით ნაკლებ პროდუქტს.

ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული მიიღება ამ ფუნქციის თანმიმდევრობით n-ჯერ გაწარმოების შედეგად.
$y=f(x)$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{ან} \quad f^{(n)}(x)$$

მაგალითი 14.4 *ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები მეხუთე რიგამდე ჩათვლით*

ა) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$

ბ) $y = \frac{1}{x}$

ამოხსნა. *ა)*

$$f'(x) = 12x^2 + 10x + 6$$
$$f''(x) = 24x + 10$$
$$f'''(x) = 24$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$

ბ)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-x^{-2}\right) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(2x^{-3}\right) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(-6x^{-4}\right) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(24x^{-5}\right) = -120x^{-6} = -\frac{120}{x^6}$$

14.2 ფუნქციის დიფერენციალი

ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში. $\Delta x = x - x_0$ და $\Delta y = y - y_0$ არის, შესაბამისად, არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში. წარმოებულის განსაზღვრებიდან გამომდინარე $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'\left(x_0\right)$, როცა $\Delta x \to 0$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, საკმარისად მცირე Δx-სთვის

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'\left(x_0\right),$$

ანუ

$$\Delta y \approx f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

$f'\left(x_0\right)\Delta x$ სიდიდეს უწოდებენ x_0 წერტილში ფუნქციის დიფერენციალს და მას $df(x_0)$-ით, ან მოკლედ, dy სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ე.ი.

$$dy = y'\Delta x.$$

თუ ამ ტოლობას გამოვიყენებთ $y = x$ ფუნქციისთვის, მივიღებთ

$$dx = x'\Delta x = 1\Delta x = \Delta x.$$

ე.ი საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$dy = y'dx.$$

ნებისმიერ x წერტილში $y = f(x)$ ფუნქციის **დიფერენციალი** განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$dy = f'(x)dx.$$

გეომეტრიულად ფუნქციის დიფერენციალი რაიმე წერტილში უდრის ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის წერტილში გავლებული მხების წერტილის ორდინატის მიერ მიღებულ ნაზრდს(სურ.14.1).

შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალს აქვს ისეთივე კარგი თვისებები, როგორც წარმოებულს. ამის გამო მისი გამოთვლა რიგ შემთხვევებში უფრო ადვილია, ვიდრე ფუნქციის ნაზრდის.

მაგალითი 14.5 *ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალი*

ა) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2$;

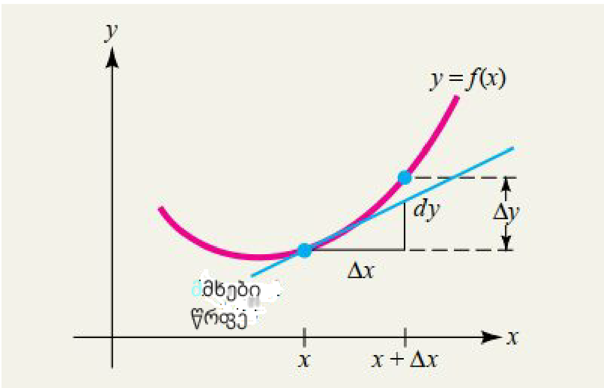
ბ) $f(x) = (x^2 + 5)(3 - x - 2x^2)$.

ამოხსნა.

ა) $dy = f'(x)dx = [3x^2 - 7(2x)]\,dx = (3x^2 - 14x)\,dx$

ბ) ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად

$$dy = f'(x)dx = \left[\left(x^2+5\right)(-1-4x) + (2x)\left(3-x-2x^2\right)\right] dx$$



სურ 14.1

14.3 ლოპიტალის წესი

ლოპიტალის წესი წარმოადგენს ფუნქციის ზღვრის გამოთვლის ერთ-ერთ ეფექტურ მეთოდს.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია a წერტილის მიდამოში, გარდა შესაძლებელია, თავად a წერტილისა და ამასთან: $g'(x) \neq 0, \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, მაშინ ამ ფუნქციების შეფარდების ზღვარი a წერტილში ტოლია ამავე ფუნქციების წარმოებულების შეფარდების ზღვრისა, თუ ეს უკანასკნელი არსებობს, ე.ი.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

მაშასადამე, ლოპიტალის წესი საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ისეთი ორი ფუნქციის შეფარდების ზღვარი, რომელთაგან თითოეულის ზღვარი ნულის ტოლია, ანუ უსასრულოდ მცირეებია. ამ დროს ამბობენ, რომ გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ასეთი ზღვრების გამოთვლა კი ნიშნავს მოცემული განუსაზღვრელობის გახსნას.

მაგალითი 14.6 *გამოვთვალოთ ზღვარი*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}.$$

ამოხსნა. *როცა $x \to 0$, მაშინ მრიცხველიცა და მნიშვნელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. ლოპიტალის წესის გამოყენების შემდეგ გვექნება*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1} = 0.$$

მაგალითი 14.7 *გამოვთვალოთ ზღვარი*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6 - 5x^3 + x^2 + 3}{\sqrt[5]{x} - 1}.$$

ამოხსნა. *ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა $x \to 1$, როგორც მრიცხველის, ისე მნიშვნელის ზღვარი 0-ის ტოლია, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი. გვექნება:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6-5x^3+x^2+3}{\sqrt[5]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^6-5x^3+x^2+3\right)'}{(\sqrt[5]{x}-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{6x^5-15x^2+2x}{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}} = \frac{6-15+2}{\frac{1}{5}} = -35.$$

შეიძლება მოხდეს, რომ ლოპიტალის წესის გამოყენების შემდეგ კვლავ მივიღოთ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ასეთ შემთხვევაში, ზოგჯერ ლოპიტალის წესის განმეორებით გამოყენებით შესაძლებელი ხდება განუსაზღვრელობის გახსნა.

ლოპიტალის წესი გამოიყენება იმ შემთხვევებშიც, როცა მნიშვნელისა და მრიცხველის ზღვრები რომელიმე წერტილში უსასრულობაა. ასეთ დროს ამბობენ, რომ გვაქვს $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა. ასევე, ლოპიტალის წესი სამართლიანია მაშინაც, როცა გვაქვს ზღვარი უსასრულობაში.

14.4 მარგინალური ფუნქციები

წინა ლექციებში ჩვენ დაწვრილებით შევისწავლეთ მთლიანი ამონაგების (TR) ფუნქციის ძირითადი თვისებები. ის განვმარტეთ, როგორც ნამრავლი pQ, სადაც p გამოსახავს საქონლის ფასს, ხოლო Q - ამ საქონლის ბაზარზე მოთხოვნის რაოდენობას. პრაქტიკაში, როგორც წესი, ვიყენებთ მოთხოვნის ფუნქციას, რომელიც ამყარებს კავშირს p და Q სიდიდეებს შორის. ის საშუალებას იძლევა TR-ის ფორმულა ჩავწეროთ მოთხოვნის Q რაოდენობის ტერმინებში. მაგალითად, თუ $p = 100 - 2Q$ მაშინ $TR = pQ = (100 - 2Q)Q = 100Q - 2Q^2$. ამ ფორმულის გამოყენებით Q-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ TR-ის შესაბამისი მნიშვნელობა. თუმცა ჩვენთვის ასევე საინტერესოა იმის ცოდნა, თუ როგორია TR-ის ცვლილების ეფექტი იმ შემთხვევაში, როცა Q-ს მოცემული მნიშვნელობა იცვლება. ამისათვის შემოვიტანოთ **მარგინალური** (ზღვრული, მყისიერი) **ამონაგების** ცნება.

ზღვრული, ანუ მარგინალური ამონაგები (MR) განისაზღვრება ტოლობით:

$$(MR)(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{f(Q + \Delta Q) - f(Q)}{\Delta Q},$$

სადაც $f = (TR)$.
ამრიგად, მარგინალური ამონაგები არის მთლიანი ამონაგების ფუნქციის წარმოებული მოთხოვნის Q ცვლადით, ე.ი.

$$(MR) = \frac{d(TR)}{dQ} = (TR)'.$$

მაგალითად, $TR = 100Q - 2Q^2$ მთლიანი ამონაგების შესაბამისი მარგინალური ამონაგები ტოლი იქნება $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 4Q$. თუ მიმდინარე მოთხოვნა 15-ის ტოლია, მაშინ $MR = 100 - 4 \cdot (15) = 40$.

ელემენტარული ეკონომიკის სახელმძღვანელოებში ხშირად მარგინალურ ამონაგებს განსაზღვრავენ როგორც მთლიანი ამონაგების ცვლილებას, როდესაც მოთხოვნა Q იზრდება 1 ერთეულით. მარტივად შეიძლება იმის შემოწმება, რომ ეს მეთოდი იძლევა მისაღებ მიახლოებას MR-ის მნიშვნელობასთან, თუმცაღა ის განსხვავდება წარმოებულის საშუალებით მიღებული ზუსტი მნიშვნელობისგან. მაგალითად, თუ ზემოთ განხილულ TR ფუნქციაში ჩავსვამთ $Q = 15$ მივიღებთ: $TR = 100 \cdot (15) - 2 \cdot (15)^2 = 1050$. გავზარდოთ Q-ს მნიშვნელობა 1 ერთეულით. მაშინ $TR = 100 \cdot (16) - 2 \cdot (16)^2 = 1088$. ამ მეთოდით ზრდა წარმოადგენს 38 ერთეულს, რაც არ ემთხვევა, თუმცა "ახლოსაა"წარმოებულის საშუალებით გამოთვლილ MR-ის ზუსტ 40-ის ტოლ მნიშვნელობასთან.

მაგალითი 14.8 *მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $p = -3Q + 120$. გამოვსახოთ TR ფუნქცია Q რაოდენობის საშუალებით და ვიპოვოთ MR-ის მნიშვნელობა, როცა $Q = 10$.*

ამოხსნა. *$TR = p \cdot Q = (-3Q + 120)Q = -3Q^2 + 120Q$. MR-ის განსაზღვრებიდან გვექნება: $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = -6Q + 120$. როცა $Q = 10$, მივიღებთ: $MR = 120 - 6 \cdot 10 = 60$.*

თუ მთლიანი ამონაგების ცვლილებას აღვნიშნავთ $\Delta(TR)$-ით, ხოლო მოთხოვნის

რაოდენობის ცვლილებას –ΔQ-თი, მაშინ ფუნქციის ნაზრდსა და დიფერენციალს შორის კავშირიდან დავასკვნით, რომ

$$\Delta(TR) \approx (MR) \times \Delta Q.$$

მაგალითი 14.9 *ვთქვათ, $TR = 100Q - Q^2$. დავწეროთ შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქცია. თუ მიმდინარე მოთხოვნის რაოდენობა არის 60, შევაფასოთ TR-ის მნიშვნელობის ცვლილება Q-ს 2 ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში.*

ამოხსნა. *თუ $TR = 100Q - Q^2$, მაშინ $MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 2Q$. როცა $Q = 60$, $MR = 100 - 2 \cdot (60) = -20$. თუ Q გაიზრდება 2 ერთეულით, ანუ $\Delta Q = 2$, მაშინ მივიღებთ*

$$\Delta(TR) \approx (MR) \times \Delta Q = (-20) \cdot 2 = -40.$$

მაშასადამე, Q-ს 60 ერთეულის დონიდან 2 ერთეულით გაზრდა იწვევს TR-ის დაახლოებით 40 ერთეულით შემცირებას.

ახლა შემოვიღოთ **მარგინალური (ზღვრული) დანახარჯის** ცნება.

მარგინალური დანახარჯი MC განისაზღვრება ტოლობით:

$$(MC)(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{f(Q + \Delta Q) - f(Q)}{\Delta Q},$$

სადაც $f = (TC)$.
მაშასადამე, მარგინალური დანახარჯი MC წარმოადგენს მთლიანი დანახარჯის ფუნქციის წარმოებულს პროდუქციის Q რაოდენობით. ე.ი.

$$(MC) = \frac{d(TC)}{dQ} = (TC)'.$$

მტკიცდება, რომ თუ წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობა შეიცვლება მცირე ΔQ-თი, მაშინ TC-ს შესაბამისი ცვლილება ტოლი იქნება

$$\Delta(TC) \approx (MC) \times \Delta Q. \tag{14.1}$$

კერძოდ, თუ $\Delta Q = 1$, მაშინ

$$\Delta(TC) \approx (MC).$$

მაშასადამე, (MC) გვაძლევს (TC)-ს მიახლოებით ცვლილებას, როცა Q იზრდება 1 ერთეულით.

მაგალითი 14.10 *საქონლის საშუალო დანახარჯის ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახით*

$$(AC) = 2Q + 6 + \frac{13}{Q}.$$

ჩავწეროთ შესაბამისი MC ფუნქცია. შევაფასოთ ასევე TC-ს ცვლილების ეფექტი იმ შემთხვევაში, როცა Q-ს მიმდინარე მნიშვნელობა 15 ერთეულიდან მცირდება 3 ერთეულით.

ამოხსნა. *პირველ რიგში უნდა დავწეროთ TC-ს გამოსახულება მოცემული AC-ს ფორმულის გამოყენებით. როგორც უკვე ვიცით, საზოგადოდ,*

$$AC = \frac{TC}{Q}.$$

აქედან, კი $TC = (AC) \cdot Q = (2Q + 6 + \frac{13}{Q})Q = 2Q^2 + 6Q + 13$.

გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ: $MC = \frac{d(TC)}{dQ} = 4Q + 6$. როცა $Q = 15$, $MC = 4 \cdot (15) + 6 = 66$. თუ Q შემცირდება 3 ერთეულით, მაშინ $\Delta Q = -3$. მაშასადამე, (14.1) ფორმულიდან TC-ს ცვლილების შესაფასებლად მივიღებთ:

$$\Delta(TC) \approx (MC) \times \Delta Q = 66 \times (-3) = -198.$$

ანუ, TC მცირდება დაახლოებით 198 ერთეულით.

შემოვიღოთ **მარგინალური(ზღვრული) მოგების** ცნება.

მარგინალური მოგება (MP) განისაზღვრება ტოლობით:

$$(MP)(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{f(Q + \Delta Q) - f(Q)}{\Delta Q},$$

სადაც $f = P(Q)$.
ამრიგად, მარგინალური მოგება (MP) წარმოადგენს მოგების ფუნქციის წარმოებულს რეალიზებული პროდუქციის Q რაოდენობით:

$$(MP) = \frac{dP}{dQ} = P'(Q).$$

მარგინალური მოგება გამოსახავს მოგების მყისიერ ცვლილებას (ნაზრდს) სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით. მოგების ნაზრდი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta P(Q) \approx (MP) \times \Delta Q. \tag{14.2}$$

თუ $\Delta Q = 1$, მაშინ

$$\Delta P(Q) \approx (MP).$$

ე.ი. მოგების ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდას, გარკვეული მიახლოებით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ მარგინალური მოგების ტოლად.

მაგალითი 14.11 *პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია FC=100 ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე - VC=3 ლ. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = 200 - Q$.*

ა) ვიპოვოთ მარგინალური მოგების ფუნქცია;

ბ) დაახლოებით როგორ შეიცვლება მოგება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდისას, თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რეალიზაციის დონეა 80 ერთეული. გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ცვლილება და შევადაროთ მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.

ამოხსნა. *ა) ამოცანის პირობიდან გამომდინარე მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია იქნება*

$$TC = FC + (VC) \cdot Q = 100 + 3Q,$$

ხოლო მთლიანი ამონაგები გამოითვლება შემდეგნაირად

$$TR = pQ = (200 - Q)Q = 200Q - Q^2.$$

ამიტომ, მოგების ფუნქციისთვის მივიღებთ

$$P(Q) = TR - TC = 200Q - Q^2 - (100 + 3Q) = -Q^2 + 197Q - 100.$$

მარგინალური მოგების ფუნქციის ჩასაწერად გავაწარმოოთ მიღებული მოგების ფუნქცია:

$$MP = P'(Q) = -2Q + 197.$$

ბ) ამ შემთხვევაში $Q = 80$ და $\Delta Q = 1$. მოგების მიახლოებითი ცვლილების მოსაძებნად გამოვიყენოთ (14.2) ფორმულა.

$$\Delta P(80) \approx MP(80) \times 1 = -2 \cdot 80 + 197 = 37.$$

ამრიგად, თუ აღებულ მომენტში იყიდება 80 ერთეული, მაშინ 1 ერთეულით მეტის გაყიდვა მოგებას ზრდის დაახლოებით 37 ერთეულით(ლარით). გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ნაზრდი, თუ $\Delta Q = 1$:

$$\Delta P(80) = P(81) - P(80) = -81^2 + 197 \cdot 81 - 100 -$$
$$-(-80^2 + 197 \cdot 80 - 100) = 36.$$

როგორც ვხედავთ მოგების ცვლილების მიახლოებით და ზუსტ მნიშვნელობებს შორის სხვაობაა 1 ერთეული(ლარი).

14.5 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $\frac{d^2y}{dx^2}$, თუ

   ა) $y = 7x^2 - x$;

   ბ) $y = \frac{1}{x^2}$;

   გ) $y = ax + b$.

2. იპოვეთ მეორე რიგის წარმოებულები

   ა) $f(x) = 4x^3 - 3x$;

   ბ) $f(x) = 2x(x + 4)^3$;

   გ) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$.

3. შეაფასეთ $f''(2)$ შემდეგი ფუნქციისთვის
   $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10x - 7$

4. იპოვეთ ფუნქციების დიფერენციალები
   ა) $y = \frac{2-x^2}{3x^2+1}$;
   ბ) $y = (x^3 + 2x - 7)(3 + x - x^2)$;
   გ) $f(x) = (5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)^{10}$;
   დ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

5. ლოპიტალის წესის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები
   ა) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;
   ბ) $\lim_{x\to 4} \frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$;
   გ) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+4x-5}{6x^2+2x+1}$;
   დ) $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$;
   ე) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$;
   ვ) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$;
   ზ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt[3]{x+8}-2}$;
   თ) $\lim_{x\to 64} \frac{4-\sqrt[3]{x}}{8-\sqrt{x}}$;
   ი) $\lim_{x\to 0} \frac{1+3\sin x-\cos 3x}{\sin 4x}$;
   კ) $\lim_{x\to 0} \frac{1+5\sin x-\cos 4x}{\tan 3x}$.

6. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = 60 - Q$.

   ა) მოძებნეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქციის გამოსახულებები.

   ბ) გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, როცა $Q = 50$.

   გ) იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ მოთხოვნა იზრდება $Q = 50$-დან $Q = 51$-მდე და შეადარეთ იგი მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობას $Q = 50$ ერთეულზე.

7. მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა $TR = 300Q - 2Q^2$.

   ა) რას უდრის მარგინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $Q = 25$.

   ბ) გამოთვალეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება მოთხოვნის $\Delta Q = 5$ ერთეულით გაზრდისას, თუ მოცემულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 25$ ერთეული.

8. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით $p = 80 - Q$.

   ა) მოძებნეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მარგინალური ამონაგების ფუნქციის გამოსახულებები.

   ბ) გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, როცა $Q = 20$.

   გ) იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ მოთხოვნა იზრდება ერთი ერთეულით და შეადარეთ იგი მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობას $Q = 20$ ერთეულზე.

9. გამოთვალეთ მარგინალური ამონაგები, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით:

   ა)$p = 6 - 2Q$;

   ბ)$p = \frac{500}{\sqrt{3+Q}}$;

   გ)$p = \sqrt[3]{200 - 4Q}$.

10. საწარმოს მუდმივი დანახარჯია FC=400 ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე - VC=4 ლ.

    ა) იპოვეთ მთლიანი და მარგინალური დანახარჯები.

    ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, როცა $Q = 40$.

    გ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილება, თუ მოთხოვნა გაიზრდება 40 ერთეულიდან 43 ერთეულამდე.

11. ვთქვათ, წარმოების საშუალო დანახარჯის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$AC = 3Q + 4 + \frac{15}{Q}$$

    ა) იპოვეთ მთლიანი დანახარჯისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციები.

    ბ) მოძებნეთ მარგინალური დანახარჯის საშუალებით გამოთვლილი სრული დანახარჯის ცვლილება, თუ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა მცირდება 20-დან 18 ერთეულამდე.

12. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 75 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის- $4 + \frac{3}{Q}$.

    ა) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი და მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობისათვის.

    ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილების ზუსტი მნიშვნელობები

    1) მოთხოვნის $\Delta Q = 3$ ერთეულით გაზრდისას;

    2) მოთხოვნის $\Delta Q = 4$ ერთეულით შემცირებისას,

    თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რეალიზაციის დონეა $Q = 50$ ერთეული.

13. წარმოების მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $K(Q) = 0,03Q^2 - 2Q + 300$. იპოვეთ საშუალო დანახარჯისა და მარგინალური დანახარჯის ფუნქციების მნიშვნელობები, როცა $Q = 50$ და $Q = 100$.

14. იპოვეთ მარგინალური ამონაგები, თუ მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა

$$TR = 100Q - 4Q^2.$$

    მოძებნეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება:

    ა) მოთხოვნის $\Delta Q = 2$ ერთეულით გაზრდისას;

    ბ) მოთხოვნის $\Delta Q = 3$ ერთეულით გაზრდისას,

    თუ აღებულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 60$ ერთეული.

15. პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია FC=80 ლ., ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე - VC=4 ლ. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = 300 - Q$.

ა) იპოვეთ მარგინალური მოგების ფუნქცია;

ბ) მარგინალური მოგების საშუალებით მიახლოებით გამოთვალეთ მოგების ცვლილება, რომელიც შეესაბამება წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის ცვლილებას $Q_1 = 40$ ერთეულიდან $Q_2 = 42$ ერთეულამდე.

გ) გამოთვალეთ მოგების ზუსტი ცვლილება $Q_1 = 40$ ერთეულიდან $Q_2 = 42$ ერთეულამდე და შეადარეთ ბ)-ში მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.

ლექცია 15

არაცხადი ფუნქცია. არაცხადი ფუნქციის წარმოებული. არაცხადი ფუნქციის გამოყენება ბიზნესის ამოცანებში

15.1 არაცხადი ფუნქციები

ჩვენ მიერ აქამდე გამოყენებული ფუნქციები ჩაიწერებოდა $y = f(x)$ განტოლების სახით, სადაც მარცხნივ მდგომი დამოკიდებული y ცვლადი ცხადად გამოისახება მარჯვნივ მდგომი გამოსახულების საშუალებით, რომელიც შეიცავს დამოუკიდებელ x ცვლადს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ y ფუნქცია მოცემულია ცხადი სახით. მაგალითად, ფუნქციები

$$y = x^2 + 3x + 1, \quad y = \frac{x^3+1}{2x-3} \quad \text{და} \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

მოცემულია ცხადი სახით.

ზოგჯერ, პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ვღებულობთ ისეთ განტოლებებს, რომლებშიც y ფუნქცია არ არის მკაფიოდ ჩაწერილი დამოუკიდებელი x ცვლადის საშუალებით. ამის მაგალითია შემდეგი განტოლებები:

$$x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x \quad \text{და} \quad x^2y + 2y^3 = 3x + 2y.$$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ამ ტიპის განტოლებებში y გამოისახება x ცვლადის საშუალებით არაცხადად და ამიტომ, y ფუნქციას უწოდებენ **არაცხადი** ფორმით ჩაწერილს(ან **არაცხად ფუნქციას**).

15.2 არაცხადი ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს განტოლება, რომელიც არაცხადი ფორმით გამოსახავს y ფუნქციას x ცვლადის საშუალებით და საჭიროა ვიპოვოთ წარმოებული $\frac{dy}{dx}$. მაგალითად, გვინდა ვიპოვოთ ამ განტოლებით გამოსახული გრაფიკის მხები წრფის დახრა კონკრეტულ წერტილში. ერთ-ერთი მიდგომა ასეთი ამოცანის გადასაწყვეტად არის ის, რომ

მოცემული განტოლება ამოვხსნათ y-ის მიმართ(ანუ, y ფუნქცია ცხადად ჩავწეროთ x-ის საშუალებით) და შემდეგ გავაწარმოოთ იგი ჩვენთვის კარგად ნაცნობი მეთოდებით. სამწუხაროდ, ყოველთვის არ არის შესაძლებელი y ფუნქციის ცხადი სახით ჩაწერა.

უფრო მეტიც: ხშირად, იმ შემთხვევაშიც კი, როცა შესაძლებელია y-ის ცხადი სახით პოვნა, მიღებული ფორმულა იმდენად რთულია, რომ მისი გაწარმოება მეტად არასასიამოვნოა.

არსებობს უფრო მარტივი გზა არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციების გასაწარმოებლად, რომელიც არ მოითხოვს წინასწარ y ფუნქციის ცხადი სახით ჩაწერას. ეს ხერხი ცნობილია არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესის სახელით და გულისხმობს მოცემული განტოლების ორივე მხარის გაწარმოებას x-ით და შემდგომ ალგებრული განტოლების ამოხსნას $\frac{dy}{dx}$-ის მიმართ.

მაგალითი 15.1 *იპოვოთ* $\frac{dy}{dx}$, *თუ* $x^2y + y^2 = x^3$.

ამოხსნა. *ჩვენ ვაპირებთ მოცემული განტოლების ორივე მხარე გავაწარმოოთ x-ით. იმის ხაზგასასმელად, რომ y რეალურად წარმოადგენს x-ის ფუნქციას, დროებით შევცვალოთ ის $f(x)$-ით და განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:*

$$x^2 f(x) + (f(x))^2 = x^3.$$

ახლა კი ამ განტოლების ორივე მხარე წევრ-წევრად გავაწარმოოთ x-ით. გვექნება:

$$x^2\frac{df}{dx} + f(x)(2x) + 2f(x)\frac{df}{dx} = 3x^2,$$

$$x^2\frac{df}{dx} + 2f(x)\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2xf(x),$$
$$\left[x^2 + 2f(x)\right]\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2xf(x),$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2-2xf(x)}{x^2+2f(x)}.$$

ბოლოს კი, $f(x)$-ის კვლავ y-ით შეცვლით მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}.$$

შევნიშნოთ, რომ არაცხადი წარმოებულის გამოთვლისათვის y-ის დროებით $f(x)$-ით შეცვლა საკმაოდ მოხერხებულია. თუმცა, გაწარმოების ტექნიკის კარგად ათვისების შემდგომ, შესაძლებელია ეს ნაბიჯი საერთოდ გამოვტოვოთ და გადავიდეთ განტოლების უშუალო გაწარმოებაზე. რისთვისაც, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ y არის x-ის ფუნქცია და ასევე არ დაგვავიწყდეს საჭიროებისამებრ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებაც.

ჩამოვაყალიბოთ ამ პროცედურების სქემა:

არაცხადი ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, რაიმე განტოლება წარმოებად $y(x)$ ფუნქციას გამოსახავს არაცხადი ფორმით. მაშინ $\frac{dy}{dx}$-ის საპოვნელად უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად:
1. გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე x ცვლადით. ამისათვის გვახსოვდეს, რომ y რეალურად წარმოადგენს x-ის ფუნქციას და საჭირო გახდება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენება y-ის შემცველი წევრებისთვის.
2. ამოვხსნათ გაწარმოების შედეგად მიღებული განტოლება ალგებრულად $\frac{dy}{dx}$-ის მიმართ,ანუ $\frac{dy}{dx}$ გამოვსახოთ x და y-ის საშუალებით.

მაგალითი 15.2 *$x^2 + y^2 = 25$ წრეწირისთვის ვიპოვოთ (3,4) და (3,-4) წერტილებში გავლებული მხები წრფეების დახრები.*

ამოხსნა. *გავაწარმოოთ $x^2 + y^2 = 25$ განტოლების ორივე მხარე x ცვლადით. გვექნება:*

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

როგორც ვიცით, მხები წრფის m_1 დახრა (3,4) წერტილში იქნება წარმოებულის მნიშვნელობის ტოლი როცა $x = 3$ და $y = 4$. მაშასადამე,

$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,4)} = -\left.\frac{x}{y}\right|_{x=3,y=4} = -\frac{3}{4}$$

ანალოგიურად, m_2 დახრა (3,-4) წერტილში ტოლია $\frac{dy}{dx}$-ის მნიშვნელობისა, როცა $x = 3$ და $y = -4$:

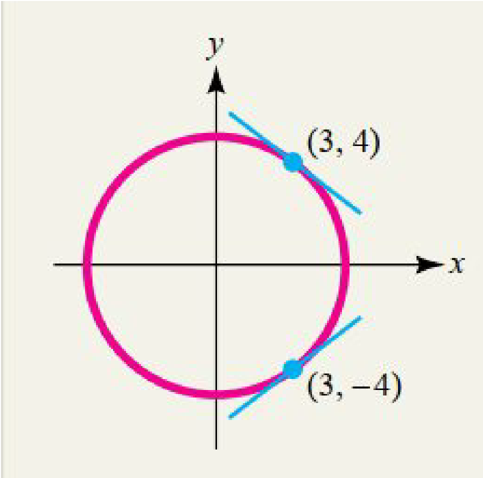
$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = -\left.\frac{x}{y}\right|_{x=3,y=-4} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

მოცემული წრეწირი და მის (3,4) და (3,-4) წერტილებში გავლებული მხებები გამოსახულია სურ. 15.1-ზე

15.3 არაცხადი ფუნქციის გამოყენება ეკონომიკაში

განვიხილოთ ეკონომიკაში არაცხადი ფუნქციის გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 15.3 *ვთქვათ, ქარხანაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა (წარმოების დონე) მოდელირდება ფორმულით $Q = 2x^3 + x^2y + y^3$, სადაც x და y არის, შესაბამისად, კვალიფიციური და არაკვალიფიციური მუშახელის მიერ გამოყენებული სამუშაო დრო. ვთქვათ, მიმდინარე სამუშაო დრო შედგება, შესაბამისად, 30*



სურ 15.1

და 20 კვალიფიციური და არაკვალიფიციური საათისგან. გამოიანგარიშეთ, როგორ უნდა შეიცვალოს არაკვალიფიციური სამუშაო y დრო კვალიფიციური სამუშაო x დროის 1 საათით მომატებისას იმისათვის, რომ წარმოების მიმდინარე დონე დარჩეს უცვლელი.

ამოხსნა. *წარმოების მიმდინარე დონე არის Q-ს მნიშვნელობა , როცა $x = 30$ და $y = 20$. ე.ი.*

$$Q = 2(30)^3 + (30)^2(20) + (20)^3 = 80000 \text{ ერთეული .}$$

თუ წარმოების დონე უნდა შენარჩუნდეს ამ ნიშნულზე, მაშინ დამოკიდებულება x კვალიფიციურ შრომასა და y არაკვალიფიციურ შრომას შორის მოიცემა განტოლებით

$$80000 = 2x^3 + x^2y + y^3,$$

რომელიც y-ს გამოსახავს არაცხადად როგორც x-ის ფუნქციას.

ჩვენი მიზანია, მოცემული განტოლებით დაკავშირებული x და y-თვის შევაფასოთ y-ის ცვლილება, რომელიც შეესაბამება x-ის 1 ერთეულით ზრდას. ფუნქციის დიფერენციალის შესწავლის დროს ჩვენ ვნახეთ, რომ y-ის ცვლილება, რომელიც გამოწვეულია x-ის 1 ერთეულით გაზრდით, შეიძლება აპროქსიმირდეს(ანუ მიახლოებით შეფასდეს) $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულით. ამ წარმოებულის საპოვნელად კი გამოვიყენოთ არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესი. მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
0 &= 6x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 3y^2\frac{dy}{dx},\\
0 &= 6x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + 3y^2\frac{dy}{dx},\\
-\left(x^2 + 3y^2\right)\frac{dy}{dx} &= 6x^2 + 2xy,\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}.
\end{aligned}$$

ახლა კი შევაფასოთ y-ის ცვლილება მიღებული წარმოებულით, როცა $x = 30$ და $y = 20$:

$$\text{ცვლილება } y \approx \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=30,y=20} = -\frac{6(30)^2 + 2(30)(20)}{(30)^2 + 3(20)^2} \approx -3.14 \text{ საათი}$$

მაშასადამე, მიმდინარე წარმოების დონის შესანარჩუნებლად არაკვალიფიციური სამუშაო დრო უნდა შემცირდეს დაახლოებით 3.14 საათით იმისათვის, რომ მოხდეს კვალიფიციური სამუშაო დროის 1 საათით გაზრდის კომპენსირება.

შენიშვნა: თუ საზოგადოდ $Q(x,y)$ გამოსახავს პროდუქციის რაოდენობას, რომელიც შეესაბამება პირველი ნედლეულის x ერთეულს და მეორე ნედლეულის y ერთეულს, მაშინ განტოლებას $Q(x,y)=C$, მუდმივი C-სთვის, ეწოდება **იზოქვანტი**. ასეთი განტოლებები გამოიყენება ეკონომისტების მიერ x და y-ის დანახარჯების ისეთი კომბინაციების შესასწავლად, რომლებიც გვაძლევენ წარმოების ერთი და იგივე დონეს.

ზოგჯერ პრაქტიკულ ამოცანებში გარკვეული განტოლებით ერთმანეთთან დაკავშირებული x და y ცვლადები შეიძლება თავის მხრივ წარმოადგენდნენ მესამე t ცვლადის ფუნქციებს, რომელიც ხშირად გამოსახავს დროს. ამ შემთხვევაში არაცხადი წარმოებული შეიძლება გამოვიყენოთ $\frac{dx}{dt}$ სიდიდის $\frac{dy}{dt}$ სიდიდესთან დასაკავშირებლად. ასეთი ტიპის ამოცანებს უწოდებენ ამოცანებს ურთიერთდაკავშირებული ცვლილებების სიჩქარეებზე(related rates).

მაგალითი 15.4 *კომპანიის მენეჯერმა გამოიკვლია, რომ კონკრეტული საქონლის q ასეული რაოდენობის დამზადებისას მთლიანი დანახარჯი შეადგენს C ათას დოლარს, სადაც $C^2-3q^3=4275$. იგივე საქონლის 1500 ერთეულის დამზადებისას წარმოების დონე მატულობს კვირაში 20 ერთეულით. რამდენია მთლიანი დანახარჯი ამ მომენტში და რა სიჩქარით იცვლება ის?*

ამოხსნა. *ცხადია, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $\frac{dC}{dt}$ როცა $q=15\,(1500$ ერთეული), ხოლო $\frac{dq}{dt}=0.2$ (0.2 ასეული ყოველკვირეულად). გავაწარმოოთ $C^2-3q^3=4275$ განტოლება არაცხადად t დროით. მივიღებთ:*

$$2C\frac{dC}{dt}-3\left[3q^2\frac{dq}{dt}\right]=0,$$

საიდანც

$$2C\frac{dC}{dt}=9q^2\frac{dq}{dt}$$

და

$$\frac{dC}{dt}=\frac{9q^2}{2C}\frac{dq}{dt}.$$

როცა $q=15$, დანახარჯი C იქნება

$$C^2-3(15)^3=4275,$$
$$C^2=4275+3(15)^3=14400,$$
$$C=120.$$

საბოლოოდ, თუ ჩავსვამთ $q=15, C=120$, და $\frac{dq}{dt}=0.2$ მონაცემებს $\frac{dC}{dt}$-ს ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\frac{dC}{dt}=\left[\frac{9(15)^2}{2(120)}\right](0.2)=1.6875$$

ათას დოლარს ($\$1687.50$) ყოველკვირეულად. მაშასადამე, 1500 ერთეული საქონლის დამზადების დანახარჯი შეადგენს $\$120000(C=120)$ და ამ დროს მთლიანი დანახარჯი იზრდება $\$1687.50$-ით ყოველკვირეულად.

მაგალითი 15.5 *როცა ერთი ცალი პროდუქტი p ლარი ღირს, მწარმოებელი ბაზარს აწვდის x ათას ერთეულს, სადაც*

$$x^2 - 2x\sqrt{p} - p^2 = 31.$$

როგორი იქნება მიწოდების ცვლილების სიჩქარე იმ შემთხვევაში, როცა პროდუქტის ფასია 9 ლარი და ის იზრდება 20 თეთრით ყოველკვირეულად?

ამოხსნა. *ამოცანის პირობიდან ვიცით, რომ როცა $p = 9$, მაშინ $\frac{dp}{dt} = 0.20$(ფასის ცვლილების სიჩქარე). ჩვენ გვთხოვენ დროის ამ მომენტში ვიპოვოთ $\frac{dx}{dt}$(მიწოდების ცვლილების სიჩქარე).*

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ თუ $p = 9$, მაშინ

$$x^2 - 2x\sqrt{9} - 9^2 = 31,$$
$$x^2 - 6x - 112 = 0,$$
$$(x+8)(x-14) = 0.$$

საიდანაც $x = 14$ ($x = -8$ გარეშე ფესვია ამოცანის პირობიდან გამომდინარე). შემდეგ, მიწოდების ფუნქციის ორივე მხარე არაცხადად გავაწარმოოთ დროით. გვექნება:

$$2x\frac{dx}{dt} - 2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{p} + x\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\right)\right] - 2p\frac{dp}{dt} = 0.$$

ბოლოს, მიღებულ სიჩქარის განტოლებაში ჩავსვათ $x = 14, p = 9$ და $\frac{dp}{dt} = 0.20$ და ამოვხსნათ ის საძიებელი $\frac{dx}{dt}$ სიჩქარის მიმართ. მივიღებთ:

$$2(14)\tfrac{dx}{dt} - 2\left[\sqrt{9}\tfrac{dx}{dt} + 14\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{9}}\right)(0.20)\right] - 2(9)(0.20) = 0,$$
$$[28 - 2(3)]\tfrac{dx}{dt} = 2(14)\left(\tfrac{1}{2\sqrt{9}}\right)(0.20) + 2(9)(0.20),$$
$$\tfrac{dx}{dt} = \tfrac{14\left(\frac{1}{3}\right)(0.20) + 18(0.20)}{22} \approx 0.206.$$

მაშასადამე, თუ პროდუქტის ფასი 9 ლარიდან ყოველკვირეულად იზრდება 20 თეთრით, მაშინ მიწოდების ზრდის სიჩქარე შეადგენს $0.206(1000) = 206$ ერთეულს ყოველკვირეულად.

15.4 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$ ორი გზით:

   I. არაცხადი გაწარმოებით;

   II. ცხადი სახით მოცემული y ფუნქციის გაწარმოებით.

   შეადარეთ მიღებული შედეგები.

   ა) $2x + 3y = 7$;

   ბ) $5x - 7y = 3$;

   გ) $x^3 - y^2 = 5$;

დ) $x^2 + y^3 = 12$;

ე) $xy = 4$.

2. იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$ არაცხადი გაწარმოების გზით

ა) $x^3 + y^3 = xy$;

ბ) $5x - x^2y^3 = 2y$;

გ) $y^2 + 2xy^2 - 3x + 1 = 0$;

დ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$;

ე) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;

ვ) $\sqrt{2x} + y^2 = 4$;

ზ) $xy - x = y + 2$;

თ) $y^2 + 3xy - 4x^2 = 9$;

ი) $(2x + y)^3 = x$;

კ) $(x - 2y)^2 = y$;

ლ) $(x^2 + 3y^2)^5 = 2xy$.

3. შეადგინეთ მოცემული წირების მითითებულ წერტილებში გავლებული მხები წრფეების განტოლებები

ა) $x^2 = y^3, (8, 4)$;

ბ) $x^2 - y^3 = 2x, (1, -1)$;

გ) $xy = 2, (2, 1)$;

დ) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$;

ე) $xy^2 - x^2y = 6, (2, -1)$;

ვ) $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1, (0, -1)$;

ზ) $(1 - x + y)^3 = x + 7, (1, 2)$;

თ) $(x^2 + 2y)^3 = 2xy^2 + 64, (0, 2)$.

4. იპოვეთ მოცემული წირების ის წერტილები, რომლებზეც გატარებული მხები წრფეები

I. ჰორიზონტალურია;

II. ვერტიკალურია.

ა) $x + y^2 = 9$;

ბ) $x^2 + xy + y = 3$;

გ) $xy = 16y^2 + x$;

დ) $x^2 + xy + y^2 = 3$;

ე) $x^2 - xy + y^2 = 3$.

5. ტბა ბინძურდება მის სანაპიროსთან მდებარე ქარხნის ნარჩენებით. ეკოლოგებმა გამოიკვლიეს, რომ თუ დაბინძურების დონე არის x ერთეული, მაშინ ტბაში იქნება გარკვეული სახეობის F რაოდენობის თევზი, სადაც

$$F = \frac{32000}{3+\sqrt{x}}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ტბაში დარჩება 4000 თევზი, მისი დაბინძურების დონე იზრდება 1.4 ერთეულიით წელიწადში. რა სიჩქარით შეიცვლება თევზის პოპულაცია ამ დროს?

6. როცა ერთი ცალი პროდუქტი p ლარი ღირს, მწარმოებელი ბაზარს აწვდის x ათას ერთეულს, სადაც

$$3p^2 - x^2 = 12.$$

როგორი იქნება მიწოდების ცვლილების სიჩქარე იმ შემთხვევაში, როცა პროდუქტის ფასია 4 ლარი და ის იზრდება 87 თეთრით ყოველთვიურად?

7. თუ ერთი ცალი პროდუქტი p ლარი ღირს, მომხმარებლის მოთხოვნის რაოდენობა მასზე შეადგენს x ასეულს, სადაც

$$x^2 + 3px + p^2 = 79.$$

როგორი იქნება მოთხოვნის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე იმ შემთხვევაში, როცა პროდუქტის ფასია 5 ლარი და ის მცირდება 30 თეთრით ყოველთვიურად?(ანუ $\frac{dp}{dt} = -0.30$)

8. თუ ერთი ცალი პროდუქტი p ლარი ღირს, მომხმარებლის მოთხოვნის რაოდენობა მასზე შეადგენს x ასეულს, სადაც

$$75x^2 + 17p^2 = 5300.$$

როგორი იქნება მოთხოვნის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე იმ შემთხვევაში, როცა პროდუქტის ფასია 7 ლარი და ის მცირდება 75 თეთრით ყოველთვიურად?

9. ჰერპეტოლოგებმა შემოგვთავაზეს გამოვიყენოთ $s = 1.1w^{0.2}$ ფორმულა ხვლიკის მაქსიმალური სპრინტერული s სიჩქარის (მ/წმ) შესაფასებლად, სადაც w ხვლიკის მასაა გრამებში. რა სიჩქარით გაიზრდება 11-გრამიანი ხვლიკის მაქსიმალური სიჩქარე, თუ ის მატულობს წონაში ყოველდღიურად 0.02 გრამით?

10. ქარხანაში წარმოების დონე შეადგენს $Q = 60K^{1/3}L^{2/3}$ ერთეულს, სადაც k წარმოადგენს კაპიტალდაბანდებას(ათას ლარებში) და L არის სამუშაო ძალის სიდიდე, რომელიც იზომება კაც-საათებში. რა სიჩქარით შეიცვლება კაპიტალდაბანდების მაჩვენებელი იმ შემთხვევაში, თუ წარმოების დონე მუდმივია, $K = 8, L = 1000$ და L იზრდება 25 კაც-საათით ყოველკვირეულად?

ლექცია 16

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციის გამოსაკვლევად

16.1 ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების დადგენა

ბუნებისა და ეკონომიკის მრავალი მოვლენა შეიძლება აღვწეროთ ფუნქციების დახმარებით, რომელთა ყოფაქცევის გამოკვლევა ჩვენთვის საინტერესო მოვლენის შესწავლას გვიადვილებს. ფუნქციის დინამიკის გამოკვლევაში კი განსაკუთრებული მნიშვნელობა წარმოებულის გამოყენებას ენიჭება. კერძოდ, წარმოებულის საშუალებით ადვილად ხერხდება მონოტონურობის შუალედების დადგენა, რაც ფუნქციის გამოკვლევის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

სამართლიანია შემდეგი დებულება:

თუ $y = f(x)$ წარმოებადი ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) $[a; b]$ შუალედზე, მაშინ ამ შუალედზე აღებული ნებისმიერი x-სთვის სრულდება უტოლობა

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც:

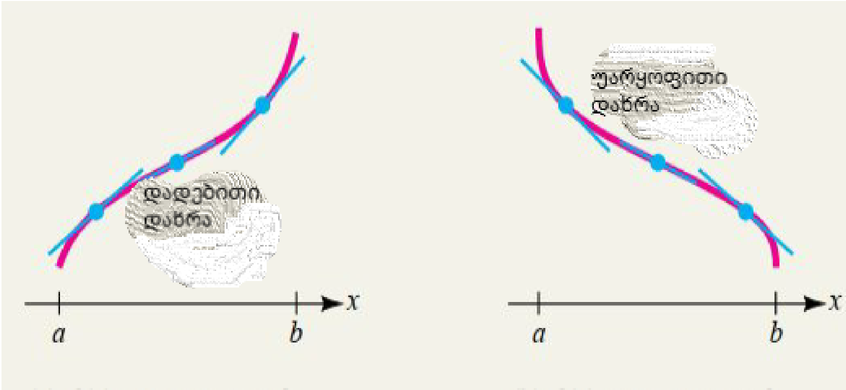
თუ $[a; b]$ შუალედზე წარმოებადი ფუნქციისათვის ამ შუალედის ყოველ x წერტილში სრულდება უტოლობა

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0),$$

მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) $[a; b]$ შუალედზე.

მაშასადამე, $f'(x)$ წარმოებულის ნიშანმუდმივობის შუალედები $y = f(x)$ ფუნქციისთვის მონოტონურობის შუალედებს წარმოადგენენ. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან გამომდინარე ადვილად დავასკვნით, რომ თუ რაიმე შუალედზე გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების დახრა დადებითია, ფუნქცია ამ შუალედზე ზრდადია, ხოლო თუ უარყოფითი, მაშინ ფუნქცია კლებადია(სურ. 16.1).

მაგალითი 16.1 *ვიპოვოთ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები.*



სურ 16.1

ამოხსნა. *მოცემული ფუნქციის წარმოებული იქნება*

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1),$$

რომელიც უწყვეტია ყველგან. დავადგინოთ ამ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები ე.წ. ინტერვალთა მეთოდის საშუალებით, რომლის არსიც შემდეგში მდგომარეობს:

შუალედური მნიშვნელობების შესახებ უწყვეტი ფუნქციის თვისებიდან გამომდინარე, თუ ფუნქცია რაიმე შუალედის არცერთ წერტილში არ იღებს ნულის ტოლ მნიშვნელობას, მაშინ ის ამ შუალედზე ნიშანმუდმივია. ამიტომ, თუ ჩვენ რიცხვით ღერძზე მოვნიშნავთ ფუნქციის ნულთან ტოლობის ყველა წერტილს და წყვეტის ყველა წერტილს, ღერძი დაიყოფა შუალედებად, რომელთაგან თითოეულში ფუნქცია ნიშანმუდმივია. თითოეულ ამ შუალედში ფუნქციის ნიშანი შეიძლება დავადგინოთ „სასინჯი წერტილის" გამოყენებით ან სხვა რაიმე ხერხით.

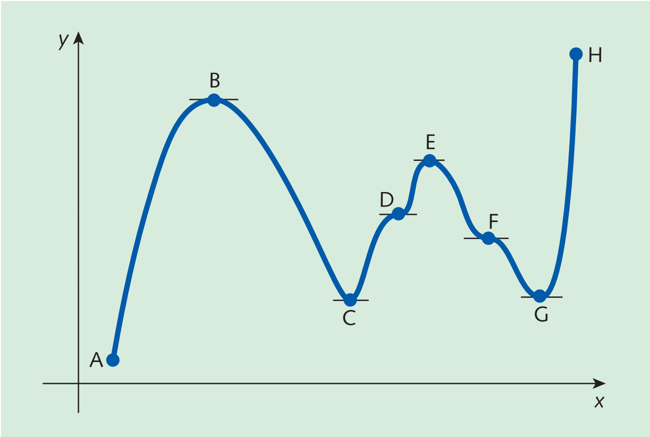
ჩვენს შემთხვევაში გვექნება სურ. 16.2-ზე გამოსახული სქემა.

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია $(-\infty; -2]$ *და* $[1; +\infty)$*, კლებადობისა კი -* $[-2; 1]$.

სურ 16.2

16.2 ფუნქციის ექსტრემუმები

განვიხილოთ 16.3 სურათზე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი. ამ გრაფიკზე მდებარე B, C, D, E, F, G წერტილების აბსცისებს უწოდებენ მოცემული ფუნქციის სტაციონარულ წერტილებს. ანუ, ეს ის წერტილებია, რომელთა შესაბამის გრაფიკის წერტილებზე გავლებული მხები წრფე ჰორიზონტალურია, ანუ პარალელურია OX ღერძის. მაშასადამე,



სურ 16.3: სტაციონარული წერტილები

ამ მხების დახრის კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ამგვარად, f ფუნქციის სტაციონარულ x წერტილში $f'(x) = 0$.

სტაციონარული წერტილები იყოფა სამ ჯგუფად: ლოკალური მაქსიმუმის წერტილები, ლოკალური მინიმუმის წერტილები და წერტილები, რომლებშიც ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

B და E წერტილების ორდინატები წარმოადგენენ 16.3 სურათზე მოცემული ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმებს. სიტყვა "ლოკალური"გამოიყენება იმ ფაქტის აღსანიშნად, რომ ეს წერტილი წარმოადგენს ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილს ამავე წერტილის რაიმე მიდამოში. ცხადია, ლოკალური მაქსიმუმი არ არის აუცილებელი, იყოს ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. 16.3 სურათზე H წერტილის ორდინატი წარმოადგენს ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას, მაგრამ მისი აბსცისა არ არის სტაციონარული წერტილი, ვინაიდან, ამ წერტილში გავლებული მხები არ არის ჰორიზონტალური.

C და G წერტილების ორდინატები წარმოადგენენ 16.3 სურათზე მოცემული ფუნქციის ლოკალურ მინიმუმებს. ამ შემთხვევაშიც არ არის აუცილებელი, ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა იყოს რომელიმე ლოკალური მინიმუმი. 16.3 სურათზე წერტილი A წარმოადგენს ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობას, მაგრამ A წერტილის აბსცისა არ არის სტაციონარული წერტილი.

ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ლოკალური **ექსტრემუმის** წერტილები ეწოდებათ.

სურ. 16.3-დან ჩანს, რომ D და F წერტილების აბსცისები არ არიან ექსტრემუმის წერტილები, თუმცა ისინი სტაციონარული წერტილებია.

სურ. 16.3-ის განხილვით ჩვენ მოვახდინეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დებულებისა, რომელიც **ფერმას** თეორემის სახელითაა ცნობილი:

თუ x წერტილში წარმოებად $f(x)$ ფუნქციას ამავე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ

$$f'(x) = 0$$

ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის ცოდნა ძალზედ მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სახის ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნისას: თუნდაც, შემოსავლისა და მოგების ფუნქციების მაქსიმუმის წერტილების გამოთვლისას, ასევე საშუალო დანახარჯის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნისას.

ეკონომიკის ამოცანების უმრავლესობაში ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი და მაქსიმუმი ემთხვევა ამავე ფუნქციის გლობალურ მინიმუმსა და მაქსიმუმს. ამიტომ, ჩვენ, სტაციონარული წერტილების დახასიათებისას, სიტყვა "ლოკალურს"ზოგჯერ გამოვტოვებთ ხოლმე. მიუხედავად ამისა, უნდა გვახსოვდეს, რომ უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიღწეულ იქნეს არა სტაციონარულ წერტილში, არამედ შუალედის რომელიმე ბოლოში და აუცილებლად უნდა შევამოწმოთ ეს ფაქტი. აღნიშნული შემოწმება შეგვიძლია სტაციონარულ წერტილებში მნიშვნელობების შედარებით ბოლოებში მნიშვნელობებთან.

ყოველივე ზემოთ ნათქვამის გათვალისწინებით ნათელია, რომ ფუნქციის ოპტიმიზაციისთვის(ანუ ექსტრემუმზე მის გამოსაკვლევად) დაისმის ორი მნიშვნელოვანი კითხვა: როგორ ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის სტაციონარული წერტილები და როგორ დავახასიათოთ ისინი? ანუ, როგორ მოვახდინოთ მათი კლასიფიკაცია? პირველ კითხვაზე პასუხი მარტივია, ვინაიდან, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სტაციონარული წერტილები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$f'(x) = 0.$$

ამგვარად, სტაციონარული წერტილების საპოვნელად გავაწარმოებთ ფუნქციას, გავუტოლებთ წარმოებულს ნულს და ამოვხსნით მიღებულ განტოლებას. მიღებული სტაციონარული წერტილებისთვის კლასიფიკაცია კი სხვადასხვა გზით არის შესაძლებელი. ერთ-ერთ ასეთ წესს წარმოადგენს მეორე რიგის წარმოებულის წესი. კერძოდ, შესაძლებელია იმის ჩვენება, რომ თუ a წერტილი სტაციონარული წერტილია და $f''(a) \neq 0$, მაშინ ეს სტაციონარული წერტილი არის ექსტრემუმის წერტილი და

- თუ $f''(a) > 0$, მაშინ a წერტილი წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს;
- თუ $f''(a) < 0$, მაშინ a წერტილი წარმოადგენს მაქსიმუმის წერტილს.

ამრიგად, სტაციონარული წერტილების კლასიფიკაციისთვის გვჭირდება ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნის დადგენა. შესაძლებელია მოხდეს ისეც, რომ $f''(a) = 0$. მაშინ, მეორე რიგის წარმოებული ვერ გაგვცემს ცალსახა პასუხს სტაციონარული a წერტილის კლასიფიკაციისთვის. ასეთ შემთხვევაში a წერტილი შესაძლებელია იყოს მინიმუმის წერტილი, მაქსიმუმის წერტილი ან არ იყოს ექსტრემუმის წერტილი. საბოლოო პასუხის დასადგენად უნდა მივმართოთ კვლევის სხვა მეთოდებს.

მაგალითი 16.2 *ვიპოვოთ და დავახასიათოთ შემდეგი ფუნქციის სტაციონარული წერტილები:*

$$f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

ამოხსნა. *პირველ რიგში გამოვთვალოთ ფუნქციის წარმოებული, შემდეგ გავუტოლოთ ის ნულს და ამოვხსნათ მიღებული ალგებრული განტოლება:*

$$f'(x) = 2x - 4; \qquad 2x - 4 = 0; \qquad x = 2.$$

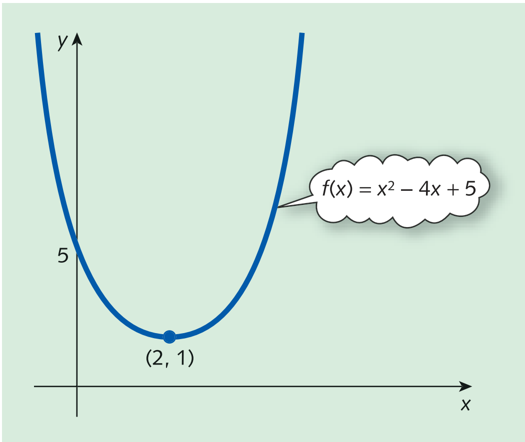
ახლა გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = 2.$$

ვინაიდან, მეორე რიგის წარმოებული მუდმივი ფუნქციაა, ამიტომ $f''(2) = 2 > 0$. შესაბამისად, სტაციონარული წერტილი 2 წარმოადგენს f ფუნქციის მინიმუმის წერტილს. ხოლო ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ გამოვთვლით ფუნქციის მნიშვნელობას 2-ში:

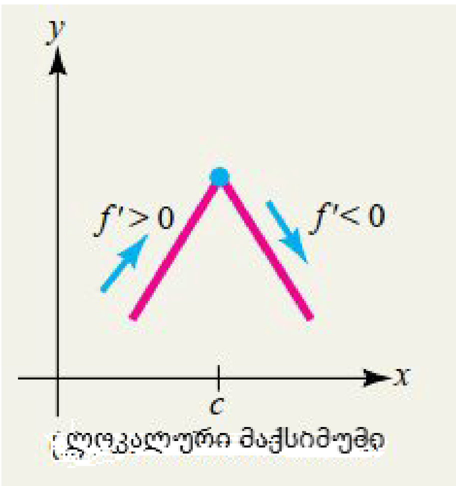
$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1.$$

ამგვარად, ფუნქციის გრაფიკის მინიმუმის წერტილია (2,1). მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი ნაჩვენებია 16.4 სურათზე.



სურ 16.4: მინიმუმის წერტილი

გვახსოვდეს ასევე, რომ ფუნქციამ შეიძლება ექსტრემუმს მიაღწიოს იმ წერტილზეც, რომელშიც წარმოებული არ არსებობს(გრაფიკის "წაწვეტების,"ან როგორც ზოგჯერ ამბობენ "გადატეხვის"წერტილებში) (სურ.16.5).

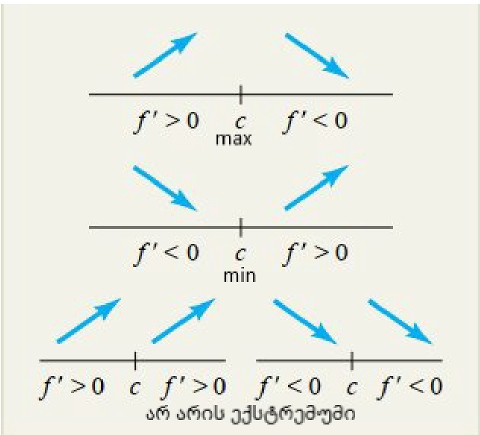


სურ 16.5

სტაციონარულ წერტილებსა და განსაზღვრის არის იმ წერტილებს, რომელშიც წარმოებული არ არსებობს, ფუნქციის **კრიტიკული** წერტილები ეწოდებათ.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მეორე რიგის წარმოებულის წესის გამოყენებამ, შესაძლოა არ მოგვცეს საბოლოო ინფორმაცია სტაციონარული წერტილის შესახებ. გარდა ამისა, რიგ შემთხვევებში, მეორე რიგის წარმოებულის საჭირო თვისებების შესწავლა უფრო რთულია, ვიდრე პირველის, ამიტომ ხშირად უფრო მიზანშეწონილია ე.წ. პირველი რიგის წარმოებულის წესის გამოყენება. თუ გავითვალისწინებთ ფუნქციის მონოტონურობის კავშირს მისსავე წარმოებულის ნიშანთან, მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ :

თუ $x = c$ წერტილი წარმოადგენს უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილს და ამ წერტილის მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს წარმოებული ნიშანს იცვლის $'+'$-დან $'-'$-ზე, მაშინ c ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო თუ წარმოებული ნიშანს იცვლის $'-'$ -დან $'+'$-ზე, მაშინ c ლოკალური მინიმუმის წერტილია. იმ შემთხვევაში, თუ წარმოებულმა შეინარჩუნა ნიშანი, c წერტილი არ წარმოადგენს ექსტრემუმის წერტილს(სურ.16.6).



სურ 16.6

მაგალითი 16.3 *ვიპოვოთ* $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$ *ფუნქციის ექსტრემუმები.*

ამოხსნა. *მოცემული ფუნქციის გაწარმოებით მივიღებთ:*

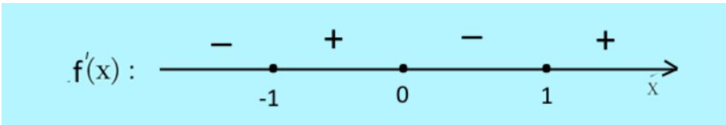
$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x+1)(x-1),$$

კრიტიკული წერტილებია $x = -1$, $x = 0$ *და* $x = 1$. *ამ წერტილებით რიცხვითი ღერძი იყოფა ოთხ შუალედად. თითოეულ მათგანში დავადგენთ წარმოებულის ნიშანს. ეს შეიძლება გაკეთდეს მოცემული შუალედის რომელიმე „სასინჯ წერტილში“ წარმოებულის გამოთვლით, ან ნამრავლის შემადგენელი თითოეული თანამამრავლის ნიშნის დადგენით. მივიღებთ სურ.16.7-ზე გამოსახულ სქემას. საიდანაც, „პირველი რიგის წარმოებულის წესის“ თანახმად დავასკვნით, რომ ექსტრემუმის წერტილებია:*

$$x_{\min} = -1, \quad x_{\max} = 0, \quad x_{\min} = 1.$$

თუ ამ წერტილებში გამოვითვლით ფუნქციის მნიშვნელობებს, ვიპოვით საძიებელ ექსტრემუმებსაც:

$$y_{\min} = f(-1) = 1, \quad y_{\max} = f(0) = 3, \quad y_{\min} = f(1) = 1.$$



სურ 16.7

ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს უწოდებენ აგრეთვე, შესაბამისად, ფუნქციის აბსოლუტურ ან გლობალურ მაქსიმუმს და მინიმუმს. ცხადია, რაიმე შუალედზე ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება ან ლოკალური მაქსიმუმის რომელიმე წერტილში, ან შუალედის რომელიმე ბოლოში. ანალოგიურად, უმცირესი მნიშვნელობა მიიღება ან ლოკალური მინიმუმის რომელიმე წერტილში, ან შუალედის რომელიმე ბოლოში.

აბსოლუტურ (გლობალურ) მაქსიმუმს და მინიმუმს აბსოლუტურ (გლობალურ) ექსტრემუმებს უწოდებენ.

მაგალითი 16.4 *ვიპოვოთ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმები $[-3; 0]$ სეგმენტზე.*

ამოხსნა. *ვიპოვოთ $f(x)$-ის წარმოებული:*

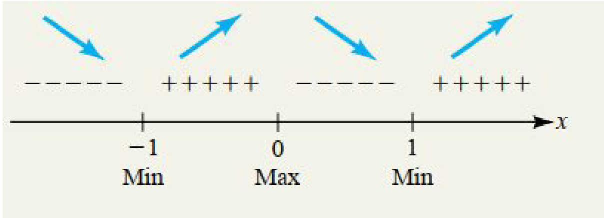
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1).$$

როგორც ვხედავთ, ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია $x = -2$ და$x = 1$, რომელთაგან მხოლოდ $x = -2$ ეკუთვნის $[-3; 0]$ სეგმენტს. გამოვთვალოთ $f(x)$-ის მნიშვნელობები $x = -2$ წერტილსა და სეგმენტის ბოლოებზე:

$$f(-2) = 13, \quad f(-3) = 2, \quad f(0) = -7.$$

მიღებული შედეგების შედარების შემდეგ ვასკვნით, რომ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და მინიმუმი $[-3; 0]$ სეგმენტზე არის შესაბამისად 13 და -7.

მაგალითი 16.5 *დასამზადებელია V_0 კუბ.ერთ. მოცულობის მქონე ცილინდრული ფორმის დახურული ქილის ჭურჭელი. ქილის ფსკერისა და თავსახურის დასამზადებლად გამოსაყენებელი მასალის ერთი კვ.ერთეულის ფასია 3 ლარი, ხოლო*



სურ 16.8

ქილის გვერდითი ზედაპირის დასამზადებლად გამოსაყენებელი მასალის ერთი კვ.ერთეულის ფასი-2 ლარი. იპოვეთ ქილის რადიუსსა და სიმაღლეს შორის ისეთი დამოკიდებულება, რომელიც უზრუნველყოფს მისი დამზადებისას მინიმალურ დანახარჯს.

ამოხსნა. ცხადია, რომ ცილინდრის გვერდის გაშლის შედეგად მიიღება მართკუთხედი, რომლის სიგანეა ქილის სიმაღლე h, ხოლო სიგრძე იქნება ქილის ფსკერის(ან სახურავის) შემომსაზღვრელი r-რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე- $2\pi r$. მაშინ, ამ მართკუთხედის ფართობი(ანუ ქილის გვერდითი ზედაპირის ფართობი) ტოლი იქნება $2\pi rh$ კვადრ. ერთეულის და მის დასამზადებლად დაიხარჯება $2(2\pi rh)$=$4\pi rh$ ლარი. ასევე, ვინაიდან ქილის სახურავის და ფსკერის ფართობებია πr^2, მათ დასამზადებლად საჭირო იქნება $6\pi r^2$ ლარი. მაშასადამე, ქილის დასამზადებლად საერთო ჯამში დაიხარჯება

$$C = 6\pi r^2 + 4\pi rh$$

ლარი. სწორედ ეს C ფუნქცია უნდა გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე. რადგანაც ქილის მოცულობა ფიქსირებული(მუდმივი) V_0 სიდიდეა, უშუალო გამოთვლების წინ გამოვსახოთ C ფუნქცია მხოლოდ ერთი r ცვლადით. ამისათვის $V_0 = \pi r^2 h$ ფორმულიდან ვიპოვოთ h და ჩავსვათ ის C-ს გამოსახულებაში:

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

და

$$C(r) = 6\pi r^2 + 4\pi r(\frac{V_0}{\pi r^2}) = 6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}.$$

მაშასადამე, ჩვენს მიზანს წარმოადგენს $C(r)$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმის პოვნა, როცა $r > 0$. ამისათვის გავაწარმოოთ ის და ვიპოვოთ კრიტიკული $r = R$ წერტილი, ანუ ის წერტილი, სადაც $C'(R) = 0$. გვექნება:

$$C'(r) = 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2},$$

$$C'(R) = 12\pi R - \frac{4V_0}{R^2} = 0,$$

$$12\pi R = \frac{4V_0}{R^2},$$

$$R^3 = \frac{4V_0}{12\pi}.$$

საიდანაც

$$R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}.$$

ვიპოვოთ $C(r)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$C''(r) = 12\pi + \frac{8V_0}{r^3}.$$

ცხადია, $C''(r) > 0$ ნებისმიერი $r > 0$, მათ შორის, როცა $r = R$.

მამასადამე, დანახარჯის $C(r)$ ფუნქციისთვის მივიღეთ, რომ მის ერთადერთ კრიტიკულ R წერტილზე $C''(R) > 0$. მეორე რიგის წარმოებულის წესის თანახმად, ეს კი იმას ნიშნავს , რომ R წარმოადგენს $C(r)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს.

ვთქვათ, H არის ქილის R რადიუსის შესაბამისი სიმაღლე, მაშინ $V_0 = \pi R^2 H$ და გვექნება, რომ

$$12\pi R = \frac{4V_0}{R^2},$$

$$12\pi R = \frac{4\left(\pi R^2 H\right)}{R^2} = 4\pi H.$$

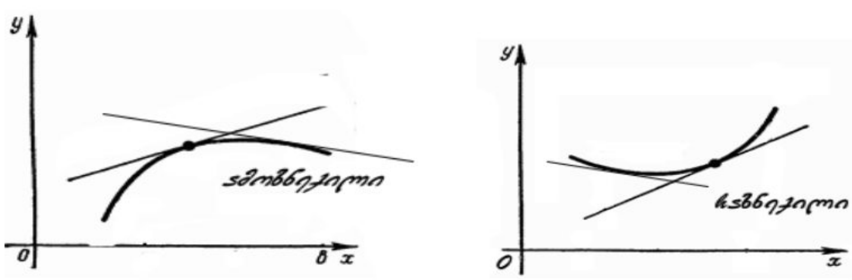
საიდანაც,

$$H = \frac{12\pi R}{4\pi} = 3R.$$

ამრიგად, ჩვენი ამოცანის პირობებში, ქილის დამზადების ხარჯები მინიმალური იქნება იმ შემთხვევაში, როცა სიმაღლე სამჯერ მეტია რადიუსზე.

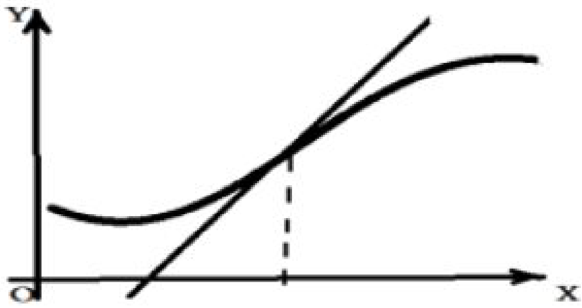
16.3 ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი

რაიმე შუალედზე წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს და თავად ფუნქციასაც **ამოზნექილი** ეწოდება, თუ გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები მდებარეობს გრაფიკის ზემოთ.
რაიმე შუალედზე წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს და თავად ფუნქციასაც **ჩაზნექილი** ეწოდება, თუ გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები მდებარეობს გრაფიკის ქვემოთ(სურ.16.9).



სურ 16.9

წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის წერტილს ამ ფუნქციის **გადაღუნვის წერტილი** ეწოდება, თუ ამ წერტილზე გავლისას გრაფიკის ამოზნექილობა იცვლება ჩაზნექილობით ან პირიქით. გადაღუნვის წერტილზე გავლისას ფუნქციის გრაფიკი გადადის მხების ერთი მხარიდან მეორეში.(სურ.16.10).



სურ 16.10

ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედების მოძებნა ეფუძნება შემდეგ დებულებას:

რაიმე შუალედზე ორჯერ წარმოებადი $f(x)$ ფუნქცია ამოზნექილია ამ შუალედზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f''(x) \leq 0$, ხოლო ჩაზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f''(x) \geq 0$.

ფუნქციის გადაღუნვის წერტილის მოძებნა კი ხდება შემდეგ დებულებებზე დაყრდნობით:

1) თუ $(x_0, f(x_0))$ არის რაიმე შუალედზე ორჯერ წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი, მაშინ $f''(x_0) = 0$.
2) თუ ორჯერ წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს x_0 წერტილის სხვადასხვა მხარეს სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ $(x_0, f(x_0))$ წერტილი არის $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.

მაშასადამე, ორჯერ წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედებისა და გადაღუნვის წერტილების მოსაძებნად უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

1) ვიპოვოთ $f''(x)$;

2) ამოვხსნათ განტოლება $f''(x) = 0$;

3) დავადგინოთ $f''(x)$ ფუნქციის ნიშნები იმ შუალედებში, რომლებადაც დაიყო რიცხვითი ღერძი მიღებული ამონახსნებით. თითოეულ იმ შუალედში, სადაც $f''(x)$ დადებითია, ფუნქცია იქნება ჩაზნექილი, ხოლო სადაც $f''(x)$ უარყოფითია, ფუნქცია იქნება ამოზნექილი.

4) თითოეული იმ ამონახსნის შესაბამისი წერტილი, რომლის სხვადასხვა მხარეს $f''(x)$ ფუნქციას სხვადასხვა ნიშანი აქვს, იქნება $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი, ხოლო თუ ეს ნიშნები ერთნაირია, გადაღუნვის წერტილი არ გვექნება.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 16.6 *ვიპოვოთ* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1$ *ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.*

ამოხსნა. *ვიპოვოთ* $f(x)$ *ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული. რადგან*

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x,$$

ამიტომ

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x^2 - 3x + 2) = 12(x-1)(x-2).$$

$f''(x) = 0$ *განტოლების ფესვებია* $x = 1$ *და* $x = 2$. *მოვნიშნოთ ისინი რიცხვით ღერძზე და მიღებული შუალედებიდან თითოეულში დავადგინოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი. მივიღებთ სურ.16.11-ზე გამოსახულ სქემას. საიდანაც დავასკვნით, რომ* $f(x)$ *ფუნქციის ამოზნექილობის შუალედია* $[1; 2]$ *, ჩაზნექილობის შუალედები კი* $(-\infty; 1]$ *და* $[2; +\infty)$. *გადაღუნვის წერტილებია* $(1; 8)$ *და* $(2; 17)$.

სურ 16.11

მაგალითი 16.7 *ვიპოვოთ* $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7$ *ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.*

ამოხსნა. *ვიპოვოთ* $f(x)$ *ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული. რადგან*

$$f'(x) = 12x^5 - 20x^3x,$$

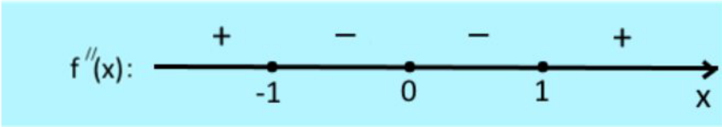
ამიტომ

$$f''(x) = 60x^4 - 60x^2 = 60x^2(x^2 - 1) = 60x^2(x+1)(x-1).$$

$f''(x) = 0$ *განტოლების ფესვებია* $x = -1$, $x = 0$ *და* $x = 1$. *მოვნიშნოთ ისინი რიცხვით ღერძზე და მიღებული შუალედებიდან თითოეულში დავადგინოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი. მივიღებთ სურ.16.12-ზე გამოსახულ სქემას. საიდანაც დავასკვნით, რომ* $f(x)$ *ფუნქციის ამოზნექილობის შუალედია* $[-1; 1]$, *ჩაზნექილობის შუალედები კი* $(-\infty; -1]$ *და* $[1; +\infty)$. *გადაღუნვის წერტილებია* $(-1; 4)$ *და* $(1; 4)$.

16.4 ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ჩვენ უკვე გვქონდა შეხება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის ორ კერძო სახესთან(ვერტიკალური და ჰორიზონტალური), როდესაც უსასრულობაში ფუნქციის ზღვრისა და წერტილში უსასრულოდ დიდი ფუნქციის ცნებას გავეცანით.



სურ 16.12

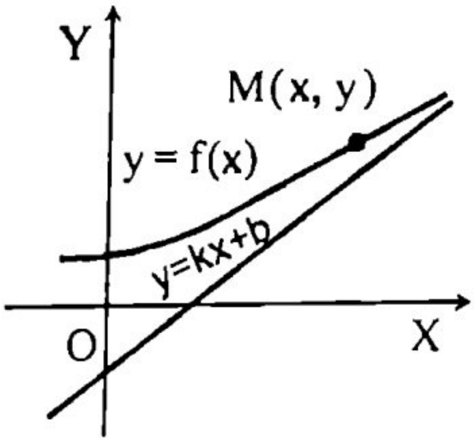
შემოვიღოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის ზოგადი განსაზღვრება.

რაიმე წრფეს ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, თუ მანძილი გრაფიკის წერტილიდან ამ წრფემდე მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც ეს წერტილი "მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ".

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი y ღერძის პარალელურია.

ასიმპტოტს, რომელიც y ღერძის პარალელური არ არის, დახრილი ასიმპტოტი ეწოდება.
ჰორიზონტალური ასიმპტოტი წარმოადგენს დახრილი ასიმპტოტის კერძო შემთხვევას.

ვთქვათ, $y = kx+b$ წრფე არის $y = f(x)$ ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტი(სურ.16.13)



სურ 16.13

მტკიცდება, რომ ამ შემთხვევაში k და b პარამეტრები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

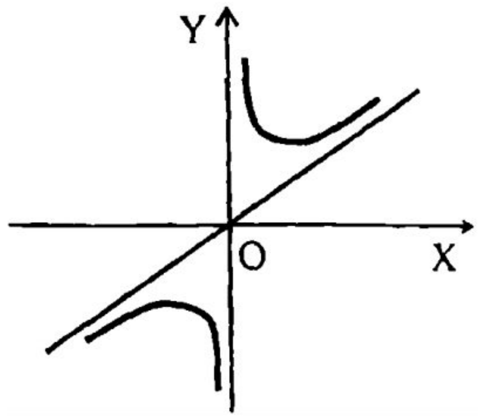
ასევე პირიქითაც, თუ ზემოთ მოცემული ზღვრები არსებობს, მაშინ $y = kx + b$ არის დახრილი ასიმპტოტი.

მაგალითი 16.8 *ვიპოვოთ* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *ფუნქციის ასიმპტოტები.*

ამოხსნა. *ცხადია,* $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$ *და* $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. *ამგვარად,* $x = 0$ *წრფე* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალურ ასიმპტოტს წარმოადგენს. დახრილი ასიმპტოტის მოსაძებნად გამოვთვალოთ* k *და* b *პარამეტრები:*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x \right) = 0.$$

მამასადამე, ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტია $y = x$ *წრფე(სურ. 16.14)*



სურ 16.14

16.5 ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

ყოველივე ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით ჩამოვაყალიბოთ $f(x)$ ფუნქციის გამოკვლევის ზოგადი სქემა.

ნაბიჯი 1. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე;

ნაბიჯი 2. გამოვთვალოთ და მოვნიშნოთ x და y გადაკვეთები;

ნაბიჯი 3. ვიპოვოთ ყველა ასიმპტოტი.

ნაბიჯი 4. ვიპოვოთ $f'(x)$ და მისი საშუალებით განსაზღვროთ $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და მონოტონურობის შუალედები;

ნაბიჯი 5. ვიპოვოთ ყველა ლოკალური ექსტრემუმი;

ნაბიჯი 6. ვიპოვოთ $f''(x)$ და გამოვიყენოთ ის ფუნქციის ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედებისა და გადაღუნვის წერტილების საპოვნელად;

ნაბიჯი 7. მიღებული მონაცემების საფუძველზე ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

მაგალითი 16.9 *გამოვიკვლიოთ* $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ *ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.*

ამოხსნა. ნაბიჯი 1 და 2. *ცხადია, ფუნქციის განსაზღვრის არეა მთელი* x *ღერძი, გარდა* $x = -1$ *წერტილისა. გრაფიკი ორივე საკოორდინატო ღერძს ჰკვეთს მხოლოდ სისტემის სათავეზე.*

ნაბიჯი 3. *ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტია წრფე $x = -1$, ვინაიდან*

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty.$$

ასევე, რადგანაც

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0,$$

ამიტომ $y = 0$ წრფე (ანუ x ღერძი) წარმოადგენს ფუნქციის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტს.

ნაბიჯი 4. *გავაწარმოოთ $f(x)$ ფუნქცია. მივიღებთ:*

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(1) - x[2(x+1)(1)]}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

რადგანაც $f'(1) = 0$, ამიტომ $x = 1$ არის ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. მართალია $f'(-1)$ არ არსებობს, მაგრამ $x = -1$ არ იქნება კრიტიკული წერტილი, ვინაიდან ის არ შედის ფუნქციის განსაზღვრის არეში. 1 და -1 წერტილები x ღერძს ჰყოფს სამ ინტერვალად. თითოეულ ამ ინტერვალზე შევარჩიოთ სატესტო წერტილები (მაგ. -2, 0 და 3) და დავადგინოთ წარმოებულის ნიშნები. მივიღებთ სურ.16.15-ზე მოცემულ სქემას. ამ სქემიდან ჩანს, რომ გამოსაკვლევი ფუნქცია კლებადია როცა $x < -1$ და $x > 1$, ხოლო ზრდადია $-1 < x < 1$ შუალედში.

ნაბიჯი 5. *ნაბიჯი 4 -ში მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით ვასკვნით, რომ $x = 1$ წერტილი არის ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი. ვინაიდან $f(1) = \frac{1}{4}$, გრაფიკს "პიკი"ექნება $(1; \frac{1}{4})$ წერტილში.*

ნაბიჯი 6. *მოცემული ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედების დასადგენად ვიპოვოთ მისი მეორე რიგის წარმოებული. გვექნება:*

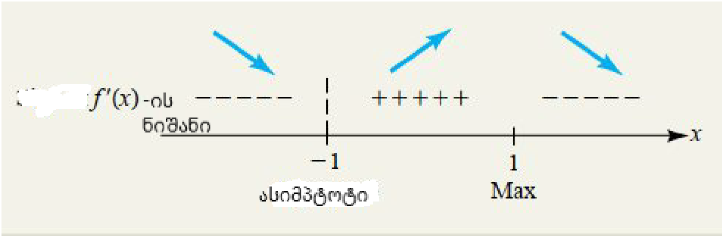
$$f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}.$$

ვინაიდან $f''(x) = 0$ როცა $x = 2$ და $f''(x)$ არ არსებობს $x = -1$ წერტილში, ამიტომ შევამოწმოთ $f''(x)$-ის ნიშანი $x < -1$, $-1 < x < 2$ და $x > 2$, შუალედებში. მარტივი გამოთვლებით დავასკვნით, რომ $f(x)$ ფუნქცია ამოზნექილია $x < -1$, $-1 < x < 2$ შუალედებში და ჩაზნექილია როცა $x > 2$. როგორც ვხედავთ, ამოზნექილობის სახე იცვლება $x = 2$ წერტილზე. $f(2) = \frac{2}{9}$, ამიტომ $(2; \frac{2}{9})$ წერტილი წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს.

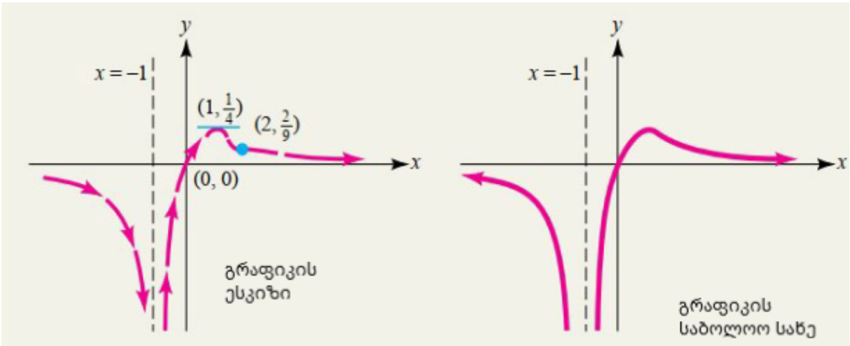
ნაბიჯი 7. *საბოლოოდ, ჩატარებული გამოკვლევის გათვალისწინებით ჯერ ავაგოთ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი, ხოლო შემდეგ მივცეთ მას საბოლოო სახე(სურ.16.16)*

16.6 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ზრდადობა-კლებადობის შუალედები



სურ 16.15



სურ 16.16

ა) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;

ბ) $f(t) = t^3 + 3t^2 + 1$;

გ) $f(x) = x^3 - 3x - 4$;

დ) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$;

ე) $g(t) = t^5 - 5t^4 + 100$;

ვ) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$;

ზ) $f(t) = \frac{1}{4-t^2}$;

თ) $g(t) = \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2}$;

ი) $h(u) = \sqrt{9-u^2}$;

კ) $f(x) = \sqrt{6-x-x^2}$;

ლ) $F(x) = x + \frac{9}{x}$;

მ) $f(t) = \frac{t}{(t+3)^2}$.

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების კრიტიკული წერტილები და მოახდინეთ მათი კლასიფიკაცია

ა) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$;

ბ) $f(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3$;

გ) $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$;

დ) $f(t) = 10t^6 + 24t^5 + 15t^4 + 3$;

ე) $g(x) = (x-1)^5$;

ვ) $F(x) = 3 - (x+1)^3$;

ზ) $f(t) = \frac{t}{t^2+3}$;

თ) $f(t) = t\sqrt{9-t}$;

ი) $h(t) = \frac{t^2}{t^2+t-2}$;

კ) $g(x) = 4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$.

3. იპოვეთ t პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $h(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია სტაციონარული წერტილი

   ა) $h(x) = tx^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

   ბ) $h(x) = x^3 + tx^2 - 2x - 2$;

   გ) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + tx + 9$;

   დ) $h(x) = 2x^3 + x^2 - 2tx - 1$.

4. დახატეთ იმ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

   ა) $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$;

   ბ) $f'(x) < 0$, როცა $x < 0$ და $x > 2$;

   გ) $f'(x) > 0$, როცა $0 < x < 1$ და $1 < x < 2$.

5. დახატეთ იმ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

   ა) $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$;

   ბ) $f'(x) < 0$, როცა $0 < x < 1$;

   გ) $f'(x) > 0$, როცა $x < 0, 1 < x < 2$, და $x > 2$.

6. შეარჩიეთ a, b და c კონსტანტები ისე, რომ $f(x) = ax^2+bx+c$ ფუნქციამ ლოკალურ მაქსიმუმს მიაღწიოს $(5; 12)$ წერტილზე და მისი y-გადაკვეთა იყოს 3-ის ტოლი.

7. შეარჩიეთ a, b, c და d კონსტანტები ისე, რომ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ფუნქციამ ლოკალურ მაქსიმუმს მიაღწიოს $(-2; 8)$ წერტილზე, ხოლო ლოკალურ მინიმუმს კი- $(1; -19)$ წერტილზე.

8. პირველი რიგის წარმოებულის წესის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები

   ა) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$;

   ბ) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$;

   გ) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$;

   დ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$;

   ე) $f(x) = (x-2)^3$;

   ვ) $f(x) = x^5 - 5x$;

   ზ) $f(x) = (x^2-5)^3$;

   თ) $f(x) = (x-2)^4$.

9. მეორე რიგის წარმოებულის წესის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექ-სტრემუმები

ა) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$;

ბ) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$;

გ) $f(x) = (x^2 - 9)^2$;

დ) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

ე) $f(x) = 2x + 1 + \frac{18}{x}$;

ვ) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$;

ზ) $f(x) = x^2(x-5)^2$;

თ) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$;

ი) $h(t) = \frac{2}{1+t^2}$;

კ) $f(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$.

10. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების აბსოლუტური ექსტრემუმები მითითებულ შუალე-დებზე

ა) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2; \quad 0 \le x \le 2$;

ბ) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1; \quad 0 \le x \le 5$;

გ) $f(t) = 3t^5 - 5t^3; \quad -2 \le t \le 0$;

დ) $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3; \quad -1 \le x \le 1$;

ე) $f(x) = (x^2 - 4)^5; \quad -3 \le x \le 2$;

ვ) $f(t) = \frac{t^2}{t-1}; \quad -2 \le t \le -\frac{1}{2}$;

ზ) $g(x) = x + \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{2} \le x \le 3$;

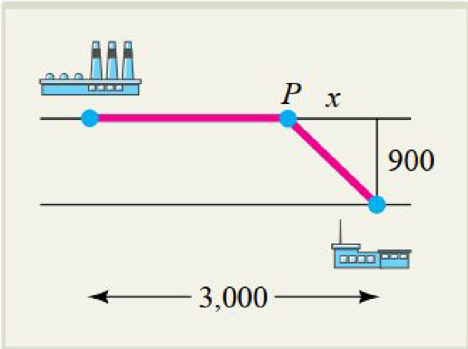
თ) $g(x) = \frac{1}{x^2-9}; \quad 0 \le x \le 2$.

11. საგზაო დეპარტამენტმა გადაწყვიტა ავტობანის გასწვრივ მოაწყოს სივრცე 5000 კვ.მ ფართობის მქონე მართკუთხედის ფორმის კემპინგისთვის, რომელიც შემოსა-ღობია იმ სამი მხრიდან, რომლებიც არ ესაზღვრებიან მაგისტრალს. შემოსაღობი მასალის რა მინიმალური რაოდენობის გრძივი მეტრი არის საჭირო ამ სამუშაოს შესასრულებლად და რა სიგრძისა და სიგანის უნდა იყოს კემპინგი ამისათვის?

12. 900 მეტრი სიგანის მქონე მდინარის ერთ ნაპირზე მდებარე ელექტრო სადგუ-რიდან მისგან ქვემოთ 3000 მეტრში მეორე ნაპირზე განლაგებულ ქარხანამდე გასაყვანია ელექტროკაბელი. წყალქვეშ ერთი მეტრი კაბელის გაყვანა ღირს 5 ლარი, ხოლო ხმელეთზე- 4 ლარი. დაადგინეთ კაბელის გაყვანის ყველაზე ეკო-ნომიური მარშრუტი(იხ. სურ. 16.17).

13. მართკუთხედის ფორმის თუნუქის ფირფიტისგან, რომლის ზომებია: 50სმ და 80 სმ , აკეთებენ ყუთს შემდეგნაირად: კუთხეებში ამოჭრიან კვადრატებს, ნაპირებს გადაღუნავენ და აკავშირებენ ერთმანეთთან. გამოთვალეთ, როგორი უნდა იყოს კვადრატის გვერდის სიგრძე , რომ ყუთს ჰქონდეს მაქსიმალური მოცულობა.

14. სითხის გადასაზიდ V მოცულობის მქონე რეზერვუარს აქვს ცილინდრის ფორმა. როგორი უნდა იყოს ცილინდრის ზომები, რომ მის დასამზადებლად საჭირო მასა-ლის ღირებულება იყოს მინიმალური.



სურ 16.17

15. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები

ა) $f(s) = 2s(s+4)^3$;

ბ) $f(x) = (x^2 - 3)^2$;

გ) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

დ) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$;

ე) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$;

ვ) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 24$.

16. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკების ასიმპტოტები

ა) $f(x) = x - \frac{7}{x}$;

ბ) $f(x) = \frac{3x^3}{x^2+16}$;

გ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

დ) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$;

ე) $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-4x}$;

ვ) $f(x) = \frac{x^2+3}{3x+2}$.

17. გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები

ა) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 7$;

ბ) $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{x^2}$;

გ) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

დ) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

ლექცია 17

ეკონომიკური ფუნქციების ოპტიმიზაცია. მარგინალური ანალიზის კრიტერიუმები მაქსიმალური მოგებისა და მინიმალური დანახარჯისთვის. ფუნქციის ელასტიკურობა. მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ

მოცემული ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა უკავშირდება ე.წ. ოპტიმიზაციის ამოცანებს. აღნიშნული თემა მეტად მნიშვნელოვანია მათემატიკური ეკონომიკისთვის. განვიხილოთ ეკონომიკური ამოცანებისთვის ფუნქციის წარმოებულის ეფექტურად გამოყენების მაგალითები.

მაგალითი 17.1 *მოცემულია ფირმის მოკლევადიანი წარმოების $P_L = Q$ ფუნქცია, სადაც $Q = 6L^2 - 0.2L^3$, ხოლო L აღნიშნავს მუშახელის რაოდენობას.*

ა) გავარკვიოთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს წარმოების მაქსიმალურ ეფექტურობას(ანუ მაქსიმალურ წარმოებას);

ბ) გავარკვიოთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს ერთ მუშახელზე საშუალო წარმოების მაქსიმალურ ოდენობას. გამოვთვალოთ ამ მნიშვნელობისთვის მარგინალური MP_L და საშუალო AP_L პროდუქტიულობა. გავაანალიზოთ მიღებული მნიშვნელობები.

ამოხსნა.

ა) ამ ნაწილში ჩვენი ამოცანაა, ვიპოვოთ L-ის ის მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ წარმოებას. ამისათვის ჯერ ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის სტაციონარული წერტილები:

$$\frac{dQ}{dL} = 12L - 0.6L^2; \quad 12L - 0.6L^2 = 0; \quad L = 0; \;\; L = 20.$$

როცა $L = 0$, ცხადია, წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა ვერ იქნება მაქსიმალური, ამიტომ გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და დავახასიათოთ $L = 20$ სტაციონარული წერტილი:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1.2L; \quad \frac{d^2Q}{dL^2}(20) = -12 < 0.$$

ამრიგად, ვასკვნით, როცა $L = 20$, მაშინ წარმოება არის მაქსიმალური. ამგვარად, ფირმამ უნდა დაიქირაოს 20 თანამშრომელი და ამ შემთხვევაში წარმოება იქნება $Q = 6 \cdot (20)^2 - 0.2 \cdot (20)^3 = 800$.

ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ მოცემული Q ფუნქციის გრაფიკის მინიმალური წერტილის კოორდინატებია (0,0) ხოლო მაქსიმალური წერტილის კოორდინატებია (20,800) (სურათი 17.1).

ბ) მეორე ნაწილში უნდა განვიხილოთ მუშახელის საშუალო პროდუქტიულობა. ამისთვის მთლიანად გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა უნდა შევაფარდოთ მუშახელის რაოდენობასთან. ანუ,

$$AP_L = \frac{Q}{L}.$$

ამ სიდიდეს ხშირად მუშახელის პროდუქტიულობასაც უწოდებენ. ჩვენი მაგალითისთვის მუშახელის საშუალო პროდუქტიულობის მაჩვენებელი ფუნქცია იქნება $AP_L = 6L - 0.2L^2$. ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ამისათვის კი, უნდა ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილი და დავახასიათოთ იგი:

$$\frac{d(AP_L)}{dL} = 6 - 0.4L; \qquad 6 - 0.4L = 0; \qquad L = 15.$$

$$\frac{d^2(AP_L)}{dL^2} = -0.4 < 0.$$

აქედან ვასკვნით, რომ სტაციონარულ $L = 15$ წერტილში მიიღწევა მაქსიმუმი და შესაბამისი მუშახელის პროდუქტიულობა არის $AP_L(15) = 45$.

საბოლოოდ დასათვლელი დაგვრჩა $MP_L(15)$. ამისათვის გვჭირდება MP_L ფუნქციის გამოსახულება, მის მისაღებად Q უნდა გავაწარმოოთ L-ის მიმართ:

$$MP_L = 12L - 0.6L^2; \qquad MP_L(15) = 45.$$

შევნიშნოთ, რომ $L = 15$ წერტილში MP_L და AP_L ფუნქციების მნიშვნელობები ემთხვევა ერთმანეთს.

როგორც ვხედავთ, მუშახელის პროდუქტიულობის მაქსიმუმის წერტილზე მუშახელის მარგინალური და საშუალო პროდუქტიულობა ერთმანეთს ემთხვევა.

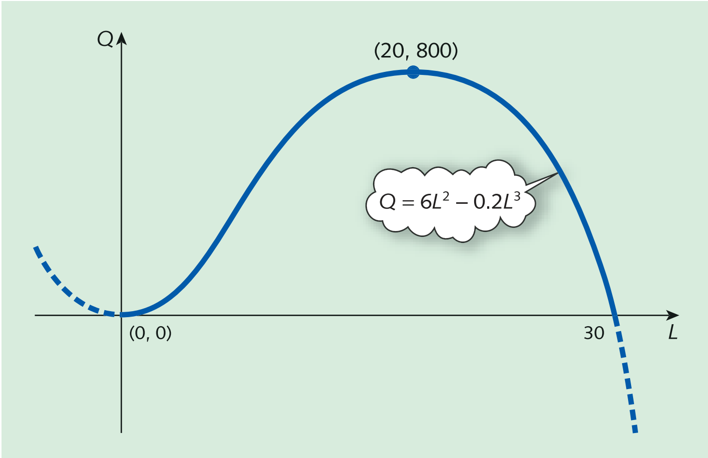
მაგალითი 17.2 *პროდუქტზე მოთხოვნის განტოლებაა $p + Q = 30$, ხოლო სრული დანახარჯის ფუნქციაა $TC = \frac{Q^2}{2} + 6Q + 7$.*

ა) ვიპოვოთ მიწოდების ის Q რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს მთლიანი ამონაგების მაქსიმალურ სიდიდეს.

ბ) ვიპოვოთ მიწოდების ის Q რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას. Q-ს ამ მნიშვნელობისთვის გამოვთვალოთ MR და MC. გავაანალიზოთ მიღებული შედეგები.

ამოხსნა.

ა) ამოცანაში უნდა დავადგინოთ Q-ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ $TR = p \cdot Q$. ამოცანის პირობაში მოცემული განტოლებიდან გამოვსახოთ P და ჩავსვათ ბოლო ფორმულაში.



სურ 17.1: წარმოების ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი

მივიღებთ: $TR = 30Q - Q^2$. *ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილი და დავახასიათოთ იგი:*

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 30 - 2Q; \quad 30 - 2Q = 0; \quad Q = 15.$$

$$\frac{d^2(TR)}{dQ^2} = -2 < 0.$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ $Q = 15$ *წერტილში მთლიანი ამონაგები არის მაქსიმალური.*

ბ) ამოცანის ამ ნაწილში უნდა ვიპოვოთ Q*-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოგება არის მაქსიმალური. ამისათვის დავწეროთ მოგების ფუქნცია* $P = TR - TC$. *შესაბამისად გვექნება:*

$$P = 30Q - Q^2 - \frac{Q^2}{2} - 6Q - 7 = -\frac{3}{2}Q^2 + 24Q - 7.$$

დავადგინოთ მაქსიმუმის წერტილი:

$$\frac{dP}{dQ} = -3Q + 24; \qquad -3Q + 24 = 0; \qquad Q = 8.$$

$$\frac{d^2P}{dQ^2} = -3 < 0.$$

ამგვარად, $Q = 8$ *მნიშვნელობისთვის მოგება არის მაქსიმალური და* $P(8) = 89$. *ჩვენ დასათვლელი დაგვრჩა მარგინალური ამონაგებისა და მარგინალური დანახარჯის მნიშვნელობები, როცა* $Q = 8$:

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 30 - 2Q; \qquad MR(8) = 14.$$

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = Q + 6; \qquad MC(8) = 14.$$

შევნიშნოთ, რომ $Q = 8$ *მნიშვნელობისთვის მარგინალური ამონაგები და მარგინალური ხარჯი ერთმანეთის ტოლია.*

ამ მაგალითიდან ვნახეთ, რომ იმ წერტილში, რომელშიც მოგება მაქსიმალურია, მარგინალური ამონაგები ტოლია მარგინალური დანახარჯის.

ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნული ფაქტი სამართლიანია ნებისმიერი მოგების ფუნქციისთვის.

მართლაც, თუ $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$ მოგების ფუნქციაა, მაშინ

$$P'(Q) = [TR(Q) - TC(Q)]' = TR'(Q) - TC'(Q)$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს რომ $P'(Q) = 0$, როცა $TR'(Q) = TC'(Q)$. თუ ამავე დროს $P''(Q) < 0$, რაც ექვივალენტურია იმისა, რომ $TR''(Q) < TC''(Q)$, მაშინ მოგება იქნება მაქსიმალური.

მარგინალური ანალიზის კრიტერიუმი მაქსიმალური მოგებისთვის. მოგება $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$ მაქსიმალური იქნება წარმოების იმ Q დონეზე, სადაც მარგინალური ამონაგები და მარგინალური დანახარჯი ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მარგინალური დანახარჯის ცვლილების სიჩქარე აღემატება მარგინალური ამონაგების ცვლილების სიჩქარეს. ანუ, როცა

$$TR'(Q) = TC'(Q) \quad \text{და} \quad TR''(Q) < TC''(Q).$$

მაგალითი 17.3 *x სართულიანი საოფისე ნაგებობის მშენებლობის ხარჯები შედგება სამი კომპონენტისგან:*

- *10 მილიონი ლარი მიწისთვის;*
- *250000 ლარი თითოეული სართულის მშენებლობა;*
- *10000x ლარი თითოეულ სართულზე სპეციალური ხარჯი.*

რამდენ სართულიანი უნდა იყოს ნაგებობა, რომ საშუალო ხარჯი თითოეულ სართულზე იყოს მინიმალური?

ამოხსნა. *მიწის ღირებულება ფიქსირებული ხარჯია, თითოეული სართულის ღირებულებიდან გამომდინარე კი x სართული ეღირება $250000x$ ლარი, ხოლო თუ სპეციალური ხარჯი თითოეულ სართულზე $10000x$-ს შეადგენს, მაშინ მთელი შენობისთვის სპეციალური ხარჯი იქნება $10000x^2$ ლარი. შესაბამისად მთლიანი დანახარჯი იქნება*

$$TC = 10000000 + 250000x + 10000x^2.$$

საშუალო ხარჯი თითოეულ სართულზე იქნება მთელი ხარჯი შეფარდებული სართულების რაოდენობასთან:

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{10000000 + 250000x + 10000x^2}{x} = \frac{10000000}{x} + 250000 + 10000x.$$

რომ ვიპოვოთ x-ის თუ რა მნიშვნელობისთვის იქნება AC მინიმალური, ამისათვის ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები და დავახასიათოთ ისინი.

$$\frac{d(AC)}{dx} = -\frac{10000000}{x^2} + 10000; \quad 10000 - \frac{10000000}{x^2} = 0; \quad x = \sqrt{1000}.$$

ცხადია, ჩვენ უგულვებელვყოფთ უარყოფით ამონახსნს. იმაში დასარწმუნებლად, რომ მიღებული წერტილი მინიმუმის წერტილია, განვიხილოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$\frac{d^2(AC)}{dx^2} = \frac{20000000}{x^3}; \qquad \frac{d^2(AC)}{dx^2}(\sqrt{1000}) = \frac{20000000}{1000^{3/2}} > 0.$$

მართლაც, ვინაიდან, მეორე რიგის წარმოებული ამ წერტილში დადებითია, ესე იგი, ის წარმოადგენს მინიმუმის წერტილს.

ამოცანა მათემატიკურად ზუსტად არის ამოხსნილი, მაგრამ $\sqrt{1000}$ არ არის მთელი რიცხვი და ფიზიკურად შეუძლებელია ამგვარი რაოდენობის სართულების აგება. ამიტომ ჩვენ მიახლოებით შევაფასებთ ამ რიცხვს: $x \approx 31.6$. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ AC რომელ წერტილში უფრო ნაკლები იქნება, 31 თუ 32-ში, ჩავსვათ ისინი შესაბამის გამოსახულებაში და მიღებული სიდიდეები შევადაროთ:

$$AC(31) \approx 882580; \qquad AC(32) \approx 882500.$$

მაშასადამე, თითოეული სართულის მშენებლობის საშუალო ფასი ყველაზე იაფი იქნება 32- სართულიანი შენობის აგების შემთხვევაში.

როგორც ამ მაგალითიდან ჩანს, მარგინალური დანახარჯი($MC = (TC)' = 250000 + 20000x$) და საშუალო დანახარჯი ტოლია იმ წერტილში($x = \sqrt{1000}$), რომელშიც მინიმალურია საშუალო დანახარჯი. ეს არ არის შემთხვევითი. მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი ფაქტი:

მარგინალური ანალიზის კრიტერიუმი მინიმალური საშუალო დანახარჯისთვის. საშუალო დანახარჯი მინიმალურია წარმოების იმ Q დონეზე, სადაც საშულო დანახარჯი და მარგინალური დანახარჯი ერთმანეთის ტოლია. ანუ, როცა

$$AC(Q) = (TC)'(Q) = MC(Q).$$

მაგალითი 17.4 *მიწოდების ფუნქციაა $p = Q_S + 8$, ხოლოც მოთხოვნის $p = -3Q_D + 80$. მთავრობამ გადაწყვიტა, შემოიღოს t ლარის ოდენობის გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. დაადგინეთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.*

ამოხსნა. *იმისათვის, რომ გავითვალისწინოთ გადასახადი t, მიწოდების ფუნქციაში p ჩავანაცვლოთ $p - t$-თი. ამგვარად, $p = Q_S + 8 + t$. ვინაიდან, ბაზარი წონასწორობაშია, $Q_S = Q_D$ და აღვნიშნოთ ეს სიდიდე Q სიმბოლოთი. მაშინ განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:*

$$p = Q + 8 + t; \qquad p = -3Q + 80.$$

შესაბამისად,

$$Q + 8 + t = -3Q + 80; \qquad 4Q = 72 - t; \qquad Q = 18 - t/4.$$

ამგვარად, თუ პროდუქტის რაოდენობა, რომელიც გაიყიდა, არის Q და თითოეულ პროდუქტზე სახელმწიფომ დააწესა t ლარის გადასახადი, მაშინ სახელმწოფოს მხრიდან მთლიანად მიღებული გადასახადი იქნება $T = Q{\cdot}t = (18{-}t/4)t = 18t{-}t^2/4$ ლარი. მივიღეთ გამოსახულება, რომლის მაქსიმუმის პოვნაც გვსურს. ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები და დავახასიათოთ ისინი .

$$\frac{dT}{dt} = 18 - t/2; \qquad 18 - t/2 = 0; \qquad t = 36.$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -1/2 < 0.$$

ეს კი ადასტურებს, რომ $t = 36$ ლარი არის გადასახადის ის მნიშვნელობა, რომლის შემთხვევაში სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს.

17.1 ფუნქციის ელასტიკურობა

ხშირად მოხერხებული და საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადის ფარდობით ნაზრდს. ამ საკითხს მივყავართ ფუნქციის **ელასტიკურობის** ცნებამდე, რომელსაც ზოგჯერ ფარდობით წარმოებულსაც უწოდებენ. განვიხილოთ ეს ცნება დეტალურად.

$y = f(x)$ ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდია

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{y},$$

ხოლო დამოუკიდებელი ცვლადის ფარდობითი ნაზრდი კი $\frac{\Delta x}{x}$.

ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდის არგუმენტის ფარდობით ნაზრდთან შეფარდება, ანუ

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ "დიდია"ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდი არგუმენტის ფარდობით ნაზრდზე.

თუ $y = f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ გვექნება:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{y}}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}f'(x).$$

აღნიშნულ ზღვარს, ანუ ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდის არგუმენტის ფარდობით ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ, ეწოდება ფუნქციის **ელასტიკურობა** და იგი $E(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაშასადამე,

$$E(x) = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

მაგალითი 17.5 *ვიპოვოთ $y = 3x - 6$ ფუნქციის ელასტიკურობა, როცა $x = 10$.*

ამოხსნა. *ფუნქციის ელასტიკურობის განმარტებიდან გვექნება:*

$$E(x) = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $x = 10$, მაშინ მოცემული ფუნქციის ელასტიკურობა იქნება

$$\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ x გაიზარდა ერთი პროცენტით, მაშინ y გაიზრდება 1.25% -ით.

17.2 მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ

ვთქვათ, $Q = D(p)$ არის p ფასის მქონე რაიმე პროდუქტზე ბაზრის მოთხოვნის რაოდენობა, სადაც D არის წარმოებადი ფუნქცია. მაშინ ამ პროდუქტის მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ(ანუ, რაც იგივეა მოთხოვნის ფარდობითი ნაზრდისა და ფასის ფარდობითი ნაზრდის შეფარდების ზღვარი) განისაზღვრება ტოლობით:

$$E(p) = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$$

და მას აქვს შემდეგი ინტერპრეტაცია: $E(p)$ დაახლოებით ტოლია მოთხოვნის პროცენტული ცვლილების სიჩქარისა, რომელიც გამოწვეულია p ფასის 1%-ით ცვლილებით.

შევნიშნოთ, რომ რადგანაც მოთხოვნის ფუნქცია კლებადია, ამიტომ $\frac{dQ}{dp} < 0$. ვინაიდან $p > 0$ და $Q > 0$, ვღებულობთ, რომ მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ ყოველთვის უარყოფითია, ანუ

$$E(p) = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} < 0.$$

ასევე, იმის მტკიცება, რომ კონკრეტული პროდუქტისთვის მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ -0.5-ის ტოლია, ნიშნავს, რომ ამ პროდუქტზე ფასის 10%-ით მომატება იწვევს მასზე მოთხოვნის რაოდენობის(ანუ გაყიდული რაოდენობის) დაახლოებით 5%-ით შემცირებას.

მაგალითი 17.6 *მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q = 240 - 2p$, სადაც $0 \leq p \leq 120$.*

ა) ჩავწეროთ p ფასის მიმართ მოთხოვნის ელასტიკურობის ფუნქცია;

ბ) გამოვთვალოთ მოთხოვნის ელასტიკურობა, როცა ფასი $p = 100$. ავხსნათ მიღებული პასუხი;

გ) გამოვთვალოთ მოთხოვნის ელასტიკურობა, როცა ფასი $p = 50$. ავხსნათ მიღებული პასუხი;

დ) რომელ ფასზე იქნება მოთხოვნის ფუნქციის ელასტიკურობა -1-ის ტოლი და რა არის ასეთი ფასის ეკონომიკური არსი?

ამოხსნა.

ა) მოთხოვნის ელასტიკურობა იქნება:

$$E(p) = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q} \cdot (-2) = \frac{-2p}{240 - 2p} = \frac{-p}{120 - p};$$

ბ) როცა $p = 100$, მოთხოვნის ელასტიკურობა ტოლია:

$$E(100) = \frac{-100}{120 - 100} = -5.$$

ანუ, როცა ფასი $p = 100$, მაშინ ფასის 1%-ით მომატება გამოიწვევს მოთხოვნის რაოდენობის დაახლოებით 5%-ით შემცირებას.

გ) როცა $p = 50$, მოთხოვნის ელასტიკურობა იქნება:

$$E(50) = \frac{-50}{120 - 50} \approx -0.71.$$

ანუ, როცა ფასი $p = 50$, მაშინ ფასის 1%-ით მომატება გამოიწვევს მოთხოვნის რაოდენობის დაახლოებით 0.71%-ით შემცირებას.

დ) თუ მოთხოვნის ელასტიკურობა -1-ის ტოლია, ეს იმას ნიშნავს, რომ

$-1 = \frac{-p}{120-p}$, $\quad 120 - p = p \quad$ *და* $\quad p = 60.$

მივიღეთ, რომ როცა ფასი $p = 60$, მაშინ მისი 1%-ით გაზრდა გამოიწვევს მოთხოვნის რაოდენობის დაახლოებით იმდენივე პროცენტით შემცირებას.

ელასტიკურობის დონეები.

ა) **ელასტიკური მოთხოვნა.** თუ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება რიცხობრივად აღემატება ფასის პროცენტულ ცვლილებას, ანუ $|E(p)| > 1$, ამბობენ რომ მოთხოვნა ელასტიკურია.

ბ) **არაელასტიკური მოთხოვნა.** თუ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება რიცხობრივად ნაკლებია ფასის პროცენტულ ცვლილებაზე, ანუ $|E(p)| < 1$, ამბობენ რომ მოთხოვნა არაელასტიკურია.

გ) **ერთეულოვანი ელასტიკურობა.** თუ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება რიცხობრივად უდრის ფასის პროცენტულ ცვლილებას, ანუ $|E(p)| = 1$, მაშინ ამბობენ, რომ მოთხოვნისთვის გვაქვს ერთეულოვანი ელასტიკურობა.

თუ დავუბრუნდებით **მაგალითი 17.6-ს**, დავასკვნით, რომ ბ)-ში გვაქვს ელასტიკური მოთხოვნა, ვინაიდან $|E(100)| = 5 > 1$, გ)-ში გვაქვს არაელასტიკური მოთხოვნა, ვინაიდან $|E(50)| = |-0.71| < 1$, ხოლო დ)-ში კი გვაქვს ერთეულოვანი ელასტიკურობა, რადგანაც $|E(60)| = |-1| = 1$.

მოთხოვნის ელასტიკურობის დონეები მნიშვნელოვან ინფორმაციას გვაძლევენ(რაც მარტივი დასამტკიცებელია) Q რაოდენობა საქონლის p ფასად რეალიზაციის შედეგად მიღებულ მთლიან ამონაგებზე.

ელასტიკურობის დონეების გავლენა (TR) მთლიან ამონაგებზე.
ა) თუ მოთხოვნა **ელასტიკურია** ($|E(p)| > 1$), მაშინ (TR) ფუნქცია p ფასის კლებადი ფუნქციაა, ანუ ფასის ზრდა იწვევს ამონაგების შემცირებას.
ბ) თუ მოთხოვნა **არაელასტიკურია**($|E(p)| < 1$), მაშინ (TR) ფუნქცია p ფასის ზრდადი ფუნქციაა, ანუ ფასის ზრდა იწვევს ამონაგების ზრდასაც.
გ) თუ მოთხოვნის ელასტიკურობა **ერთეულოვანია**($|E(p)| = 1$), მაშინ p ფასის მცირე ცვლილება თითქმის არ ცვლის (TR) ფუნქციას.

17.3 სავარჯიშოები

1. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = 40 - 2Q$, იპოვეთ Q-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მთლიანი ამონაგები არის მაქსიმალური.

2. ფიქსირებული დანახარჯი არის 100, ხოლო ცვლადი დანახარჯია $4Q$. ჩაწერეთ TC, AC და MC ფუნქციები. იპოვეთ Q-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც AC არის მინიმალური და დარწმუნდით, რომ ამ წერტილში $AC = MC$.

3. ფირმის წარმოების ფუნქციაა $P_L = Q$, სადაც $Q = 30L^2 - 0.5L^3$, L კი მუშახელის რაოდენობაა. იპოვეთ L-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც საშუალო წარმოება AP_L არის მაქსიმალური და დარწმუნდით, რომ ამ წერტილში $MP_L = AP_L$.

4. ქარხანაში დილის ცვლის(8:00-12:00 სთ) ეფექტურობის შესწავლა მიუთითებს იმაზე, რომ საშუალოსტატისტიკური მუშა, რომელიც იწყებს მუშაობას დილის 8 საათზე, t საათში აწარმოებს $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ რაოდენობის საქონელს. რომელ საათზე იქნება მუშის მწარმოებლურობა, ანუ შრომის ნაყოფიერება ყველაზე ეფექტური?

5. ქარხანაში დილის ცვლის(8:00-12:00 სთ) ეფექტურობის შესწავლა მიუთითებს იმაზე, რომ საშუალოსტატისტიკური მუშა, რომელიც იწყებს მუშაობას დილის 8 საათზე, t საათში აწარმოებს $Q(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 15t$ რაოდენობის საქონელს.

   ა) რომელ საათზე იქნება მუშის მწარმოებლურობა ყველაზე ეფექტური?

   ბ) რომელ საათზე იქნება მუშის მწარმოებლურობა მინიმალური?

6. მეწარმემ გამოთვალა, რომ ყოველთვიურად Q ათასი ერთეული ხორცსაკეპი მანქანის წარმოებისას მთლიანი დანახარჯი იქნება $TC(Q) = 0.4Q^2 + 3Q + 40$ ათასი ლარი, ხოლო Q ათასი რაოდენობის პროდუქციის გაყიდვისას გასაყიდი საცალო ფასი კი- $p(Q) = 22.2 - 1.2Q$ ლარი.

   ა) გამოთვალეთ წარმოების ის დონე, რომელიც იძლევა მაქსიმალურ მოგებას. რისი ტოლია ამ დროს მაქსიმალური მოგება?

   ბ) გამოთვალეთ წარმოების ის დონე, რომელზეც საშუალო დანახარჯი AC იქნება მინიმალური.

   გ) გამოთვალეთ წარმოების ის დონე, რომელზეც $AC = MC$.

7. ფირმის წარმოების ფუნქციაა $Q = 300L^2 - L^4$, სადაც L აღნიშნავს მუშახელის რაოდენობას. დაადგინეთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს საშუალო პროდუქტიულობის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. შეამოწმეთ ამ მნიშვნელობისთვის $AP_L = MP_L$ ტოლობა.

8. მოცემულია პროდუქტის მოთხოვნის განტოლება $p + 2Q = 20$. ამასთან სრული დანახარჯის ფუნქციაა $TC = Q^3 - 8Q^2 + 20Q + 2$.

   ა) პროდუქციის რა რაოდენობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური?;

   ბ) იპოვეთ მოგების მაქსიმალური მნიშვნელობა და Q-ს ის მნიშვნელობა, რომელშიც იგი მიიღწევა. დარწმუნდით, რომ Q-ს ამ მნიშვნელობისთვის $MR = MC$.

9. მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $TC = Q^2 + 3Q + 36$. იპოვეთ Q-ს ის რაოდენობა, რომლისთვისაც საშუალო ხარჯი იქნება მინიმალური. გამოთვალეთ AC და MC ამ რაოდენობისთვის. დააკვირდით მიღებულ მნიშვნელობებს.

10. მიწოდების ფუნქციაა $p = Q_S/2 + 25$, ხოლო მოთხოვნის- $p = -2Q_D + 50$. მთავრობამ გადაწყვიტა, შემოიღოს t გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. დაადგინეთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.

11. ფიქსირებული დანახარჯია 13, ცვლადი დანახარჯი- $Q + 2$. ჩაწერეთ საშუალო დანახარჯის ფუნქცია AC.

    ა) გამოთვალეთ AC ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა $Q \in \{1, 2, ..., 6\}$. მონიშნეთ ეს წერტილები AC ფუნქციის გრაფიკის ესკიზზე;

    ბ) გამოიყენეთ აგებული გრაფიკი საშუალო დანახარჯის ფუნქციის მინიმუმის შესაფასებლად;

    გ) გამოიყენეთ წარმოებული, რათა დარწმუნდეთ იმ შეფასების სამართლიანობაში, რომელიც მიიღეთ ბ) პუნქტში.

12. ელექტრული მოწყობილობების მწარმოებელმა კომპანიამ ახალი პროდუქტი წარმოადგინა 1 იანვარს. აღნიშნულ პროდუქტზე მთელი წლის განმავლობაში შეკვეთების S რაოდენობა გამოსვლიდან t დღეს განისაზღვრება $S = t^2 - 0.002t^3$ ფორმულით. გაარკვიეთ:

    ა) რა იქნება შეკვეთების მაქსიმალური რაოდენობა დღეში და რომელ დღეს იქნება იგი?

    ბ) გამოსვლიდან მერამდენე დღეს იქნება შეკვეთების ყველაზე სწრაფი ზრდა?

13. მოთხოვნის ფუნქციაა $p = \sqrt{1000 - 4Q}$. Q-ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური?

14. მოთხოვნისა და მთლიანი დანახარჯის ფუნქციებია, შესაბამისად, $4p + Q - 16 = 0$ და $TC = 4 + 2Q - \frac{3Q^2}{10} + \frac{Q^3}{20}$.

    ა) ჩაწერეთ TR, P, MR და MC ფუნქციები Q-ს ტერმინებში;

    ბ) იპოვეთ მოგების P ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი;

    გ) შეამოწმეთ, რომ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილში $MR = MC$.

15. პროდუქტის მიწოდებისა და მოთხოვნის ფუნქციებია, შესაბამისად, $3p - Q_S = 3$ და $2p + Q_D = 14$. მთავრობამ გადაწყვიტა, დააწესოს t ლარის ოდენობის გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. იპოვეთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომელიც უზრუნველყოფს სახელმწიფო გადასახადის მთლიანი ამონაგების მაქსიმუმს, იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.

16. გამოთვალეთ მოცემული მოთხოვნის $D(p)$ ფუნქციების ელასტიკურობა და განსაზღვრეთ, არის თუ არა მოთხოვნა ელასტიკური, არაელასტიკური ან ერთეულოვანი მითითებულ p ფასზე.

   ა) $D(p) = -1.3p + 10, \quad p = 4;$

   ბ) $D(p) = -1.5p + 25, \quad p = 12;$

   გ) $D(p) = 200 - p^2, \quad p = 10;$

   დ) $D(p) = \sqrt{400 - 0.01p^2}, \quad p = 120;$

17. წიგნების მაღაზიის მენეჯერმა გამოთვალა, რომ თუ ახალგამოცემული მაკროეკონომიკის ენციკლოპედიის საცალო ფასია p ლარი, მაშინ მასზე ყოველდღიური მოთხოვნაა(ანუ იყიდება) $Q = 300 - p^2$ ეგზემპლარი, სადაც $0 \leq p \leq \sqrt{300}$.

   ა) გამოთვალეთ, თუ როდის იქნება ფასის მიმართ მოთხოვნა ელასტიკური, არაელასტიკური და ერთეულოვანი.

   ბ) ა) პუნქტში მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით გაანალიზეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციის ყოფაქცევა ფასთან მიმართებაში.

18. როცა პროდუქტის ფასი p ლარია, მომხმარებლის მოთხოვნა მასზე შეადგენს q ერთეულს, სადაც p და q ერთმანეთთან დაკავშირებულია განტოლებით $q^2 + 3pq = 22$.

   ა) იპოვეთ ამ პროდუქტზე მოთხოვნის ელასტიკურობა;

   ბ) დაადგინეთ მოთხოვნის ელასტიკურობის ტიპი, როცა ფასი $p = 3$.

19. ავიაკომპანიამ განსაზღვრა, რომ თუ თბილისი-სტამბული-თბილისის ბილეთის ფასია p ლარი($0 \leq p \leq 160$), მაშინ ყოველდღიური მოთხოვნა ბილეთებზე არის $Q = 256 - 0.01p^2$.

   ა) იპოვეთ მოთხოვნის ელასტიკურობა. განსაზღვრეთ p ფასის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც მოთხოვნა იქნება ელასტიკური, არაელასტიკური და ერთეულოვანი.

   ბ) ა) პუნქტში მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით გაანალიზეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციის ყოფაქცევა ფასთან მიმართებაში.

   გ) ბილეთზე რა ფასის დაწესებას ურჩევდით ავიაკომპანიას? ახსენით თქვენი მოსაზრება.

ლექცია 18

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები. ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

18.1 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

ვთქვათ, $a > 0$ და $a \neq 1$. $f(x) = a^x$ სახის ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითი 18.1 *ვთქვათ,* $f(x) = 3^x$. *ვიპოვოთ*

ა) $f(5)$; *ბ)* $f\left(-\frac{2}{3}\right)$;

გ) $f(\pi)$; *დ)* $f\left(\sqrt{2}\right)$.

ამოხსნა.

ა) $f(5) = 3^5 = 243$;

ბ) $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3^{-2/3} \approx 0,4807$;

გ) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31,544$;

დ) $f\left(\sqrt{2}\right) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4,7288$.

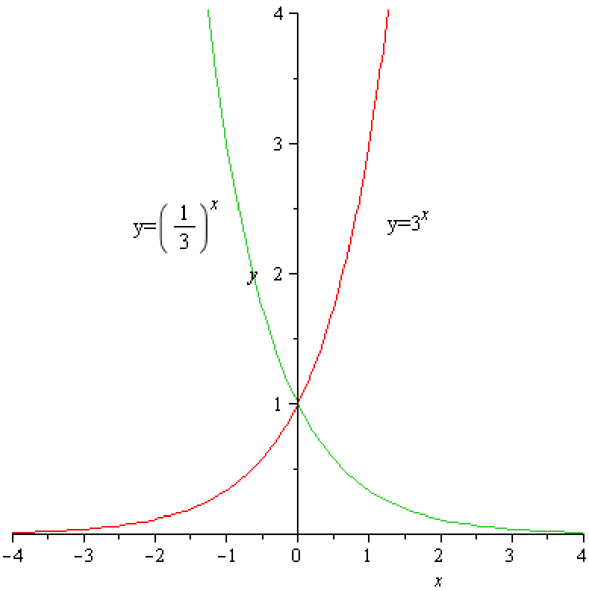
მაგალითი 18.2 *ავაგოთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:*

ა) $f(x) = 3^x$; *ბ)* $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

ამოხსნა. *შევადგინოთ ცხრილი:*

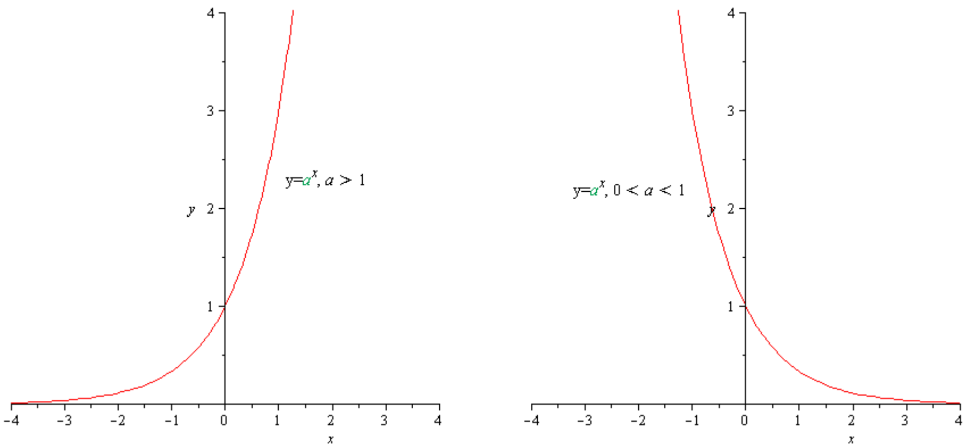
x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$1/27$	27
-2	$1/9$	9
-1	$1/3$	3
0	1	1
1	3	$1/3$
2	9	$1/9$
3	27	$1/27$

მიღებული მონაცემების საშუალებით აგებული შესაბამისი გრაფიკები მოცემულია სურ. 18.1-ზე.



სურ 18.1

საზოგადოდ, მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (იხ. სურათი 18.2):



სურ 18.2

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია. მივანიჭოთ n-ს სხვადასხვა მნიშვნელობა:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
5	$2,48832$
10	$2,59374$
100	$2,71692$
10000	$2,718115$
100000	$2,71827$
1000000	$2,71828$

როცა n–ის მნიშვნელობები უსასრულოდ იზრდება, მაშინ გამოსახულება

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

“მიისწრაფვის"კონკრეტული რიცხვისკენ და მას აღვნიშნავთ e სიმბოლოთი, ეს ფაქტი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{18.1}$$

e რიცხვს **ეილერის რიცხვს** უწოდებენ. ის ირაციონალური რიცხვია, ანუ წარმოადგენს უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$e \approx 2,72.$$

მაჩვენებლიან ფუნქციას e–ს ფუძით ექსპონენციალურ ფუნქციასაც უწოდებენ:

$$f(x) = e^x.$$

ვთქვათ, a არის 1–სგან განსხვავებული დადებითი რიცხვი. **ლოგარითმული ფუნქცია** ფუძით a განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x.$$

მოვიყვანოთ ლოგარითმული ფუნქციის რამდენიმე თვისება:

1) $\log_a 1 = 0;$
2) $\log_a a = 1;$
3) $\log_a a^x = x;$
4) $a^{\log_a x} = x.$

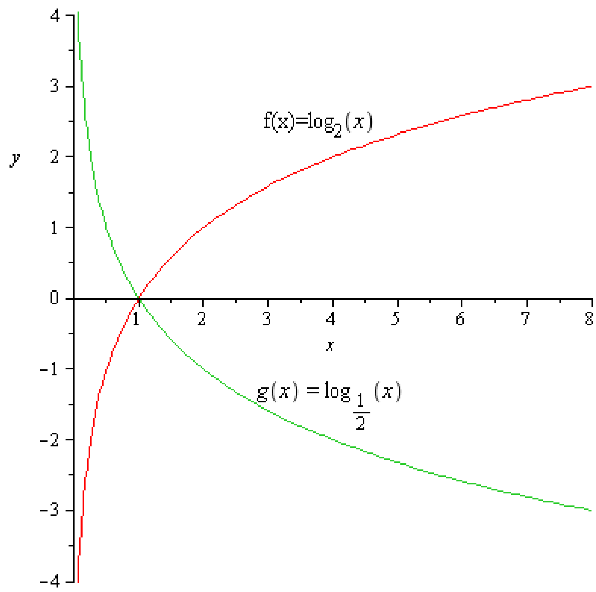
მაგალითი 18.3 *ავაგოთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:*

$$ა)\ f(x) = \log_2 x; \quad ბ)\ g(x) = \log_{1/2} x.$$

ამოხსნა. *შევადგინოთ ცხრილი:*

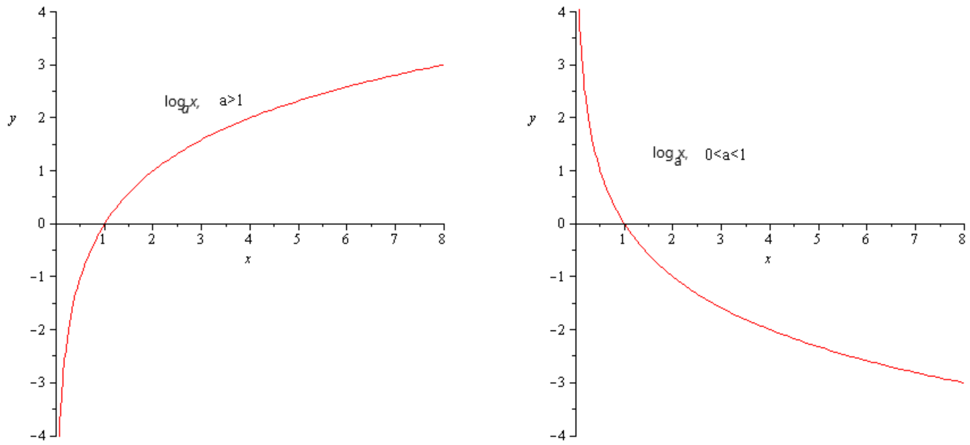
x	$\log_2 x$	$\log_{1/2} x$
2^3	3	-3
2^2	2	-2
2	1	-1
1	0	0
2^{-1}	-1	1
2^{-2}	-2	2
2^{-3}	-3	3
2^{-4}	-4	4

ამ მონაცემებით ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკები (იხ. სურ. 18.3).



სურ 18.3

საზოგადოდ, $\log_a x$ **ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (იხ. სურათი 18.4):**



(a) (b)

სურ 18.4

როცა ლოგარითმის ფუძე 10-ის ტოლია, მაშინ მას ათობითი ლოგარითმი ეწოდება და ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\log_{10} x = \lg x.$$

ასევე, ლოგარითმულ ფუნქციას ფუძით e, აღვნიშნავთ $\ln x$–ით და მას **ნატურალურ ლოგარითმს** ვუწოდებთ. ე. ი.

$$\log_e x = \ln x$$

მაგალითი 18.4 *განვითარებული ქვეყნების მოსახლეობაში მაცივრის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი t წლის შემდეგ მოდელირდება ფორმულით*

$$y = 100 - 95e^{-0,15t}.$$

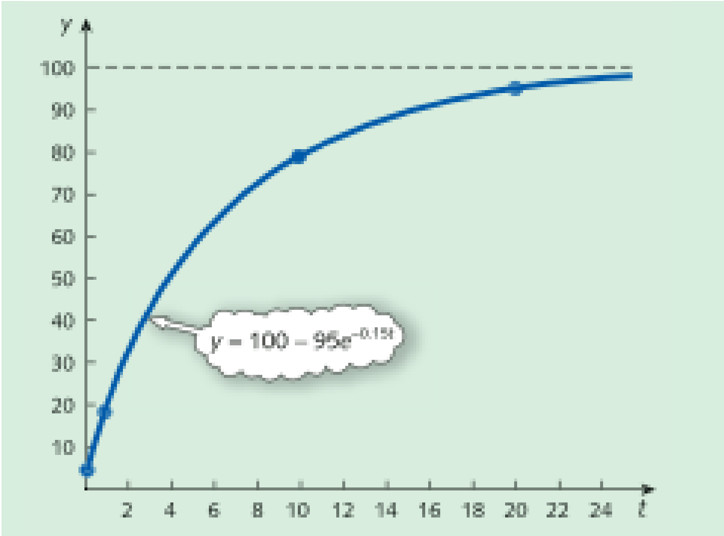
ვიპოვოთ მაცივრის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი:

ა) ერთი წლის შემდეგ;
ბ) 10 წლის შემდეგ;
გ) 20 წლის შემდეგ.

ამოხსნა.

ა) $y\,(1) = 100 - 95e^{-0,15} \approx 18(\%);\,;$
ბ) $y\,(10) = 100 - 95e^{-1,5} \approx 79(\%);$
გ) $y\,(20) = 100 - 95e^{-3} \approx 95(\%).$

შესაბამისი გრაფიკი იხილეთ სურ 18.5-ზე.



სურ 18.5

მაგალითი 18.5 *ვთქვათ, ქვეყნის მთლიანი შიდა პროდუქტის (მშპ) ზრდა t წლის განმავლობაში მოდელირდება ფორმულით*

$$GDP = 80e^{0,02t},$$

რამდენი წლის შემდეგ მიაღწევს მშპ 88 მილიარდ დოლარს?

ამოხსნა. *გვაქვს*

$$88 = 80e^{0,02t},$$

$$1,1 = e^{0,02t},$$

$$0,02t = \ln 1,1 \approx 0,09531...,$$

$$t = \frac{0,09531}{0,02} \approx 4,77 \text{ (წელი)}.$$

მაგალითი 18.6 *ქალაქის ცენტრიდან x კილომეტრით დაშორებისას მოსახლეობის სიმჭიდროვე ერთ კვადრატულ კილომეტრზე მოიცემა $Q(x) = Ae^{-kx}$ ფორმულით. ვიპოვოთ ეს ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ ქალაქის ცენტრში სიმჭიდროვე შეადგენს 15000 ადამიანს, ხოლო ცენტრიდან 10 კილომეტრის დაშორებისას კი- 9000 ადამიანს ერთ კმ^2-ზე.*

ამოხსნა. *ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $Q(0) = 15000$, ანუ $A = 15000$ და $Q(10) = 9000$. ეს ბოლო ფაქტი ნიშნავს შემდეგს:*

$$9000 = 15000e^{-10k},$$

ანუ,

$$\frac{3}{5} = e^{-10k}.$$

ტოლობის ორივე მხარის გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\ln\frac{3}{5} = -10k,$$

საიდანაც

$$k = -\frac{\ln 3/5}{10} \approx 0.051.$$

მამასადამე, მოსახლეობის სიმჭიდროვის ექსპონენციალურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$Q(x) = 15000e^{-0.051x}.$$

18.2 მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების წარმოებულები

$y = \boldsymbol{a}^{\mathbf{x}}$ და $y = \log_a \mathbf{x}$ ფუნქციების წარმოებულები, როცა $\boldsymbol{a} > 0, \boldsymbol{a} \neq 1$, შესაბამისად ტოლია:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$$

და

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $a = e$, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

და

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

მაგალითი 18.7 *გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქციები:*

ა) $f(x) = 5^{2x-3}$*;*

ბ) $g(x) = (x^2 + \ log_7 x)^4$.

ამოხსნა. *ორივე შემთხვევაში გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი. მივიღებთ:*

ა) $f'(x) = [(\ln 5)5^{2x-3}](2x-3)' = (\ln 5)5^{2x-3}(2);$

ბ) $g'(x) = 4\left(x^2 + \log_7 x\right)^3\left(x^2 + \log_7 x\right)' \ = 4\left(x^2 + \log_7 x\right)^3\left(2x + \dfrac{1}{x\ln 7}\right).$

18.3 ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, კრედიტორმა (მევალემ) გარკვეული დროით სესხად გასცა S რაოდენობის თანხა $r\%$-ად. დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ დებიტორი (მოვალე) ვალდებულია დაუბრუნოს კრედიტორს $r\%$–ით გაზრდილი თანხა, ანუ

$$S_1 = S + \frac{rS}{100}.$$

ზოგჯერ აწარმოებენ სარგებლის მრავალჯერად დარიცხვას. დარიცხვა ხდება დროის გარკვეული ინტერვალების გასვლის შემდეგ. როგორც წესი, ეს ინტერვალები კონკრეტული სესხისათვის ერთი და იგივეა და მათ **დარიცხვის პერიოდს** უწოდებენ. დარიცხვის პერიოდი შეიძლება იყოს წელი, ნახევარი წელი, თვე და ა. შ. დადებული ხელშეკრულების თანახმად, სარგებლის განაკვეთით გათვალისწინებულ თანხას უხდიან მევალეს, ან უმატებენ ვალს. ორივე შემთხვევაში ხდება საკრედიტო ფულადი თანხის გაზრდა. ამ პროცესს საწყისი თანხის ზრდა ეწოდება. თუ ცნობილია სარგებლის დარიცხვის წესი, მაშინ დროის ნებისმიერი t პერიოდისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ შესაბამისი თანხის რაოდენობა. ამ თანხას **მიმდინარე თანხას** უწოდებენ, იმ თანხას კი, რომელიც შეესაბამება საკრედიტო ვადის ბოლოს დაგროვილ თანხას, **საბოლოო თანხა**.

არსებობს სარგებლის დარიცხვის რამდენიმე განსხვავებული წესი. დარიცხვის ფორმებს შორის ძირითადი განსხვავება განპირობებულია იმით, თუ რომელი თანხიდან იანგარიშება სარგებლის განაკვეთი. თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი $r\%$ –იანი სარგებელი იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან, მაშინ ვამბობთ, რომ საქმე გვაქვს სარგებლის მარტივ განაკვეთთან ან კრედიტი გაცემულია მარტივი $r\%$ –იანი განაკვეთით. თუ დარიცხვის ყოველ პერიოდში დასარიცხი $r\%$ –იანი სარგებელი მიმდინარე თანხიდან იანგარიშება, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის რთულ განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში კი ვიტყვით, რომ სესხი გაცემულია სარგებლის რთული $r\%$ –იანი განაკვეთით.

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება სარგებლის მარტივი განაკვეთით დაბანდებული თანხის რაოდენობა საკრედიტო ვადის ბოლოს.

ვთქვათ, გაცემულია S ლარის რაოდენობის კრედიტი n პერიოდის ხანგრძლივობით. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ პერიოდში დარიცხვა ხდება მარტივი $r\%$ –იანი განაკვეთით. მაშინ, როგორც ვიცით

$$S_1 = S + \frac{rS}{100}$$

და, მაშასადამე, პირველი პერიოდის ბოლოს გვექნება S_1 თანხა. მეორე პერიოდის ბოლოს კი -

$$S_2 = S_1 + \frac{rS}{100} = S + 2S\frac{r}{100}$$

და ასე შემდეგ, n პერიოდის ბოლოს გვექნება:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{rS}{100} = S + nS\frac{r}{100}$$

ამგვარად მივიღეთ, ფორმულა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მარტივი დარიცხვის შემთხვევაში გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა

$$S_n = S\left(1 + n \cdot \frac{r}{100}\right). \tag{18.2}$$

ზოგჯერ საჭიროა საბოლოო თანხის საშუალებით საწყისი თანხის პოვნა. ამ პროცესს **დისკონტირება** ეწოდება. მარტივი დარიცხვის შემთხვევაში დისკონტირების ფორმულას ექნება სახე:

$$S = \frac{S_n}{1 + n \cdot \frac{r}{100}}. \tag{18.3}$$

ვთქვათ, ახლა მეანაბრემ ბანკში შეიტანა A ლარი სარგებლის წლიური რთული $r\%$ განაკვეთით. გამოვთვალოთ, რა თანხა დაუგროვდება მას n წლის შემდეგ: ამოცანის პირობის თანახმად, 1 წლის შემდეგ მეანაბრეს ანგარიშზე ექნება შემდეგი თანხა

$$A_1 = A + A \cdot \frac{r}{100} = A\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

2 წლის შემდეგ კი–

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + A_1 \cdot \frac{r}{100} \\ &= A_1\left(1 + \frac{r}{100}\right) \\ &= A\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ, რომ n წლის შემდეგ მეანაბრეს ანგარიშზე ექნება შემდეგი თანხა

$$A_n = A\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n. \tag{18.4}$$

ამ ფორმულას ეწოდება დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის წლიური რთული განაკვეთის შემთხვევაში. A აღნიშნავს საწყის თანხას, ხოლო A_n - საბოლოო თანხას.

დისკონტირების ფორმულას რთული დარიცხვისას ექნება სახე:

$$A = \frac{A_n}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}. \tag{18.5}$$

მაგალითი 18.8 10000 *ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური რთული* 10%*–იანი განაკვეთით. ვიპოვოთ საბოლოო თანხა 5 წლის შემდეგ.*

ამოხსნა. *(18.4) ფორმულის თანახმად გვექნება:*

$$\begin{aligned} A_5 &= 10000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 10000 \cdot 1.61051 = \\ &= 16105.1 \text{ ლარი}. \end{aligned}$$

განვიხილოთ იგივე ამოცანა მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში:

მაგალითი 18.9 10000 *ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური მარტივი* 10%*–იანი განაკვეთით. ვიპოვოთ საბოლოო თანხა 5 წლის შემდეგ.*

ამოხსნა. *(18.2) ფორმულის თანახმად*

$$\begin{aligned} S_5 &= 10000\left(1+\frac{5\cdot 10}{100}\right) = 10000\cdot 1.5 = \\ &= 15000 \text{ ლარი }. \end{aligned}$$

მაგალითი 18.10 *ერთი ბანკი სთავაზობს მეანაბრეებს ერთი წლის განმავლობაში სარგებლის რთულ თვიურ* 2%*-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი– სარგებლის მარტივ თვიურ* $2,1\%$*–იან დარიცხვას. რომელ ბანკში უფრო ხელსაყრელია მეანაბრისთვის 10000 ლარის შეტანა?*

ამოხსნა. *ცხადია, ამ შემთხვევაში დარიცხვის პერიოდი* $n=12$*. რთული პროცენტის შემთხვევაში ფორმულა (18.4)–დან გვექნება:*

$$A_{12} = 10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{12} \approx 12682.$$

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში კი ფორმულა (18.2)–ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$S_{12} = 10000\left(1+\frac{2.1\cdot 12}{100}\right) = 12520.$$

როგორც ვხედავთ, $A_{12} > S_{12}$*. მაშასადამე, მეანაბრისთვის უფრო ხელსაყრელია პირველ ბანკში თანხის შეტანა.*

სარგებლის წლიური რთული ნომინალური განაკვეთი. ვთქვათ, p რაოდენობის თანხა დაბანდებულია t წლით სარგებლის წლიური რთული r პროცენტიანი განაკვეთით. დავუშვათ, დარიცხვა ხდება წელიწადში k-ჯერ. მაშინ t წელიწადში დაგროვილი $B(t)$ თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$$B(t) = p\left(1 + \frac{r}{k100}\right)^{kt}. \tag{18.6}$$

უწყვეტი დარიცხვა. საფინანსო პრაქტიკაში ზოგჯერ სარგებლის დარიცხვა ხდება ანაბრის ან სესხის ვადის განმავლობაში დროის ყოველ მომენტში, ანუ უწყვეტად. ასეთი ტიპის დარიცხვას უწყვეტი დარიცხვა ეწოდება. ამ შემთხვევაში საბოლოო თანხის გამოსათვლელად, ცხადია, (18.6) ფორმულაში მოცემული k პარამეტრი(ანუ, წელიწადში დარიცხვების რაოდენობა) უნდა მივასწრაფოთ უსასრულობისკენ. (18.1) ფორმულიდან მარტივად მტკიცდება, რომ უწყვეტი დარიცხვისას დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით

$$B(t) = pe^{\frac{rt}{100}}. \tag{18.7}$$

მაგალითი 18.11 *ვთქვათ, 1000 ლარი ინვესტირებულია 10 წლით სარგებლის წლიური რთული ნომინალური 6%-იანი განაკვეთით. ვიპოვოთ დაგროვილი თანხა, თუ დარიცხვა ხდება:*

ა) ყოველკვარტალურად;
ბ) ყოველთვიურად;
გ) ყოველდღიურად;
დ) უწყვეტად.

ამოხსნა. *ა) გამოვიყენოთ (18.6) ფორმულა. ცხადია, აქ $k = 4$, ვინაიდან დარიცხვა ხდება ყოველკვარტალურად, ანუ, წელიწადში 4-ჯერ. ასევე, $p = 1000, r = 6, t = 10$. მივიღებთ:*

$$B(10) = 1000\left(1 + \frac{6}{400}\right)^{40} \approx 1814.02$$

ბ) ამ შემთხვევაში $p = 1000, r = 6, t = 10, k = 12$. გვექნება:

$$B(10) = 1000\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{120} \approx 1819.40$$

გ) აქ $p = 1000, r = 6, t = 10, k = 365$. მივიღებთ:

$$B(10) = 1000\left(1 + \frac{6}{36500}\right)^{3650} \approx 1822.03$$

დ) უწყვეტი დარიცხვისას გამოვიყენოთ (18.7) ფორმულა, რომელშიც $p = 1000, r = 6, t = 10$. მივიღებთ:

$$B(10) = 1000e^{\frac{60}{100}} \approx 1822.12$$

ცხადია, 1822.12 ლარი წარმოადგენს 6%-იანი განაკვეთის შემთხვევაში ნებისმიერი ტიპის დარიცხვისას 1000 ლარიდან 10 წელიწადში დასაგროვებელი თანხის მაქსიმალურ ოდენობას.

ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი. ვთქვათ, r არის წლიური რთული ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი. მაშინ, შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი ეწოდება ისეთ მარტივ წლიურ საპროცენტო $r_{\text{ეფ}}$ განაკვეთს , რომელიც 1 წლის შემდეგ იძლევა იგივე პროცენტულ მატებას რასაც r. თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში k-ჯერ. ადვილად მტკიცდება, რომ ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი გამოითვლება ფორმულით:

$$r_{\text{ეფ}} = 100\left((1+\frac{r}{100k})^k - 1\right) \tag{18.8}$$

უწყვეტი დარიცხვისას კი -

$$r_{\text{ეფ}} = 100\left(e^{\frac{r}{100}} - 1\right) \tag{18.9}$$

მაგალითი 18.12 *მეანაბრისთვის რომელი სახის ინვესტიცია იქნება ყველაზე მომგებიანი?*

ა) წლიური რთული 10%-იანი განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვით;

ბ) წლიური რთული 9.95%-იანი განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვით;

გ) 9.9%-იანი უწყვეტი დარიცხვით.

ამოხსნა. *ამოცანის კითხვაზე პასუხის გასაცემად შევადაროთ ერთმანეთს სამივე ნომინალური განაკვეთის შესაბამისი ეფექტური განაკვეთები.*

ა) $r = 10\%$, $k = 4$ და

$$\frac{r}{100k} = \frac{0.1}{4} = 0.025.$$

ჩავსვათ ეს მონაცემები (18.8) ფორმულაში. მივიღებთ:

$$r^{(1)}_{\text{ეფ}} = 100\left((1+0.025)^4 - 1\right) = 100 \cdot 0.10381 \approx 10.38(\%).$$

ბ) $r = 9.95\%$, $k = 12$ და

$$\frac{r}{100k} = \frac{0.0995}{12} = 0.008292.$$

მაშინ (18.8) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$r^{(2)}_{\text{ეფ}} = 100\left((1+0.008292)^{12} - 1\right) = 100 \cdot 0.10417 \approx 10.42(\%).$$

გ) (18.9) ფორმულის გამოყენებით გვექნება, რომ

$$r^{(3)}_{\text{ეფ}} = 100\left(e^{0.099} - 1\right) = 100 \cdot 0.10407 \approx 10.41(\%).$$

მაშასადამე, ჩატარებული გამოთვლებიდან ჩანს, რომ მეანაბრისთვის ყველაზე ხელსაყრელია ყოველთვიური დარიცხვით წლიური 9.95%-იანი ინვესტიციის განხორციელება.

18.4 სავარჯიშოები:

1. t წლის შემდეგ მოსახლეობაში ვიდეოკამერის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი მოდელირდება ფორმულით

$$y = \frac{55}{1+800e^{-0,3t}}.$$

იპოვეთ ვიდეოკამერის მფლობელთა პროცენტული მაჩვენებელი

ა) 10 წლის შემდეგ;

ბ) 20 წლის შემდეგ;

გ) 30 წლის შემდეგ.

2. ფირმის შემოსავალი-TR(მილიონ ლარებში) t წლის შემდეგ მოდელირდება ფორმულით :

$$TR = 5e^{-0,15t}.$$

იპოვეთ:

ა) მიმდინარე შემოსავალი;

ბ) რამდენი წლის შემდეგ გახდება ფირმის შემოსავალი 2,7 მილიონი ლარი?

3. გააწარმოეთ მოცემული ფუნქციები

ა) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$;

ბ) $f(x) = (x^2+3x+5)\, e^{6x}$;

გ) $f(x) = xe^{-x^2}$;

დ) $f(x) = (1-3e^x)^2$;

ე) $f(x) = \sqrt{1+e^x}$;

ვ) $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$;

ზ) $f(x) = e^{1/x}$;

თ) $f(x) = \ln x^3$;

ი) $f(x) = \ln 2x$;

კ) $f(x) = x^2 \ln x$;

ლ) $f(x) = x \ln \sqrt{x}$;

მ) $f(x) = \sqrt[3]{e^{2x}}$;

ნ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

4. მენეჯერის შეფასებით, თუ მის ფირმაში დასაქმებული იქნება x ათასი ადამიანი, მაშინ ფირმის მოგება (მილიონ ლარებში) გამოისახება შემდეგი $P(x)$ ფუნქციის საშუალებით:

$$P(x) = \ln(4x+1) + 3x - x^2.$$

დასაქმებულთა რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და რისი ტოლია ის?

5. ფირმამ წლიური გაყიდვების მოცულობა წინა წელთან შედარებით გაზარდა 50 000– დან 55 000– მდე. გამოსახეთ ეს ზრდა პროცენტობით.

6. მარტვილის კანიონზე ვიზიტორთა რაოდენობა ერთ წელიწადში 24 000 -დან გაიზარდა 36 000-მდე. გამოსახეთ ეს ზრდა პროცენტობით.

7. ტურისტულ ფირმას დაგეგმილი ჰქონდა ზაფხულის სეზონის განმავლობაში მომსახურებოდა 800 ტურისტს. ფირმამ გეგმა შეასრულა 110%-ით. რამდენ ტურისტს მომსახურებია ფირმა?

8. საშემოსავლო გადასახადი შეადგენს 20%-ს. რამდენი ლარით დაიბეგრება მოსამსახურე, თუ მისი დარიცხული ხელფასი შეადგენს 1360 ლარს.

9. ინფლაციის(ანუ ფასების ზრდის) წლიური მაჩვენებელი შეადგენს 4%–ს. რა ეღირება საქონელი წლის ბოლოს, თუ წლის დასაწყისში მისი ფასი იყო 25 ლარი.

10. პროდუქტზე დამატებითი ღირებულების გადასახადი(დ.ღ.გ.) შეადგენს 18%–ს. თუ პროდუქტის სარეალიზაციო ფასია 800 ლარი, რა ეღირება ეს პროდუქტი დ.ღ.გ.–ს გარეშე?

11. ავტომანქანის ფასი წლის განმავლობაში შემცირდა ორჯერ: პირველად 5%-ით, ხოლო შემდეგ 9%-ით. საბოლოოდ რამდენი პროცენტით შემცირდა ავტომანქანის ფასი?

12. საერთაშორისო ბაზარზე ერთი უნცია ოქროს ფასი შეიცვალა ორჯერ: პირველად გაიზარდა 7%-ით, ხოლო შემდეგ დაიკლო 11%-ით. საბოლოოდ, რამდენი პროცენტით შეიცვალა ოქროს ფასი?

13. რესტორანში შესვლისათვის თითო კაცზე ფიქსირებული გადასახადია 20 ლარი. მომსახურებისთვის გადასახადი კი შეადგენს დანახარჯის 9%-ს. ხუთმა მეგობარმა გადაწყვიტა ივახშმოს რესტორანში. რა თანხა შეუძლიათ დახარჯონ მეგობრებმა სავახშმოდ, თუ მათ აქვთ მხოლოდ 500 ლარი?

14. 12 000 ლარი დაბანდებულია 6 წლით წლიური რთული 7%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა.

15. 14 000 ლარი გაცემულია სესხად 12 წლით წლიური რთული 8%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხის რაოდენობა.

16. მეანაბრემ ბანკში დააბანდა 16 000 ლარი 8 წლით სარგებლის წლიური მარტივი 12%-იანი განაკვეთით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი მეანაბრეს?

17. რა რაოდენობის კრედიტი აიღო მოვალემ, თუ კრედიტი გაცემული იყო 15 წლით სარგებლის მარტივი წლიური 8%-იანი განაკვეთით და ვადის გასვლის შემდეგ მან დააბრუნა 83 000 ლარი?

18. სარგებლის მარტივი წლიური საპროცენტო განაკვეთით დაბანდებული 11 000 ლარი 6 წლის შემდეგ გახდა 15 620 ლარი. იპოვეთ სარგებლის განაკვეთი.

19. რა თანხა დაუბანდებიათ ბანკში სარგებლის წლიური რთული 5%-იანი განაკვეთით, თუ 6 წლის შემდეგ დაგროვილმა თანხამ შეადგინა 12 500 ლარი.

20. 25 000 ლარი დაბანდებულია სესხად სარგებლის წლიური რთული 12%-იანი განაკვეთით. რამდენი წლის შემდეგ გახდება ეს თანხა 250 000 ლარის ტოლი?

21. გამოთვალეთ, რა თანხა უნდა შეიტანოთ ბანკში სარგებლის წლიური რთული 5%-იანი განაკვეთით, რომ 7 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა შეადგენდეს 32 500 ლარს?

22. იპოვეთ სარგებლის წლიური რთული 10%-იანი განაკვეთის შესაბამისი მარტივი განაკვეთი იმ პირობით, რომ ერთი და იმავე საწყისი თანხიდან 5 წელიწადში დაგროვილი თანხები იყოს ტოლი.

23. 14000 ლარი დაბანდებულია 3 წლით სარგებლის წლიური რთული ნომინალური 12%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა, თუ დარიცხვა ხდება:

    ა) ყოველ ნახევარ წელიწადში ერთხელ;

    ბ) ყოველ კვარტალში ერთხელ;

    გ) ყოველთვიურად.

24. რა დრო დასჭირდება წლიური 8%-იანი უწყვეტი დარიცხვით დაბანდებული 1000 ლარის გაორმაგებას? შეიცვლება თუ არა გაორმაგების დრო, როცა საწყისი 1000 ლარის ნაცვლად ავიღებთ სხვა თანხას?

25. რა დრო დასჭირდება დაბანდებული 5000 ლარის 7000 ლარამდე გაზრდას, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს 6%-ს და დარიცხვა ხდება:

    ა) კვარტალურად;

    ბ) უწყვეტად.

26. ერთი ბანკი სთავაზობს კლიენტებს ერთი წლის განმავლობაში ანაბრებზე სარგებლის ყოველთვიურ რთულ 3%-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი სარგებლის მარტივ ყოველთვიურ 3.1%-იან დარიცხვას. რომელ ბანკში უფრო ხელსაყრელია თანხის შეტანა?

27. იპოვეთ ყოველკვარტალური დარიცხვისას წლიური რთული ნომინალური 12%-იანი განაკვეთის შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი.

28. წელიწადში ნომინალური განაკვეთია 10%, ხოლო დარიცხვა ხდება ორჯერ. იპოვეთ შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი.

29. წელიწადში უწყვეტი ნომინალური დარიცხვის განაკვეთია 10%. იპოვეთ შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი წელიწადში.

30. ერთი ბანკი ანაბრებს იღებს სარგებლის წლიური რთული 12%-იანი განაკვეთით, მეორე- წლიური რთული 6%-ით ნახევარწლიანი დარიცხვით , მესამე- წლიური რთული 4%-ით ყოველკვარტალური დარიცხვით , მეოთხე- წლიური რთული 1%-ით ყოველთვიური დარიცხვით. რომელ ბანკში სჯობს ფულის დაბანდება?

ლექცია 19

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

19.1 პირველადი ფუნქციის ცნება

როგორ შეიძლება გამოყენებულ იქნას ინფლაციის ტემპის ცოდნა სამომავლოდ ფასების დასადგენად? რა არის იმ ობიექტის სიჩქარე, რომელიც მოძრაობს წრფივად ცნობილი აჩქარებით? როგორ შეიძლება პოპულაციის ცვლილების სიჩქარის ცოდნით მოსახლეობის მომავალი დონის პროგნოზირება? ყველა ამ სიტუაციაში ცნობილია კონკრეტული სიდიდის წარმოებული(ცვლილების სიჩქარე) და საჭიროა თვითონ ამ სიდიდის პოვნა. ასეთი ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად შემოვიღოთ **პირველადი ფუნქციის** ცნება.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი(ანუ პირველყოფილი) ფუნქცია, თუ

$$F'(x) = f(x)$$

ყოველი x-სთვის $f(x)$-ის განსაზღვრის არედან.

მაგალითი 19.1 *ვაჩვენოთ, რომ* $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x + 2$ *წარმოადგენს* $f(x) = x^2 + 5$ *ფუნქციის პირველადს.*

ამოხსნა. *პირველადი ფუნქციის განსაზღვრების თანახმად, უნდა ვაჩვენოთ, რომ* $F'(x) = f(x)$. $F(x)$*-ის გაწარმოებით მივიღებთ:*

$$F'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2\right) + 5 = x^2 + 5.$$

როგორც ვხედავთ, მართლაც, $F'(x) = f(x)$.

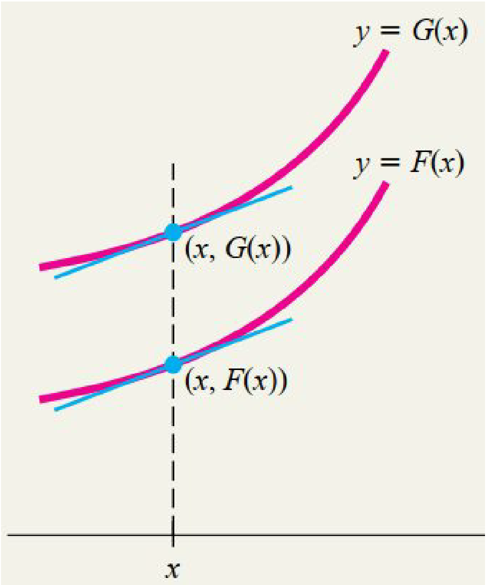
შევნიშნოთ, რომ თუ ფუნქციას გააჩნია ერთი პირველადი მაინც, მაშინ მას გააჩნია პირველადთა უსასრულო რაოდენობა. მაგალითად, $f(x) = 3x^2$ ფუნქციის პირველადია $F(x) = x^3$, რადგანაც $F'(x) = 3x^2 = f(x)$, მაგრამ მისი პირველადები იქნება ასევე $x^3 + 13$, $x^3 - 6$ და $x^3 + \pi$ ფუნქციებიც, ვინაიდან

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + 13\right) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6\right) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\left(x^3 + \pi\right) = 3x^2.$$

მტკიცდება, რომ შუალედზე უწყვეტ ნებისმიერ ფუნქციას გააჩნია პირველადი. საზოგადოდ, სამართლიანია პირველადის შემდეგი ფუნდამენტური თვისება:

თუ $F(x)$ ფუნქცია არის რაიმე შუალედზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის პირველადი, მაშინ ყველა $G(x) = F(x) + C$ სახის ფუნქციაც (C ნებისმიერი მუდმივია) ასევე იქნება $f(x)$-ის პირველადი, და პირიქით - $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერ პირველადს აქვს $F(x) + C$ სახე.

ცხადია, ამ თვისების პირველი ნაწილის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია შემდეგია: ვინაიდან $G'(x) = F'(x) = f(x)$, ამიტომ $y = F(x)$ წირის $(x, F(x))$ წერტილსა და $y = G(x)$ წირის $(x, G(x))$ წერტილზე გავლებული მხები წრფეები ურთიერთპარალელურია(სურ.19.1).



სურ 19.1

უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველად ფუნქციათა სიმრავლეს ეწოდება $f(x)$-ის **განუსაზღვრელი ინტეგრალი** და იგი აღინიშნება $\int f(x)dx$ სიმბოლოთი. მაშასადამე,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

სადაც $F(x)$ არის $f(x)$-ის ერთ-ერთი პირველადი ფუნქცია , ხოლო C ნებისმიერი მუდმივია.

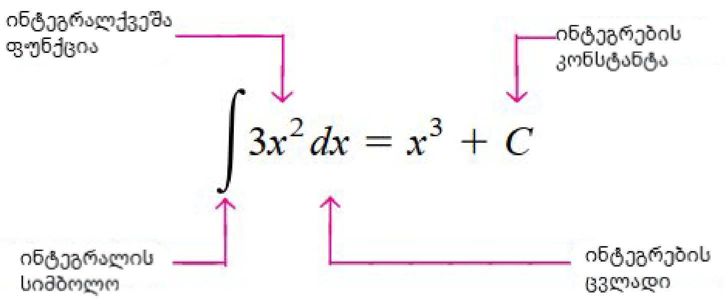
ინტეგრალი არის "განუსაზღვრელი " , რადგან იგი შეიცავს მუდმივ C- ს, რომელსაც შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა.

$\int f(x)dx$ ჩანაწერში $f(x)$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, $f(x)dx$-ს- ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, ხოლო dx-ს-არგუმენტის დიფერენციალი(სურ. 19.2).

ცხადია, ნებისმიერი წარმოებადი F ფუნქციისთვის გვექნება

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

ვინაიდან, განსაზღვრების ძალით, $F(x)$ არის $F'(x)$-ის პირველადი.



სურ 19.2

ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის ინტეგრალი

1. $\int kdx = kx + C,$ ნებისმიერი k მუდმივისთვის;

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ ნებისმიერი $n \neq -1;$

3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$ ნებისმიერი $x \neq 0;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ ნებისმიერი $a > 0$ და $a \neq 1;$

5. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$ ნებისმიერი $k \neq 0;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

მაგალითი 19.2 *გამოვთვალოთ ინტეგრალები:*

ა) $\int 3dx;$

ბ) $\int x^{17}dx;$

გ) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx;$

დ) $\int e^{-3x}dx.$

ამოხსნა.

ა) $\int 3dx = 3\int dx = 3x + C;$

ბ) $\int x^{17}dx = \frac{1}{18}x^{18} + C;$

გ) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}dx = \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C;$

დ) $\int e^{-3x}dx = \frac{1}{-3}e^{-3x} + C.$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

1. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad \text{სადაც} \quad k = const;$$

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალი ორი ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან უდრის მოცემული ფუნქციებიდან ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

ეს თვისება მართებულია აგრეთვე შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

მაგალითი 19.3 *გამოვთვალოთ ინტეგრალები:*

ა) $\int \left(2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5\right) dx$;

ბ) $\int \left(\frac{x^3+2x-7}{x}\right) dx$;

გ) $\int \left(3e^{-5t} + \sqrt{t}\right) dt$.

ამოხსნა. *მოცემული ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ინტეგრალის თვისებები.*

ა)

$$\int \left(2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5\right) dx = 2\int x^5 dx + 8\int x^3 dx - 3\int x^2 dx + \int 5dx =$$
$$= 2\left(\frac{x^6}{6}\right) + 8\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5x + C =$$
$$= \frac{1}{3}x^6 + 2x^4 - x^3 + 5x + C.$$

ბ)

$$\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x}\right) dx = \int \left(x^2 + 2 - \frac{7}{x}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x - 7\ln|x| + C.$$

გ)

$$\int \left(3e^{-5t} + \sqrt{t}\right) dt = \int \left(3e^{-5t} + t^{1/2}\right) dt =$$
$$= 3\left(\frac{1}{-5}e^{-5t}\right) + \frac{1}{3/2}t^{3/2} + C = -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C.$$

მაგალითი 19.4 *ფირმამ დაადგინა, რომ მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის q ერთეულის საწარმოებლად არის $3q^2 - 60q + 400$ ლარი. გავიგოთ, რამდენი დაიხარჯება პირველი 5 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი 2 ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 900 ლარი.*

ამოხსნა. *ვთქვათ, მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $TC(q) = C(q)$, მაშინ მარგინალური დანახარჯი იქნება $MC(q) = C'(q)$. მამასადამე,*

$$\frac{dC}{dq} = 3q^2 - 60q + 400.$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ ტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ

$$C(q) = \int \frac{dC}{dq} dq = \int \left(3q^2 - 60q + 400\right) dq = q^3 - 30q^2 + 400q + K.$$

ნებისმიერი K მუდმივის განსაზღვრა შეიძლება ამოცანის იმ პირობით, რომ $C(2) = 900$. კერძოდ,

$$900 = 2^3 - 30(2)^2 + 400(2) + K,$$

საიდანაც $K = 212$. ამრიგად,

$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212.$$

მამასადამე, პირველი 5 ერთეულის წარმოებისას დანახარჯი იქნება

$$C(5) = 5^3 - 305^2 + 400(5) + 212 = 1587 \quad \text{(ლარი)}.$$

19.2 განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის წესები

1) **ჩასმის წესი.** ზოგიერთ შემთხვევაში განუსაზღვრელი ინტეგრალი შესაძლებელია გავამარტივოთ ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით.

თუ $\int f(x)dx$ ინტეგრალში დავუშვებთ, რომ $x = g(t)$, სადაც t არის ახალი ცვლადი, ხოლო $g(t)$- უწყვეტად წარმოებადი შექცევადი ფუნქცია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $g(t)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, ხოლო $g(t)$-ს წარმოებული უწყვეტია, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

ამ ფორმულის გამოყენებისას იგულისხმება, რომ უნდა დავუბრუნდეთ საწყის ცვლადს და t-ს ნაცვლად შევიტანოთ $t = \phi(x)$ ფუნქცია, რომელიც მიიღება $x = g(t)$ განტოლების ამოხსნით t ცვლადის მიმართ(ანუ, ϕ არის g-ს შექცეული ფუნქცია).

ეს ფორმულა გვეუბნება, რომ განუსაზღვრელი ინტეგრალის აღნიშვნაში მონაწილე dx სიმბოლოს შეგვიძლია ვუყუროთ როგორც დიფერენციალს.

მაგალითი 19.5 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი:*

$$\int \sqrt{2x+7}dx.$$

ამოხსნა. *შემოვიღოთ ჩასმა* $t = 2x + 7$. *გვექნება* $dt = 2dx$, *საიდანაც* $dx = \frac{1}{2}dt$. *მაშინ ჩვენი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+7}dx &= \int \sqrt{t}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \\ &= \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = \\ &= \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}t^{3/2} + C = \\ &= \frac{1}{3}(2x+7)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

მაგალითი 19.6 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი:*

$$\int x^3 e^{x^4+2}dx.$$

ამოხსნა. *შემოვიღოთ ჩასმა* $t = x^4 + 2$. *აქედან* $dt = 4x^3dx$ *და*

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^4+2}dx &= \int e^{x^4+2}\left(x^3dx\right) = \\ &= \int e^t\left(\frac{1}{4}dt\right) = \\ &= \frac{1}{4}e^t + C = \\ &= \frac{1}{4}e^{x^4+2} + C.\end{aligned}$$

2) **ნაწილობითი ინტეგრების წესი.** ვთქვათ, $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად გვაქვს $(uv)' = u'v + uv'$, ანუ $uv' = (uv)' - u'v$. ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx.$$

აქედან

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx,$$

ანუ,

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{19.1}$$

(19.1) ტოლობას ეწოდება **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა** . მისი გამოყენებით ერთი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება მეორე განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს, ვიდრე პირველი.

მაგალითი 19.7 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი*

$$\int \ln x dx.$$

ამოხსნა. *გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების (19.1) ფორმულა. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:* $u = \ln x$ *და* $dv = dx$*. აქედან გვექნება, რომ* $du = \frac{1}{x}dx$ *და* $v = x$*. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ, რომ*

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x \ln x - x + C.$$

მაგალითი 19.8 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი*

$$\int xe^x dx.$$

ამოხსნა. $e^x dx$ *ჩავწეროთ როგორც* de^x*, შემდეგ კი გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების (19.1) ფორმულა. გვექნება:*

$$\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

19.3 სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ ინტეგრალები

   ა) $\int -3dx$;

   ბ) $\int dx$;

   გ) $\int x^5 dx$;

   დ) $\int \sqrt{t}dt$;

   ე) $\int \frac{1}{x^2}dx$;

   ვ) $\int 3e^x dx$;

ზ) $\int \frac{2}{\sqrt{t}} dt$;

თ) $\int x^{-0.3} dx$;

ი) $\int u^{-2/5} du$.

2. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ისეთი პირველადი ფუნქცია, რომლის გრაფიკზეც ძევს $A = A(x_0, y_0)$ წერტილი

ა) $f(x) = 2$, $A = A(1, 2)$;

ბ) $f(x) = 2x - 1$, $A = A(0, 1)$;

გ) $f(x) = e^x$, $A = A(0, 5)$;

დ) $f(x) = \frac{2}{x}$, $A = A(1, 8)$;

3. შეარჩიეთ k პარამეტრის მნიშვნელობა ისეთნაირად, რომ $g(x) = (k^2-1)x^2+x-1$ წარმოადგენდეს $f(x) = 2x + 1$ ფუნქციის პირველად ფუნქციას.

4. გამოთვალეთ ინტეგრალები

ა) $\int \left(3\sqrt{y} - 2y^{-3}\right) dy$;

ბ) $\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{3}{\sqrt{y}}\right) dy$;

გ) $\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}\right) dx$;

დ) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{2}\right) dx$;

ე) $\int u^{1.1} \left(\frac{1}{3u} - 1\right) du$;

ვ) $\int \left(2e^u + \frac{6}{u} + \ln 2\right) du$;

ზ) $\int \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right) dx$;

თ) $\int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}} dx$;

ი) $\int \left(x^3 - 2x^2\right) \left(\frac{1}{x} - 5\right) dx$;

კ) $\int y^3 \left(2y + \frac{1}{y}\right) dy$.

5. ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

ა) $\int (2x + 6)^5 dx$;

ბ) $\int e^{5x+3} dx$;

გ) $\int \sqrt{4x - 1} dx$;

დ) $\int \frac{1}{3x+5} dx$;

ე) $\int e^{1-x} dx$;

ვ) $\int xe^{x^2} dx$;

ზ) $\int 2xe^{x^2-1} dx$;

თ) $\int t \left(t^2 + 1\right)^5 dt$;

ი) $\int 3t\sqrt{t^2 + 8} dt$;

კ) $\int x^2 \left(x^3 + 1\right)^{3/4} dx$;

ლ) $\int x^5 e^{1-x^6} dx$;

მ) $\int \frac{2y^4}{y^5+1} dy$.

6. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

   ა) $\int x \sin x dx$;

   ბ) $\int x \cos x dx$;

   გ) $\int x^2 \sin x dx$;

   დ) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;

   ე) $\int x^2 e^x dx$;

   ვ) $\int x \ln x dx$;

   ზ) $\int x^2 \cos x dx$.

7. ფირმამ დაადგინა, რომ მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის Q ერთეულის საწარმოებლად არის $1.92 - 0.002Q$ ლარი. გაიგეთ, რამდენი დაიხარჯება პირველი 100 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 562 ლარი.

8. საწარმოს მარგინალური დანახარჯი პროდუქციის Q ერთეულის წარმოების დროს არის $2.25 + 0.1Q + Q^2$ ლარი. გაიგეთ, დანახარჯი პირველი 10 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 125 ლარი.

9. მარგინალური დანახარჯის ფუნქციას აქვს სახე $(MC) = K'(Q) = 0.006Q^2 - 1.5Q + 8$, სადაც $K(Q)$ არის მთლიანი დანახარჯების ფუნქცია, ხოლო Q-წარმოებული პროდუქციის მოცულობა. ფიქსირებული დანახარჯია 20 000 ლარი. გამოთვალეთ დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის წარმოებას.

10. მარგინალური ამონაგების ფუნქციაა $(MR) = f(Q) = 90 - 0.02Q$. პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის გაყიდვით მიღებული ამონაგებია 10 000 ლარი. როგორი იქნება ამონაგები პირველი 200 ერთეულის გაყიდვის შემდეგ?

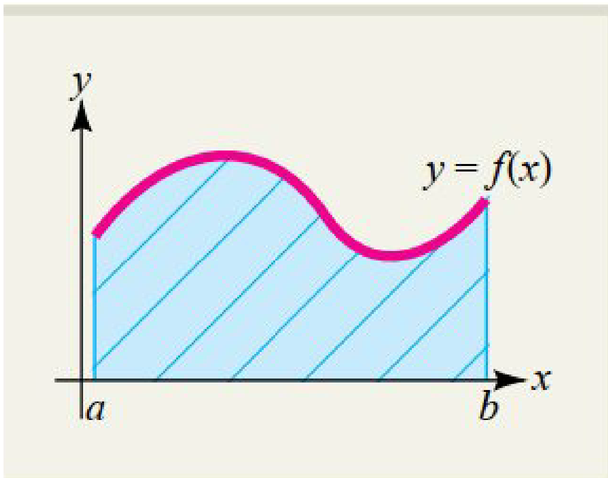
ლექცია 20

განსაზღვრული ინტეგრალი

განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. მისი წარმოშობა ისტორიულად დაკავშირებულია ფიგურის ფართობის, სხეულის მოცულობისა და წირის სიგრძის გამოთვლის ამოცანებთან. ელემენტარული გეომეტრიის მეთოდებით ხერხდება მხოლოდ ისეთი ბრტყელი ფიგურების ფართობების გამოთვლა, რომლებიც შემოსაზღვრულია წრფეთა მონაკვეთებით და წრეწირის რკალებით. გაცილებით უფრო ზოგადი ფორმის ბრტყელ ფიგურათა ფართობების გამოთვლა შესაძლებელია სწორედ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.

20.1 მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი

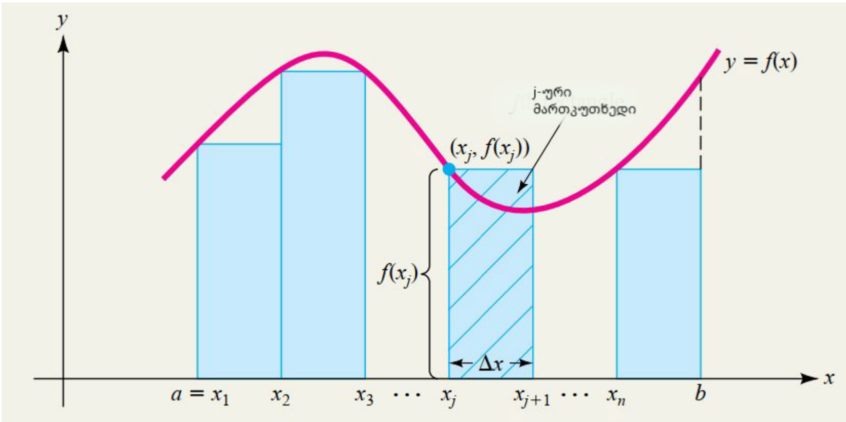
განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $[a; b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $y = f(x) > 0$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $[a; b]$ სეგმენტით, ხოლო გვერდებიდან $x = a$ და $x = b$ წრფეებით(სურ. 20.1). ასეთ ფიგურას **მრუდწირული ტრაპეცია** ეწოდება.



სურ 20.1

როგორ ვიპოვოთ ამ ფიგურის ფართობი? ზოგადი იდეა ასეთია: ამ ფიგურას "მივუახლოვდებით"ისეთი ფიგურებით, რომელთა ფართობების გამოთვლა ჩვენ უკვე ვიცით. სახელდობრ, მივუახლოვდებით საერთო შიგა წერტილების არმქონე მართკუთხედებისაგან შედგენილი ფიგურებით.

დავიწყოთ ეს პროცესი $a \leq x \leq b$ სეგმენტის n ტოლ ქვესეგმენტად დაყოფით, რომელთა სიგრძეა $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. x_j იყოს j-ური ქვესეგმენტის მარცხენა ბოლო($j = 1, 2, ..., n$). ამის შემდეგ ავაგოთ n რაოდენობის მართკუთხედი ისე, რომ j-ური მართკუთხედის ფუძე იყოს j-ური ქვესეგმენტი, ხოლო სიმაღლე კი- $f(x_j)$ (სურ.20.2).

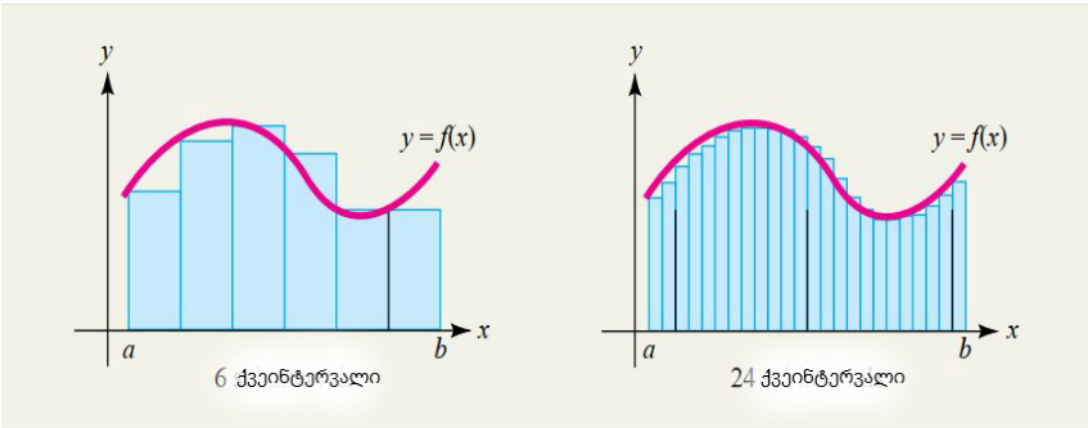


სურ 20.2

ამ შემთხვევაში j-ური მართკუთხედის ფართობი იქნება $f(x_j)\Delta x$ და თუ Δx საკმაოდ მცირეა, ის დაახლოებით ტოლია $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ სეგმენტისა და წირს შორის მდებარე არის ფართობისა. ყველა n მართკუთხედის ფართობთა ჯამი იქნება

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x =$$
$$= [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x,$$

რომელიც ასევე დაახლოებით გვაძლევს ჩვენ მიერ აგებული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. ცხადია, როცა ქვესეგმენტთა რაოდენობა გაიზრდება, S_n სულ უფრო მიუახლოვდება ამ ფართობის მნიშვნელობას(სურ. 20.3).



სურ 20.3

მაშასადამე, გონივრულია, რომ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი განვსაზღვროთ როგორც S_n ჯამების ზღვარი. განვაზოგადოდ ჩვენი მოსაზრებები.

წირსქვეშა არის ფართობი. ვთქვათ, $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია უწყვეტი $y = f(x) \geq 0$ ფუნქცია. მაშინ ფართობი S იმ არისა, რომელიც მდებარეობს $y = f(x)$ წირსა და $[a;b]$ სეგმენტს შორის, იქნება

$$S = \lim_{n \to +\infty} \left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \cdots + f\left(x_n\right)\right] \Delta x,$$

სადაც x_j არის j-ური ქვესეგმენტის მარცხენა ბოლო, როცა $a \leq x \leq b$ სეგმენტი დაყოფილია n ტოლ ნაწილად, რომელთა სიგრძეა $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

ყოველივე ზემოთ თქმულს მივყავართ მათემატიკის ერთ-ერთ ძირითად ცნებამდე, რომელსაც განსაზღვრული ინტეგრალი ეწოდება.

20.2 განსაზღვრული ინტეგრალი

განვიხილოთ $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქცია. დავყოთ მოცემული სეგმენტი n ტოლ ნაწილად. ცხადია, თითოეული ქვესეგმენტის სიგრძე იქნება $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. შევარჩიოთ ნებისმიერად x_k რიცხვი ყოველი k-ური ქვესეგმენტიდან $(k = 1, 2, ..., n)$ და შევადგინოთ შემდეგი ჯამი:

$$[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \cdots + f\left(x_n\right)]\Delta x.$$

ამ ჯამს **რიმანის ჯამი** ეწოდება.

რიმანის ჯამის ზღვარს, როცა $n \to +\infty$, ეწოდება f ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a;b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება $\int_a^b f(x)dx$ სიმბოლოთი(იკითხება: "განსაზღვრული ინტეგრალი a-დან b-მდე ეფ იქს დე იქსიდან"). მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \cdots + f\left(x_n\right)\right] \Delta x.$$

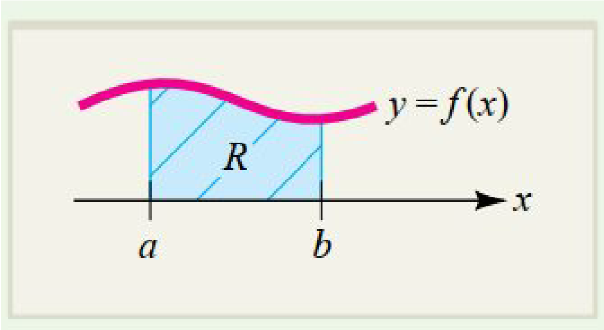
$f(x)$- ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ხოლო a და b რიცხვებს, შესაბამისად, ინტეგრების ქვედა და ზედა საზღვრები.

მტკიცდება, რომ თუ ფუნქცია უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს განსაზღვრული ინტეგრალი ამ ფუნქციიდან ამ სეგმენტზე. ამასთან, განსაზღვრებაში მოყვანილი ზღვარი არაა დამოკიდებული ქვესეგმენტებიდან x_k რიცხვების შერჩევის წესზე.

ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ფაქტსაც: მართალია, განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალების ჩასაწერად გამოიყენება ერთი და იგივე $\int$ სიმბოლო, თუმცა განსაზღვრული ინტეგრალი არის კონკრეტული რიცხვი, ხოლო განუსაზღვრელი ინტეგრალი კი- პირველად ფუნქციათა ოჯახი. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, მიუხედავად ასეთი შინაარსობრივი განსხვავებებისა, ეს ორი ცნება მჭიდროდ არის ერთმანეთთან დაკავშირებული.

ფართობი, როგორც განსაზღვრული ინტეგრალი. თუ გავაანალიზებთ ზემოთ მოყვანილ წირსქვეშა არის ფართობის გამოთვლის წესს, დავასკვნით, რომ ფართობი S იმ R არისა, რომელიც მდებარეობს $y = f(x)$ წირსა და $[a;b]$ სეგმენტს შორის(სურ.20.4) , იქნება შემდეგი განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



სურ 20.4

20.3 კალკულუსის ძირითადი თეორემა

კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემა ამყარებს კავშირს განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალებს შორის. ეს კავშირი გამოისახება ფორმულით, რომელსაც **ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა** ეწოდება.

კალკულუსის ძირითადი თეორემა. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

სადაც $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერ პირველად ფუნქციას.

მაგალითი 20.1 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი*

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx \ .$$

ამოხსნა. *ინტეგრალქვეშა* $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ *ფუნქციის პირველადი არის* $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{3}x^3$ *ფუნქცია. ამიტომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულიდან გვექნება:*

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx &= \left(\ln|x| - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 = \\ &= \left[\ln 4 - \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[\ln 1 - \frac{1}{3}(1)^3\right] = \\ &= \ln 4 - 21 \approx -19.6137.\end{aligned}$$

მაგალითი 20.2 *ვთქვათ, მიწის ნაკვეთს აქვს იმ ფიგურის ფორმა, რომელიც მოქცეულია* $y = x^3 + 1$ *წირსა და* $0 \le x \le 1$ *სეგმენტს შორის, სადაც* x *და* y *იზომება ასეულ მეტრებში. თუ ერთი კვადრატული მეტრი მიწის ღირებულება შეადგენს 12 დოლარს, რამდენი ეღირება აღნიშნული მიწის ნაკვეთი?*

ამოხსნა. *განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაციიდან გამომდინარე, ცხადია, მიწის ნაკვეთის ფართობი ტოლი იქნება შემდეგი ინტეგრალის:*

$$S = \int_0^1 \left(x^3 + 1\right) dx.$$

ვინაიდან ინტეგრალქვეშა $f(x) = x^3 + 1$ *ფუნქციის პირველადია* $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$*, ამიტომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულიდან გვექნება:*

$$S = \int_0^1 \left(x^3 + 1\right) dx = \frac{1}{4}x^4 + x\Big|_0^1 =$$
$$= \left[\frac{1}{4}(1)^4 + 1\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 + 0\right] = \frac{5}{4}.$$

რადგანაც x *და* y *იზომება ასეულ მეტრებში, ნაკვეთის ფართობი ტოლი იქნება*

$$\frac{5}{4} \times 100 \times 100 = 12500\textit{(კვ.მ.)}$$

მაშინ კი, ამ ფართობის მქონე ნაკვეთის ღირებულებაა

$$p = (\$12)\,(12500) = \$150000.$$

განსაზღვრული ინტეგრალის რამდენიმე თვისება. ვთქვათ, $y = f(x)$ და $y = g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ

1. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ:

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ ნებისმიერი k მუდმივისთვის;

2. განსაზღვრული ინტეგრალი ორი ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან უდრის მოცემული ფუნქციებიდან ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

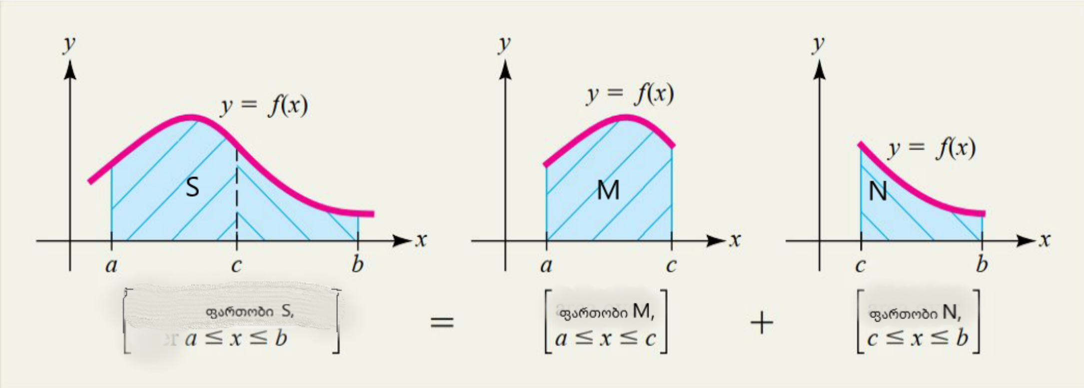
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

3. $\int_a^a f(x)dx = 0;$

4. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx;$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, სადაც $a \le c \le b.$

ინტეგრალის მე-5 თვისების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია სურ. 20.5-ზე.



სურ 20.5

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის ეს თვისება სამართლიანია არა მხოლოდ დადებითი ფუნქციებისთვის, არამედ მოცემულ სეგმენტზე უწყვეტი ნებისმიერი ფუნქციებისთვის.

20.4 განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის წესები

1. **ჩასმის წესი**

$\int_a^a f(x)dx$ ინტეგრალის ამოსახსნელად $u = g(x)$ ჩასმის გამოყენებისას შეგვიძლია ავირჩიოთ შემდეგი ორი გზიდან ერთ-ერთი:

1. ეს ჩასმა გამოვიყენოთ $f(x)$-ის პირველადი $F(x)$ ფუნქციის საპოვნელად და შემდეგ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის საშუალებით დავასრულოთ ინტეგრალის გამოთვლა.

2. გამოვიყენოთ ჩასმა იმისათვის, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და dx გამოვსახოთ u და du-თი და ასევე შევცვალოთ ინტეგრალის საზღვრები a და b ახალი, შესაბამისად, $c = g(a)$ და $d = g(b)$ საზღვრებით. შემდეგ, საწყისი ინტეგრალის გამოთვლა დავასრულოთ ახალ, გარდაქმნილ განსაზღვრულ ინტეგრალში ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით.

ამ წესების გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 20.3 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი*

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx.$$

ამოხსნა. *შემოვიღოთ აღნიშვნა* $u = x^2 + 1$. *მაშინ* $du = 2xdx$ *და*

$$\int 8x\left(x^2+1\right)^3 dx = \int 4u^3 du = u^4.$$

ინტეგრების საზღვრები 0 და 1 დაკავშირებულია x ცვლადთან და არა u-სთან. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ორი გზიდან ერთ-ერთი: ჩავწეროთ პირველადი x-ის გამოყენებით ან ვიპოვოთ u-ს ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება $x = 0$ და $x = 1$ მნიშვნელობებს.

თუ ავირჩევთ პირველ გზას, მივიღებთ:

$$\int 8x\left(x^2+1\right)^3 dx = u^4 = (x^2+1)^4.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ

$$\int_0^1 8x\left(x^2+1\right)^3 dx = \left.\left(x^2+1\right)^4\right|_0^1 = 16-1=15.$$

მეორე გზის არჩევის შემთხვევაში კი $u=x^2+1$ ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $u=1$, როცა $x=0$ და $u=2$, როცა $x=1$. ამის შემდეგ, საწყისი ინტეგრალის ამოხსნას ვასრულებთ ახალი, საზღვრებშეცვლილი ინტეგრალის ამოხსნით:

$$\int_0^1 8x\left(x^2+1\right)^3 dx = \int_1^2 4u^3 du = \left.u^4\right|_1^2 = 16-1=15.$$

მაგალითი 20.4 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი*

$$\int_{1/4}^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx.$$

ამოხსნა. *გამოვიყენოთ ჩასმა $u=\ln x$ და დავადგინოთ ინტეგრების ახალი საზღვრები:*

როცა $x=\frac{1}{4}$, მაშინ $u=\ln\frac{1}{4}$, ხოლო როცა $x=2$, მაშინ $u=\ln 2$.

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int_{1/4}^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\ln 1/4}^{\ln 2} u du = \left.\frac{1}{2}u^2\right|_{\ln 1/4}^{\ln 2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{4}\right)^2 \approx -0.721.$$

2. **ნაწილობითი ინტეგრების წესი**. ვთქვათ, u და v ფუნქციები უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე და უწყვეტად წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალში. როგორც ვიცით

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე a-დან b-მდე და გამოვიყენოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა. მივიღებთ:

$$\int_a^b u dv = \left.(uv)\right|_a^b - \int_a^b v du.$$

მიღებულ ფორმულას ეწოდება **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.**

მაგალითი 20.5 *გამოვთვალოთ ინტეგრალი*

$$\int_0^2 x2^x dx$$

ამოხსნა. *აღვნიშნოთ $u = x$ და $dv = 2^x dx$. აქედან კი მივიღებთ, რომ $du = dx$ და $v = \frac{1}{\ln 2}2^x$. ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:*

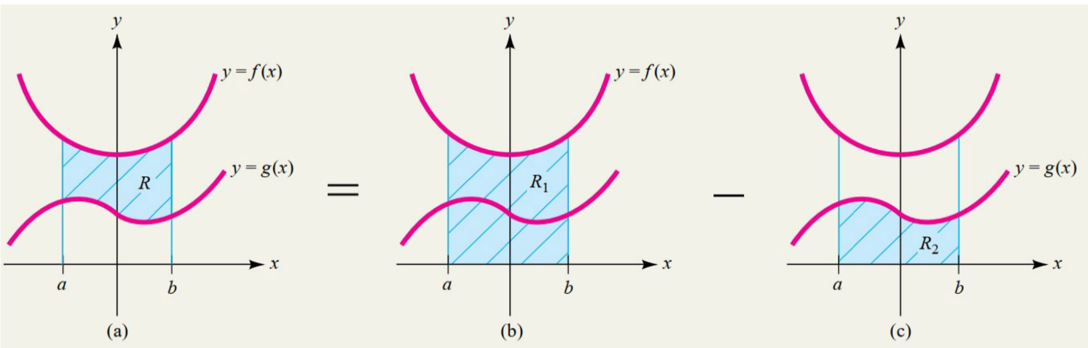
$$\int_0^2 x2^x dx = \frac{x2^x}{\ln 2}\bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2^x}{\ln 2}dx = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\bigg|_0^2 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2} = \frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{\ln^2 2}.$$

20.5 ორ წირს შორის მოქცეული არის ფართობი

ვთქვათ, $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას $f(x) \geq g(x)$. მაშინ $y = f(x)$ და $y = g(x)$ წირებს შორის მოქცეული არის ფართობი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

ამ ფორმულის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია სურ. 20.6-ზე.



სურ 20.6

ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ მოყვანილი ფორმულა სამართლიანია აბსცისათა ღერძის მიმართ გრაფიკების ნებისმიერი მდებარეობის შემთხვევაში. მთავარია შესრულებული იყოს პირობა: $f(x) \geq g(x)$.

მაგალითი 20.6 *გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^3$ და $y = x^2$ წირებით.*

ამოხსნა. *პირველ რიგში ვიპოვოთ მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილები. ამისათვის ამოვხსნათ $x^3 = x^2$ განტოლება. გვექნება:*

$$x^3 - x^2 = 0;$$

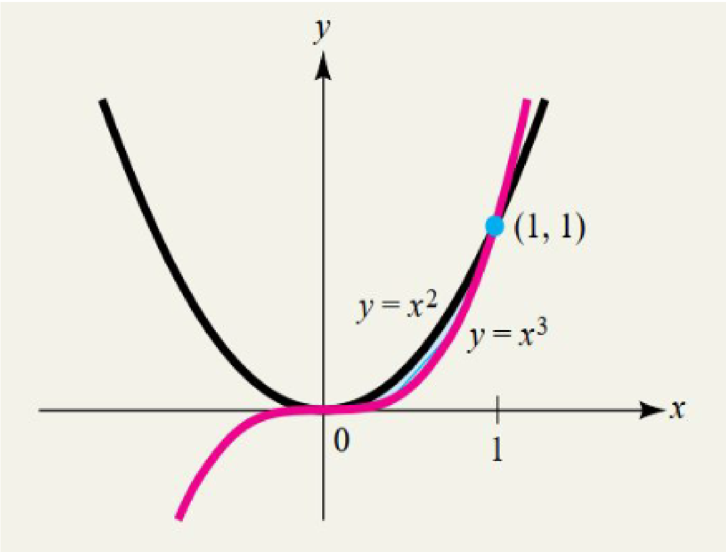
$$x^2(x-1) = 0;$$

$$x = 0, x = 1.$$

მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია $(0;0)$ *და* $(1;1)$.

შევნიშნოთ, რომ როცა $0 \leq x \leq 1$, *მაშინ* $x^2 \geq x^3$. *აქედან გამომდინარე, განსახილველი ფიგურა ზემოდან შემოსაზღვრულია* $y = x^2$ *წირით, ხოლო ქვემოდან* $y = x^3$ *წირით(სურ. 20.7). ამიტომ ამ ფიგურის* S *ფართობი შეგვიძლია გამოვთვალოთ შემდეგი ინტეგრალის საშუალებით:*

$$S = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4\right] = \frac{1}{12}.$$



სურ 20.7

20.6 ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა

$[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციის **საშუალო მნიშვნელობა** V ეწოდება შემდეგ სიდიდეს

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

მაგალითი 20.7 *მეწარმემ დაადგინა, რომ ახალი პროდუქტის გამოშვებიდან* t *თვის შემდეგ კომპანიის გაყიდვების მოცულობა იქნება* $S(t)$ *ათასი დოლარი, სადაც*

$$S(t) = \frac{750t}{\sqrt{4t^2+25}}.$$

რისი ტოლია კომპანიის საშუალო თვიური გაყიდვები ახალი პროდუქტის დანერგვიდან პირველი 6 თვის განმავლობაში?

ამოხსნა. *ცხადია, პირველი ექვსი თვის განმავლობაში(ანუ, როცა $0 \leq t \leq 6$) კომპანიის გაყიდვების საშუალო თვიური V რაოდენობა მოიცემა შემდეგი ინტეგრალით:*

$$V = \frac{1}{6-0}\int_0^6 \frac{750t}{\sqrt{4t^2+25}}dt.$$

ამ ინტეგრალის შესაფასებლად გამოვიყენოთ ჩასმა $u = 4t^2+25$, საიდანაც $du = 8tdt$ და $tdt = \frac{1}{8}du$. გამოყენებული ჩასმის საშუალებით დავადგინოთ ინტეგრების ახალი საზღვრები: როცა $t = 0$, მაშინ $u = 4(0)^2 + 25 = 25$, ხოლო როცა $t = 6$, მაშინ $u = 4(6)^2 + 25 = 169$. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\int_0^6 \frac{750}{\sqrt{4t^2+25}}(tdt) = \\ &= \frac{1}{6}\int_{25}^{169} \frac{750}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{8}du\right) = \frac{750}{6(8)}\int_{25}^{169} u^{-1/2}du = \\ &= \frac{750}{6(8)}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right)\bigg|_{25}^{169} = \frac{750(2)}{6(8)}\left[(169)^{1/2} - (25)^{1/2}\right] = \\ &= 250. \end{aligned}$$

ამრიგად, ახალი პროდუქტის დანერგვისთანავე პირველი 6 თვის განმავლობაში კომპანიის გაყიდვები თვეში საშუალოდ 250 000 დოლარია.

ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას აქვს რამდენიმე სასარგებლო ინტერპრეტაცია. პირველ რიგში, შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ უწყვეტია $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე და $F(x)$ მისი ერთ-ერთი პირველადია იმავე სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$-ის საშუალო მნიშვნელობისთვის გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}[F(b) - F(a)] = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}.$$

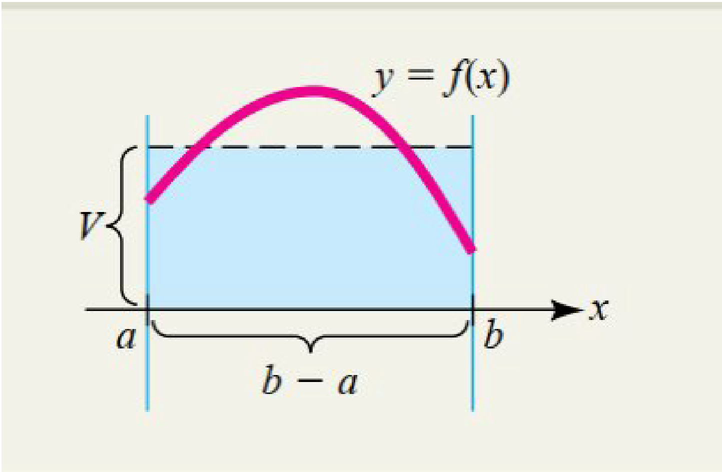
მაშასადამე, $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა ემთხვევა ამავე სეგმენტზე მისი ერთ-ერთი პირველადი ფუნქციის ცვლილების საშუალო სიჩქარეს.

ასე მაგალითად,ვინაიდან საქონლის x ერთეულის წარმოებისას მთლიანი დანახარჯი $C(x)$ წარმოადგენს მარგინალური $MC = C'(x)$ დანახარჯის პირველადს, აქედან გამომდინარეობს, რომ მთლიანი დანახარჯის ცვლილების საშუალო სიჩქარე გამოშვებული x პროდუქციის $a \leq x \leq b$ დიაპაზონში ემთხვევა იგივე დიაპაზონში შესაბამისი მარგინალური დანახარჯის ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას.

მეორეს მხრივ, შეგვიძლია მოვახდინოთ $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x) \geq 0$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობის გეომეტრიული ინტერპრეტაციაც. ამისათვის საშუალო მნიშვნელობის $V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(b-a)V = \int_a^b f(x)dx.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი ინტეგრალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $f(x)$ წირსა და $a \leq x \leq b$ სეგმენტს შორის მოქცეული არის ფართობი, ხოლო მარცხენა მხარეს მდგომი ნამრავლი- იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის სიგანეა $b-a$ და სიმაღლე V (სურ. 20.8).



სურ 20.8

მაშასადამე, $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x) \geq 0$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა V ტოლია იმ მართკუთხედის სიმაღლისა, რომლის ფუძეცაა მოცემული სეგმენტი და რომლის ფართობი ემთხვევა $f(x)$ წირსა და $[a;b]$ სეგმენტს შორის მოქცეული არის ფართობს.

სამართლიანია უფრო ზოგადი დებულებაც, რომელიც **საშუალო მნიშვნელობის თეორემის** სახელითაა ცნობილი:

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი$(a < c < b)$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

20.7 სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები

ა) $\int_{-1}^{2} 5dx;$

ბ) $\int_{-2}^{1} \pi dx;$

გ) $\int_{0}^{5} (3x+2)dx;$

დ) $\int_{1}^{4} (5-2t)dt;$

ე) $\int_{-1}^{1} 3t^4 dt$;

ვ) $\int_{1}^{4} 2\sqrt{u}du$;

ზ) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{t} - \frac{4}{\sqrt{t}}\right) dt$;

თ) $\int_{1}^{3} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$;

ი) $\int_{0}^{\ln 2} (e^t - e^{-t})\, dt$;

კ) $\int_{-3}^{-1} \frac{t+1}{t^3} dt$;

ლ) $\int_{1}^{6} x^2(x-1)dx$.

2. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები $[-3; 2]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებია. ამასთანავე $\int_{-3}^{2} f(x)dx = 5$, $\int_{-3}^{2} g(x)dx = -2$, $\int_{-3}^{1} f(x)dx = 0$, და $\int_{-3}^{1} g(x)dx = 4$. გამოთვალეთ:

   ა) $\int_{-3}^{2}[-2f(x) + 5g(x)]dx$;

   ბ) $\int_{-3}^{1}[4f(x) - 3g(x)]dx$;

   გ) $\int_{4}^{4} g(x)dx$;

   დ) $\int_{2}^{-3} f(x)dx$;

   ე) $\int_{1}^{2} f(x)dx$;

   ვ) $\int_{1}^{2} g(x)dx$;

   ზ) $\int_{1}^{2}[3f(x) + 2g(x)]dx$;

   თ) $\int_{-3}^{1}[2f(x) + 3g(x)]dx$.

3. ფერმერის შეფასებით მისი მოსავალი დღეიდან t დღის განმავლობაში გაიზრდება $0.3t^2 + 0.6t + 1$ ცენტნერით დღეში. რამდენით გაიზრდება მოსავლის ღირებულება მომდევნო 5 დღის განმავლობაში, თუ ერთი ცენტნერის საბაზრო ფასი უცვლელია და ტოლია 3 დოლარის?

4. კორპორაცია "ტელექსმა"დაიწყო ახალი თაობის ფიჭური ტელეფონების გამოშვება. ტელეფონების წარმოების სიჩქარე t თვის განმავლობაში შეადგენს $\frac{dQ}{dt} = 1500(2 - \frac{t}{2t+5})$ ერთეულს თვეში. რამდენი ტელეფონი იწარმოება მესამე თვის განმავლობაში?

5. საინვესტიციო პორტფელის ფასი იცვლება შემდეგი სიჩქარით

$$V'(t) = 12e^{-0.05t}\left(e^{0.3t} - 3\right).$$

სადაც V გამოისახება ათას ლარებში, ხოლო t არის წლების რაოდენობა 2014 წლის შემდეგ. რამდენით შეცვლილა პორტფელის ღირებულება

ა) 2014-დან 2018 წლამდე?

ბ) 2018-დან 2020 წლამდე?

6. გამოთვალეთ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომლის საზღვრებია მოცემული წირები:

ა) $y = 5x^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad OX$ ღერძი;

ბ) $y = 2 + x - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad OX$ ღერძი;

გ) $y = e^x, \qquad x = -1, \quad x = 2, \quad OX$ ღერძი;

დ) $y = -x^2, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad OX$ ღერძი;

7. ისარგებლეთ ჩასმის ხერხით და გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

ა) $\int_0^1 (5x-3)^3 dx$;

ბ) $\int_0^2 \sqrt{3x+2} dx$;

გ) $\int_1^3 e^{2x+1} dx$;

დ) $\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

ე) $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x+2}$;

ვ) $\int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$;

ზ) $\int_2^3 \frac{3e^{2x} dx}{e^{2x}-1}$.

8. შემდეგი ინტეგრალების გამოსათვლელად ისარგებლეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით

ა) $\int_0^{\pi} xsinxdx$;

ბ) $\int_1^e \ln xdx$;

გ) $\int_1^e x \ln xdx$;

დ) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 sinxdx$;

ე) $\int_0^{\pi/2} xcosxdx$.

9. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირე-ბით:

ა) $y = x$, $\quad y = -x$ და $x = 1$;

ბ) $y = x^2$, $\quad y = -x^2$ და $x = 1$;

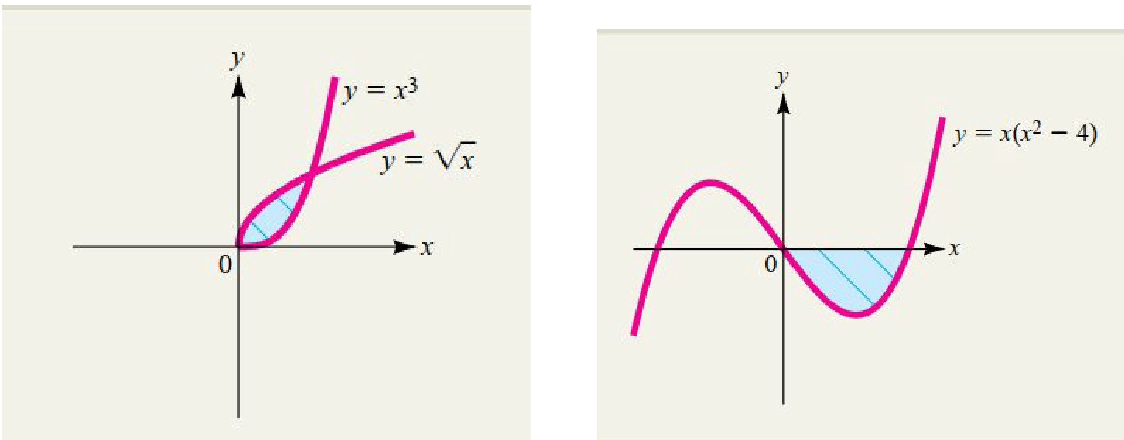
გ) $y = -x^2 + 4x - 3$ და OX ღერძით;

დ) $y = x^2 - 2x$ და OX ღერძით.(მითითება: ფიგურა მდებარეობს OX ღერძის ქვემოთ);

ე) $y = x^3$ და $y = 9x$, როცა $x \geq 0$

ვ) სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია $(-4; 0)$, $(2; 0)$ და $(2; 6)$;

10. იპოვეთ სურ.20.9-ზე გამოსახული გამუქებული არეების ფართობები.



(a) (b)

სურ 20.9

11. გამოთვალეთ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა მითითებულ $a \leq x \leq b$ სეგმენტზე:

ა) $f(x) = 1 - x^2$, $\quad -3 \leq x \leq 3$;

ბ) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $\quad -1 \leq x \leq 2$;

გ) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$, $\quad 0 \leq x \leq \ln 2$;

დ) $f(x) = e^{-x}(4 - e^{2x})$, $\quad -1 \leq x \leq 1$.

12. ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა 2000 წლიდან t წლის შემდგომ შეადგენდა

$$P(t) = \frac{e^{0.2t}}{4 + e^{0.2t}}$$

მილიონ ადამიანს. რისი ტოლი იყო ამ ქალაქის საშუალო პოპულაცია 2000 წლიდან 2010 წლამდე?

13. ახალი პროდუქტის x ერთეულის წარმოების დანახარჯი შეადგენს $C(x) = 3x\sqrt{x} + 10$ ასეულ ლარს. რისი ტოლია პირველი 81 ერთეული პროდუქტის წარმოებისათვის საშუალო დანახარჯი?

ლექცია 21

არასაკუთრივი ინტეგრალი

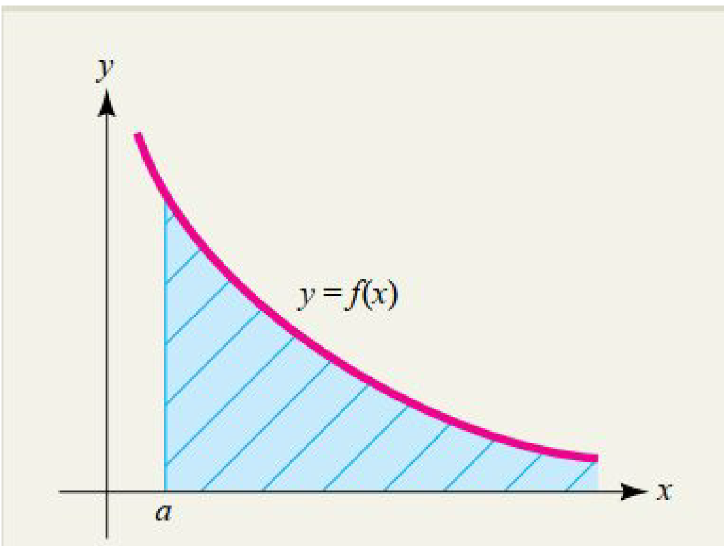
21.1 არასაკუთრივი ინტეგრალი უსასრულო საზღვრით

წინა პარაგრაფში განხილული განსაზღვრული ინტეგრალის $\int_a^b f(x)dx$ განსაზღვრებისას ჩვენ დავუშვით, რომ ფუნქციის ინტეგრების არე იყოს შემოსაზღვრული, ანუ $a \leq x \leq b$. მაგრამ, ზოგჯერ, გარკვეული პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას, საჭირო ხდება ინტეგრალების განხილვა ისეთ არეებზე, რომელთა საზღვრებია $x \geq a$ სახის შემოუსაზღვრელი ინტერვალები. ასეთი ტიპის ინტეგრალებს **არასაკუთრივ ინტეგრალებს** უწოდებენ.

არასაკუთრივ ინტეგრალს $x \geq a$ შემოუსაზღვრელ ინტერვალზე ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

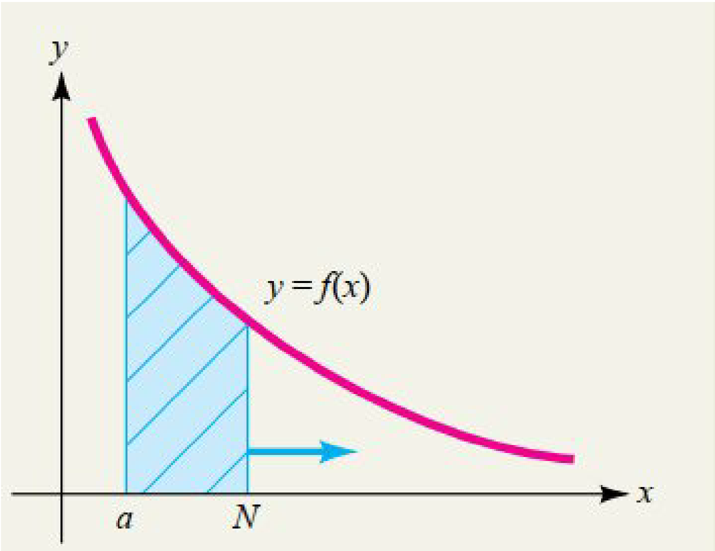
თუ $f(x) \geq 0$, მაშინ ეს ინტეგრალი შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს, როგორც იმ არის ფართობი, რომელიც მოქცეულია $y = f(x)$ წირსა და $[a; +\infty)$ უსასრულო ნახევარსეგმენტს შორის(სურ. 21.1)



სურ 21.1

მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნული არე "უსასრულოდ იჭიმება,"მისი ფართობი შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულოც, იმისდა მიხედვით, თუ რა სიჩქარით მიისწრაფვის $f(x)$ ფუნქცია ნულისკენ.

ბუნებრივია, ასეთი არის ფართობის გამოსათვლელად გონივრული სტრატეგია იქნება, თუ პირველ რიგში გამოვთვლით განსაზღვრულ ინტეგრალს $x = a$-დან რაიმე სასრულ $x = N$ რიცხვამდე და შემდგომ მიღებულ გამოსახულებაში N-ს მივასწრაფებთ უსასრულობისკენ(სურ. 21.2)



სურ 21.2

მაშასადამე, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x \geq a$ ინტერვალზე, მაშინ

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)dx.$$

თუ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი ზღვარი არსებობს, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება **კრებადი** , ხოლო თუ ეს ზღვარი არ არსებობს, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება **განშლადი** .

მაგალითი 21.1 *გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი ინტეგრალი*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

ამოხსნა. *პირველად გამოვთვალოთ ინტეგრალი 1-დან N-მდე და შემდგომ N მივასწრაფოთ უსასრულობისკენ. მივიღებთ:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^N \right) = \lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{1}{N} + 1 \right) = 1.$$

მაშასადამე, მოცემული არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია და მისი მნიშვნელობა 1-ის ტოლია.

მაგალითი 21.2 *გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი ინტეგრალი*

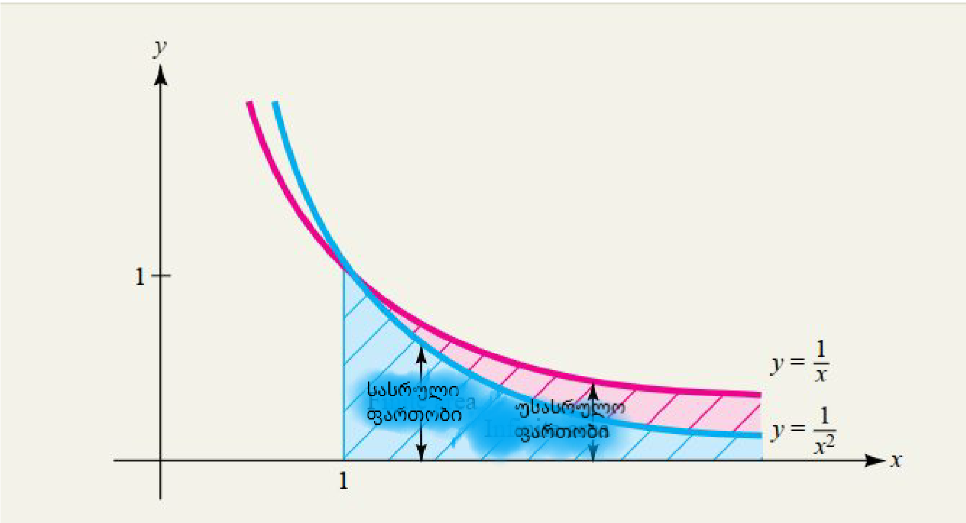
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

ამოხსნა.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to+\infty} \left(\ln|x||_1^N\right) = \lim_{N\to+\infty} \ln N = +\infty.$$

ვინაიდან, მიღებული ზღვარი არ არსებობს, ამიტომ მოცემული არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

ბოლო ორი მაგალითის გეომეტრიული არსი იმაში მდგომარეობს, რომ $y = \frac{1}{x^2}$ წირის ქვეშ და $x = 1$ წრფის მარჯვნივ მდებარე არის ფართობი სასრულია, მაშინ როცა $y = \frac{1}{x}$ წირის შემთხვევაში შესაბამისი ფართობი უსასრულოა. ეს განსხვავება განპირობებულია იმით, რომ როცა x ცვლადი შემოუსაზღვრელად იზრდება, $\frac{1}{x^2}$ უფრო სწრაფად მიისწრაფვის 0-სკენ, ვიდრე $\frac{1}{x}$(სურ. 21.3).



სურ 21.3

განვიხილოთ ერთ სასარგებლო ზღვარი, რომელიც გამოიყენება არასაკუთრივი ინტეგრალების გამოსათვლელად. კერძოდ, თუ p ნებისმიერი, ხოლო k დადებითი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^p}{e^{kN}} = 0.$$

ცხადია, ამ ზღვრის შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ ექსპონენციალური წევრი e^{kN} უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე ნებისმიერი ხარისხოვანი N^p წევრი.

მაგალითი 21.3 *გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე შემდეგი ინტეგრალი*

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx.$$

ამოხსნა. *განვიხილოთ შესაბამისი ზღვარი და შემდეგ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. მივიღებთ:*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^N xe^{-2x}dx = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^N + \frac{1}{2}\int_0^N e^{-2x}dx\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^N = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}Ne^{-2N} - \frac{1}{4}e^{-2N} + 0 + \frac{1}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ვინაიდან $e^{-2N} \to 0$ და $\mathrm{Ne}^{-2N} \to 0$ როცა $N \to +\infty$. მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი კრებადია.

21.2 არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოყენება

მაგალითი 21.4 *მეცენატს სურს უნივერსიტეტში დაარსოს სტიპენდიის ფონდი, რისთვისაც ის უნივერსიტეტს ჩუქნის ბანკში გახსნილ ანგარიშს, რომელმაც უნდა უზრუნველყოს განუსაზღვრელი ვადით ყოველწლიურად $25000 + 1200t$ ლარის შემოსავალი(t წლების რაოდენობაა). თუ დავუშვებთ, რომ წლიური ნომინალური რთული საპროცენტო განაკვეთი მუდმივად 5%-ის ტოლია უწყვეტი დარიცხვით, რამდენი უნდა იყოს მეცენატის საწყისი შემოწირულობა?*

ამოხსნა. *ცხადია, მეცენატის საჩუქარი მუდმივად უნდა უდრიდეს შემოსავლის ნაკადის საწყის ღირებულებას(Present Value). ცნობილია, რომ უწყვეტი დარიცხვის დროს, თუ წლიური განაკვეთი r-ის ტოლია, T წლის განმავლობაში $f(t)$ შემოსავლის ნაკადის საწყისი ღირებულება(PV) გამოითვლება შემდეგი ინტეგრალით:*

$$\mathrm{PV} = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt.$$

ჩვენი ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, გვაქვს $f(t) = 25000 + 1200t$ და $r = 0.05$. მაშინ საჩუქრის საწყისი ღირებულება T წლის შემდეგ ტოლი იქნება

$$\mathrm{PV} = \int_0^T (25000 + 1200t)e^{-0.05t}dt.$$

მიღებული ინტეგრალი ამოვხსნათ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u = 25,000 + 1,200t \qquad dv = e^{-0.05t}dt$$
$$du = 1,200dt \qquad v = \frac{e^{-0.05t}}{-0.05} = -20e^{-0.05t}$$

რის შემდეგაც მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{PV} = & \int_0^T (25000 + 1200t)e^{-0.05t}dt = \\
& = \left[(25000 + 1200t)\left(-20e^{-0.05t}\right)\right]\Big|_0^T - \int_0^T 1200\left(-20e^{-0.05t}\right)dt = \\
& = \left[(-500000 - 24000t)e^{-0.05t}\right]\Big|_0^T + 24\,000\left(\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\right)\Bigg|_0^T = \\
& = \left[(-980000 - 24000t)e^{-0.05t}\right]\Big|_0^T = \\
& = \left[(-980000 - 24000T)e^{-0.05T}\right] - \left[(-980000 - 24000(0))e^{0}\right] = \\
& = (-980000 - 24000T)e^{-0.05T} + 980000.
\end{aligned}$$

განუსაზღვრელი ვადის შემთხვევაში კი საწყისი ღირებულების საპოვნელად განვიხილოთ ზღვარი , როცა $T \to +\infty$. მაშასადამე, უნდა გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}(25000 + 1200t)e^{-0.05t}dt = \\
&= \lim_{T\to+\infty}\left[(-980000 - 24000T)e^{-0.05T} + 980000\right] = \\
&= 0 + 980000 = 980000.
\end{aligned}$$

ამრიგად, საჩუქრის ღირებულება, ანუ მეცენატის მიერ ბანკში დასაბანდებელი საწყისი თანხის ღირებულება, უნდა შეადგენდეს 980000 ლარს.

21.3 სავარჯიშოები

1. გამოიკვლიეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები კრებადობაზე

   ა) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$;

   ბ) $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}dx$;

   გ) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

   დ) $\int_1^{+\infty} x^{-2/3}dx$;

   ე) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{2x-1}dx$;

   ვ) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$;

   ზ) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}dx$;

   თ) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$;

ი) $\int_0^{+\infty} 5e^{-2x}dx$;

კ) $\int_1^{+\infty} e^{1-x}dx$;

ლ) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2}dx$;

მ) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+2}dx$.

ნ) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$;

ო) $\int_0^{+\infty} 2xe^{-3x}dx$;

პ) $\int_0^{+\infty} xe^{1-x}dx$;

ჟ) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.

2. გამოთვალეთ იმ უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია :

   ა) $x = -3$ წრფით, აბსცისათა ღერძით და $y = 2e^{-x}$ $(x \geq -3)$ ფუნქციის გრაფიკით;

   ბ) აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებით და $y = -3e^{-x}$ $(x \geq 0)$ ფუნქციის გრაფიკით.

3. მეწარმემ დაადგინა, რომ კომპანიაში განხორციელებული ინვესტიცია მას მოუტანს ყოველწლიურად 2400 ევროს შემოსავალს განუსაზღვრელი ვადით. გამოთვალეთ ინვესტირებული თანხის საწყისი ღირებულება(PV), თუ წლიური რთული განაკვეთი მუდმივად 4%-ის ტოლია უწყვეტი დარიცხვით.

4. ინვესტორი შემოუსაზღვრელი ვადით ყოველწლიურად იღებს თანხას 5000 ლარის ინტენსივობით. გამოთვალეთ ამ შემოსავლის ნაკადის საწყისი ღირებულება, თუ წლიური რთული განაკვეთია 6%-ის უწყვეტი დარიცხვით.

5. დადგენილია, რომ საცხოვრებელი კომპლექსის იჯარა მის მფლობელს t წლის განმავლობაში ყოველწლიურად მოუტანს $f(t) = 10000 + 500t$ ლარის მოგებას. თუ მოგება მიიღება განუსაზღვრელი ვადით და წლიური რთული განაკვეთი მუდმივად 5%-ის ტოლია უწყვეტი დარიცხვით, რას უდრის საცხოვრებელი კომპლექსის იჯარის საწყისი ღირებულება?

ლექცია 22

დიფერენციალური განტოლებები

22.1 დიფერენციალური განტოლების ცნება

განტოლებას, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დამოუკიდებელ ცვლადს, საძიებელ $y = f(x)$ ფუნქციას და მის სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს, ეწოდება **დიფერენციალური განტოლება**.

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება n-ური რიგის, თუ მასში მონაწილე საძიებელი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლესი რიგია n.

მაგალითად, განტოლებები

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5, \qquad \frac{dP}{dt} = kP \quad \text{და} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

დიფერენციალური განტოლებებია.

დიფერენციალური განტოლებები წარმოადგენენ ერთ-ერთ ყველაზე სასარგებლო ინსტრუმენტს უწყვეტი პროცესების მოდელირებისათვის. მოსახლეობის დინამიკა, ქიმიური კინეტიკა, დაავადებათა გავრცელება, ეკონომიკის ყოფაქცევა, ეკოლოგია და ინფორმაციის გადაცემა-ეს გახლავთ მხოლოდ მცირე ნაწილი ფიზიკური, ეკონომიკური, სოციალური, სიცოცხლის შემსწავლელი მეცნიერების დარგებისა, რომელთა შესწავლა შესაძლებელია დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით.

უმარტივეს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{22.1}$$

რომელშიც y სიდიდის წარმოებული მოცემულია ცხადად, როგორც დამოუკიდებელი x ცვლადის ფუნქცია.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება რიცხვით შუალედზე განსაზღვრულ ისეთ $y = y(x)$ ფუნქციას, რომელიც მოცემულ განტოლებაში უცნობი ფუნქციის ნაცვლად მისი ჩასმით ამ განტოლებას იგივურ ტოლობად აქცევს.

ცხადია, (22.1) განტოლების ამონახსნის საპოვნელად უნდა მოვახდინოთ მისი ინტეგრება. მივიღებთ:

$$y = G(x) + C, \tag{22.2}$$

სადაც $G(x)$ ფუნქცია $g(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადია, ხოლო C- ნებისმიერი მუდმივი. გამოსახულება (22.2) წარმოადგენს (22.1) განტოლების **ზოგად ამონახსნს**, რაც იმას ნიშნავს, რომ იგი არის (22.1)-ის ამონახსნი C-ს ნებისმიერი ნამდვილი

მნიშვნელობისათვის. C-ს კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმის შედეგად მიღებულ ამონახსნს კი ეწოდება **კერძო ამონახსნი**.

ანალოგიურად განიმარტება მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი და კერძო ამონახსნებიც.

მაგალითი 22.1 *ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x$$

ზოგადი ამონახსნი და ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობას: $y = 2$, როცა $x = 1$.

ამოხსნა. *მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად ვაინტეგროთ მისი ორივე მხარე. მივიღებთ:*

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int \left(x^2 + 3x\right) dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C. \end{aligned}$$

კერძო ამონახსნის საპოვნელად ჩავსვათ ზოგად ამონახსნში $y = 2$ და $x = 1$ მნიშვნელობები. გვექნება:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 + C, \\ C &= 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

მაშასადამე, განტოლების კერძო ამონახსნია

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}.$$

22.2 განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

ამ განტოლების ორივე მხარის ინტეგრებით შესაძლებელია მივიღოთ მისი ზოგადი ამონახსნი

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

მაგალითი 22.2 *ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$$

ზოგადი ამონახსნი

ამოხსნა. *განვაცალკევოთ ცვლადები და მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:*

$$y^2 dy = 2xdx.$$

მიღებული განტოლების ორივე მხარის ინტეგრებით გვექნება:

$$\begin{gathered}\int y^2 dy = \int 2xdx,\\ \tfrac{1}{3}y^3 + C_1 = x^2 + C_2,\end{gathered}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. y-ის მიმართ ამოხსნით საბოლოოდ მივიღებთ განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}y^3 &= x^2 + (C_2 - C_1) = x^2 + C_3,\\ y^3 &= 3x^2 + 3C_3 = 3x^2 + C,\\ y &= \left(3x^2 + C\right)^{1/3}.\end{aligned}$$

22.3 პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{22.3}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში. როდესაც $Q(x) \equiv 0$, მაშინ (22.3) განტოლებას ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში- არაერთგვაროვანი. მტკიცდება, რომ (22.3) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \tag{22.4}$$

მაგალითი 22.3 *ამოვხსნათ განტოლება*

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = x$$

ამოხსნა. *აქ*

$$P(x) = -\frac{x}{1+x^2}, \quad Q(x) = x.$$

(22.4) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{xdx}{1+x^2}} \left[C + \int x\mathrm{e}^{-\int \frac{xdx}{1+x^2}} dx \right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)} \left[C + \int x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)} dx \right] =$$
$$= \sqrt{1+x^2} \left[C + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \right] = \sqrt{1+x^2} \left(C + \sqrt{1+x^2} \right),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

22.4 მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{22.5}$$

სადაც a, b და c მუდმივებია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ განტოლებას დააკმაყოფილებს $y = e^{rx}$ ($r \in R$) სახის ფუნქცია, თუ

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{22.6}$$

(22.6) განტოლებას ეწოდება $ay'' + by' + cy = 0$ დიფერენციალური განტოლების **მახასიათებელი განტოლება.** როგორც ვხედავთ, მახასიათებელი განტოლება არის კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{და} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

დისკრიმინანტის მნიშვნელობიდან გამომდინარე, აქ შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

შემთხვევა 1: $b^2 - 4ac > 0$. ამ დროს მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ორი ნამდვილი და განსხვავებული ფესვი r_1 და r_2. მტკიცდება, რომ ამ შემთხვევაში $ay'' + by' + cy = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 22.4 *ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების*

$$y'' - y' - 6y = 0$$

ზოგადი ამონახსნი

ამოხსნა. *მახასიათებელ განტოლებას ექნება სახე:* $r^2 - r - 6 = 0$. *მისი ფესვებია* $r_1 = 3$ *და* $r_2 = -2$. *ამის გამო*

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

შემთხვევა 2: $b^2 - 4ac = 0$. ამ დროს მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ერთი ფესვი, ანუ, როგორც ზოგჯერ ამბობენ, ორი ერთნაირი ნამდვილი ფესვი(ჯერადი ფესვი) $r_1 = r_2 = r = -b/2a$. მტკიცდება, რომ ამ შემთხვევაში $ay'' + by' + cy = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

მაგალითი 22.5 *ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

ზოგადი ამონახსნი

ამოხსნა. *მახასიათებელ განტოლებას ექნება სახე:* $r^2 + 4r + 4 = 0$, *რომელიც* $(r+2)^2 = 0$ *განტოლების ეკვივალენტურია. ამგვარად,* $r = -2$ *არის ჯერადი ფესვი. ამის გამო*

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

შემთხვევა 3: $b^2 - 4ac < 0$. ამ დროს მახასიათებელ განტოლებას არ გააჩნია ნამდვილი ფესვები და ამიტომ ამ შემთხვევას ჩვენ არ განვიხილავთ.

22.5 დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება ეკონომიკაში

განვიხილოთ რამდენიმე ეკონომიკური ხასიათის ამოცანა, რომლის ამოხსნაც შესაძლებელი იქნება დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით.

1. **წარმოების თეორიის ძირითადი კანონი.** ვისარგებლოთ წარმოების თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი კანონით,რომლის თანახმადაც წარმოების ყველაზე მაღალი ეკონომიკური დონე მაშინ მიიღწევა, როცა საშუალო და ზღვრული დანახარჯები ტოლია, და დავადგინოთ მთლიანი დანახარჯების ფუნქციის სახე.

გავიხსენოთ ჩვენი ადრინდელი აღნიშვნები: წარმოების მთლიანი დანახარჯი აღვნიშნეთ TC(Q) -თი, სადაც Q საქონლის რაოდენობაა, საშუალო დანახარჯი- $AC = \frac{TC}{Q}$,

ხოლო ზღვრული, ანუ მარგინალური დანახარჯი MC განვსაზღვრეთ, როგორც $(MC) = \frac{d(TC)}{dQ} = (TC)'$. წარმოების თეორიის ძირითადი კანონის თანახმად გვაქვს

$$AC(Q) = MC(Q), \quad \text{ანუ} \quad \frac{TC(Q)}{Q} = TC'(Q).$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.ამოვხსნათ იგი. გვაქვს

$$\frac{TC(Q)}{Q} = \frac{d(TC(Q))}{dQ}, \quad \text{ანუ} \quad \frac{d(TC(Q))}{TC(Q)} = \frac{dQ}{Q}.$$

ვაინტეგროთ უკანასკნელი ტოლობა. გვექნება:

$$\int \frac{d(TC(Q))}{TC(Q)} = \int \frac{dQ}{Q}.$$

აქედან $ln(TC) = lnkQ$, ანუ $TC = kQ$, სადაც k ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად, დანახარჯები დამზადებული საქონლის რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია.

2. **წონასწორობის ფასის განსაზღვრა.** განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიკური ამოცანა: დასაწყისში საქონლის ფასი იყო 36 ლარი. t კვირის შემდეგ ფასი, როგორც დროის ფუნქცია, გახდა $p(t)$ ლარი. ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქციაა

$$Q = 120 - 2p + 5\frac{dp}{dt},$$

ხოლო მიწოდების ფუნქციაა

$$S = -30 + 3p + 50\frac{dp}{dt}.$$

განვსაზღვროთ წონასწორობის ფასი : 1) t კვირის შემდეგ; 2) $t = 3$ კვირის შემდეგ.

როგორც ვიცით, წონასწორობის ფასი მიიღწევა, როცა მოთხოვნა უტოლდება მიწოდებას:

$$Q = S,$$

ე.ი.

$$120 - 2p + 5\frac{dp}{dt} = -30 + 3p + 50\frac{dp}{dt}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება p-ს მიმართ. მისი გამარტივებით მივიღებთ

$$45\frac{dp}{dt} = -5p + 150, \quad \text{ანუ} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{9}(p - 30).$$

განვაცალოთ ცვლადები:

$$\frac{dp}{p - 30} = -\frac{1}{9}dt.$$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე:

$$\int \frac{dp}{p - 30} = -\frac{1}{9}t,$$

საიდანაც

$$\ln\frac{p-30}{C}=-\frac{1}{9}t,$$

ანუ

$$\frac{p-30}{C}=e^{-\frac{1}{9}t}.$$

საბოლოოდ

$$p=Ce^{-\frac{1}{9}t}+30.$$

C მუდმივის განსაზღვრის მიზნით გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, როცა $t=0$, მაშინ $p=36$. ჩავსვათ, მივიღებთ:

$$36=Ce^{0}+30 \quad \Rightarrow \quad C=6 \quad \text{ე.ი.} \quad p=6e^{-\frac{1}{9}t}+30.$$

აქედან კი მარტივად განვსაზღვრავთ $t=3$ კვირის შემდეგ წონასწორული ფასის მნიშვნელობას- $p=34.3$.

22.6 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $f(x)$, თუ:

   ა) $y=2sinx$ წარმოადგენს $y'-y\cos x=f(x)$ განტოლების ამონახსნს;

   ბ) $y=xe^{x}$ წარმოადგენს $y''-2y=f(x)$ განტოლების ამონახსნს.

2. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნები

   ა) $\frac{dy}{dx}=3x^2+5x-6$;

   ბ) $\frac{dP}{dt}=\sqrt{t}+e^{-t}$;

   გ) $\frac{dy}{dx}=3y$;

   დ) $\frac{dy}{dx}=y^2$;

   ე) $\frac{dy}{dx}=e^{y}$;

   ვ) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$;

   ზ) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$;

   თ) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$;

   ი) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{xy}$;

   კ) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+4}{xy}$.

3. იპოვეთ განცალებადცვლადებიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნები

   ა) $y^2y'-5x=0$;

   ბ) $2y^2y'-x^2=0$;

   გ) $5y^4y'-2x^{\frac{3}{2}}=0$;

   დ) $y'-e^{5x-2y}=0$.

4. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ საწყის პირობებს

   ა) $\frac{dy}{dx} = e^{5x}; y = 1$, როცა $x = 0$;

   ბ) $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 - 2; y = 4$, როცა $x = 1$;

   გ) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}; y = 3$, როცა $x = 2$;

   დ) $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^2; y = 2$, როცა $x = 1$;

   ე) $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}; y = 2$, როცა $x = 4$.

5. ამოხსენით პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

   ა) $y' + 2y + 3 = 0$;

   ბ) $y' - y - 6x^2 = 0$;

   გ) $y' - 3y = 2e^{3x} - 3$;

   დ) $y' - 5xy = x^2e^{\frac{5x^2}{2}}$;

   ე) $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$.

6. იპოვეთ მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნები

   ა) $y'' + 7y' - 8y = 0$;

   ბ) $y'' - 8y' + 7y = 0$;

   გ) $y'' - 2y' + y = 0$;

   დ) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

ლექცია 23

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

ბიზნესსა და ეკონომიკაში ხშირად ვხვდებით ისეთ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტა შესაძლებელია მხოლოდ მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის დახმარებით.

ვთქვათ, მწარმოებელმა დაადგინა, რომ მის მიერ გამოშვებული პროდუქტის x რაოდენობა შიდა ბაზარზე შეიძლება გაიყიდოს ცალი 35 ლარად, ხოლო გარე ბაზარზე შესაძლებელია y რაოდენობის გაყიდვა 52 ლარად. მაშინ, ამ გაყიდვებით მიღებული მთლიანი შემოსავალი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$R = 35x + 52y.$$

ფსიქოლოგიაში ადამიანის ინტელექტის კოეფიციენტი (IQ) იზომება შემდეგი ფარდობის საშუალებით:

$$IQ = \frac{100m}{a},$$

სადაც m და a წარმოადგენენ, შესაბამისად, ადამიანის გონებრივ(მენტალურ) და რეალურ ასაკს.

დურგალმა, რომელიც ამზადებს x სმ სიგრძის, y სმ სიგანის და z სმ სიღრმის სკივრს, იცის, რომ ამ სკივრს ექნება $V = xyz$ მოცულობა და $S = 2xy + 2xz + 2yz$ გვერდითი ზედაპირი.

ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ ორი ცვლადის ფუნქციებს, რომელნიც, როგორც ვნახავთ, განსხვავებით წირებისაგან სიბრტყეზე, გეომეტრიულად წარმოადგენენ ზედაპირებს სამგანზომილებიან სივრცეში.

23.1 ორი ცვლადის ფუნქცია

ორი დამოუკიდებელი x და y ცვლადის f ფუნქცია წარმოადგენს წესს, რომელიც ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ $(x;y)$ წყვილს მოცემული D სიმრავლიდან(ანუ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან) შეუსაბამებს ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს, რომელიც აღინიშნება $f(x;y)$-ით.

შევთანხმდეთ, რომ თუ რაიმე კონკრეტული პირობაა არაა მოცემული, f ფუნქციის განსაზღვრის არედ ჩავთვალოთ ყველა ისეთ $(x;y)$ წყვილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც განსაზღვრულია $f(x;y)$ გამოსახულება.

მაგალითი 23.1 *მოცემულია*

$$f(x,y) = \frac{3x^2+5y}{x-y}.$$

ა) ვიპოვოთ f ფუნქციის განსაზღვრის არე;

ბ) გამოვთვალოთ $f(1;-2)$.

ამოხსნა. *ა) ცხადია, $f(x;y)$ გამოსახულებას აზრი აქვს ყველა იმ $(x;y)$ დალაგებული წყვილისთვის, რომელთათვისაც $x-y \neq 0$ ან $x \neq y$. გეომეტრიულად, ეს არის xy საკოორდინატო სიბრტყის ყველა წერტილი, გარდა $y = x$ წრფის წერტილებისა.*

ბ)

$$f(1,-2) = \frac{3(1)^2+5(-2)}{1-(-2)} = \frac{3-10}{1+2} = -\frac{7}{3}.$$

მაგალითი 23.2 *მოცემულია*

$$f(x,y) = xe^y + lnx.$$

ა) ვიპოვოთ f ფუნქციის განსაზღვრის არე;

ბ) გამოვთვალოთ $f(e^2;\ln 2)$.

ამოხსნა. *ა) ვინაიდან xe^y ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი x და y ნამდვილი რიცხვისთვის, ხოლო lnx განსაზღვრულია მხოლოდ მაშინ, როცა $x > 0$, ცხადია, $f(x;y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება ყველა იმ $(x;y)$ დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $x > 0$ და y ნებისმიერია.*

ბ)

$$f(e^2;\ln 2) = e^2e^{ln2} + lne^2 = 2e^2+2 = 2(e^2+1).$$

მაგალითი 23.3 *მოცემული სამი ცვლადის*

$$f(x,y,z) = xy+xz+yz$$

ფუნქციისთვის ვიპოვოთ $f(-1;2;5)$.

ამოხსნა. *ჩავსვათ $x=-1$, $y=2$, $z=5$ მნიშვნელობები $f(x,y,z)$ ფუნქციაში. მივიღებთ:*

$$f(-1;2;5) = (-1)(2)+(-1)(5)+(2)(5) = 3.$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს ეკონომიკასა და ბიზნესში მრავალი ცვლადის ფუნქციის გამოყენების საჭიროებას.

წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობა, როგორც წესი, დამოკიდებულია სხვადასხვა ფაქტორზე. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ის დამოკიდებულია მხოლოდ კაპიტალზე (K) და შრომაზე (L). ასეთ შემთხვევაში ფუნქციას

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

სადაც A, α და β დადებითი რიცხვებია და $\alpha + \beta = 1$, ეკონომიკაში ეწოდება **ქობ-დაგლასის (Cobb-Douglas) საწარმოო ფუნქცია**.

მაგალითი 23.4 *ვთქვათ, ქარხანაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გამოისახება ქობ-დაგლასის შემდეგი ფუნქციის საშუალებით:* $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, *სადაც* K *არის ინვესტირებული კაპიტალი(ათას ერთეულში), ხოლო* L *სამუშაო დროის რაოდენობა.*

ა) გამოვთავლოთ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა , თუ ინვესტირებულია 512000 ლარი და გამოყენებულია მუშახელის 1000 სამუშაო საათი.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ ა) პუნქტში მიღებული შედეგი გაორმაგდება, თუ გავაორმაგებთ ინვესტირებულ თანხასა და მუშახელის სამუშაო დროს.

ამოხსნა. *ა) შევაფასოთ* $Q(K,L)$ *როცა* $K = 512$*(ათასი) და* $L = 1000$. *მივიღებთ:*

$$Q(512, 1000) = 60(512)^{\frac{1}{3}}(1000)^{\frac{2}{3}} = 60(8)(100) = 48000$$

(ათასი ერთეული).

ბ) შევაფასოთ $Q(K,L)$ *როცა* $K = 2(512)$*(ათასი) და* $L = 2(1000)$. *გვექნება:*

$$Q[2(512), 2(1000)] = 60[2(512)]^{\frac{1}{3}}[2(1000)]^{\frac{2}{3}} = 96000$$

(ათასი ერთეული).

როგორც ვხედავთ, კაპიტალისა და სამუშაო დროის გაორმაგებამ გამოიწვია გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის გაორმაგებაც.

მაგალითი 23.5 *ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობის ზრდა გამოისახება ექსპონენციალური ფუნქციით:*

$$P(A;k;t) = Ae^{kt},$$

სადაც P *არის პოპულაცია დროის* t *მომენტში,* A*- საწყისი პოპულაცია(როცა* $t = 0$*), ხოლო* K*- მოსახლეობის ფარდობითი(ერთ სულ მოსახლეზე) ზრდის ტემპი. თუ ქვეყნის მოსახლეობა ამჟამად 5 მილიონს შეადგენს და ის იზრდება 3%-ით წელიწადში, რამდენი იქნება ქვეყნის პოპულაცია 7 წლის შემდეგ?*

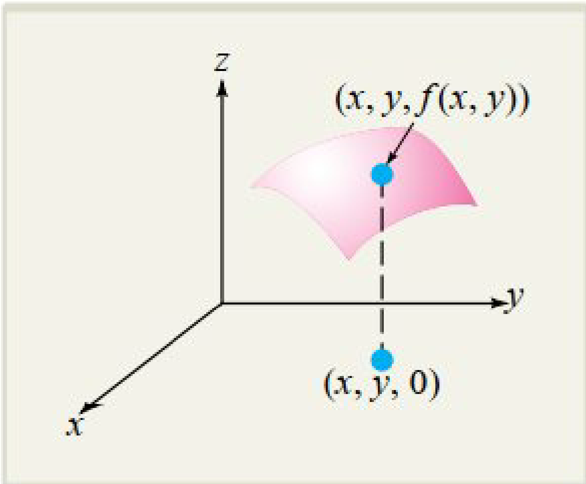
ამოხსნა. *ვთქვათ,* P *იზომება მილიონებით. ჩავსვათ პოპულაციის ფუნქციაში* $A = 5$, $k = 0.03$*(3%-იანი წლიური ზრდა) და* $t = 7$. *მივიღებთ:*

$$P(5; 0.03; 7) = 5e^{0.03(7)} \approx 6.16839.$$

მაშასადამე, 7 წლის მერე ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობა იქნება დაახლოებით 6168400.

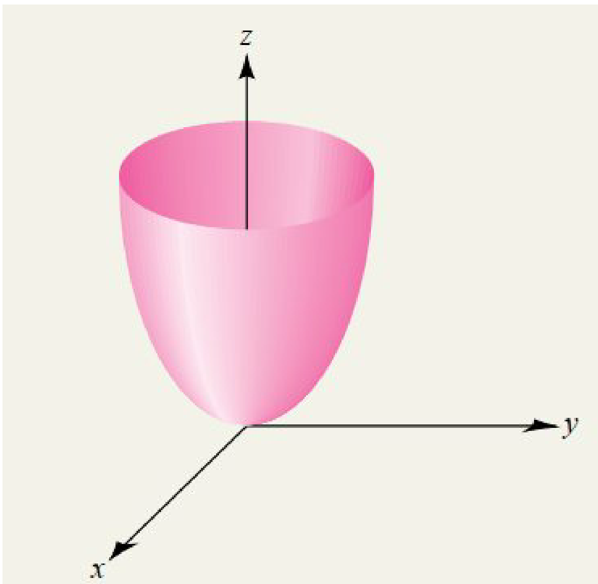
23.2 ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი

ვნახოთ, რას წარმოადგენს გეომეტრიულად ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი. ვთქვათ, მოცემულია $z = f(x;y)$. ავიღოთ სივრცეში დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $OXYZ$ სისტემა და განვიხილოთ $(x;y;z)$ სამეული, რომელშიც $(x,y) \in D(f)$, ხოლო $z = f(x;y)$. ყველა ასეთი $(x;y;f(x;y))$ წერტილების ერთობლიობა წარმოადგენს გარკვეულ ზედაპირს სივრცეში და $z = f(x;y)$ თანაფარდობას ეწოდება ამ ზედაპირის განტოლება(სურ.23.1)



სურ 23.1

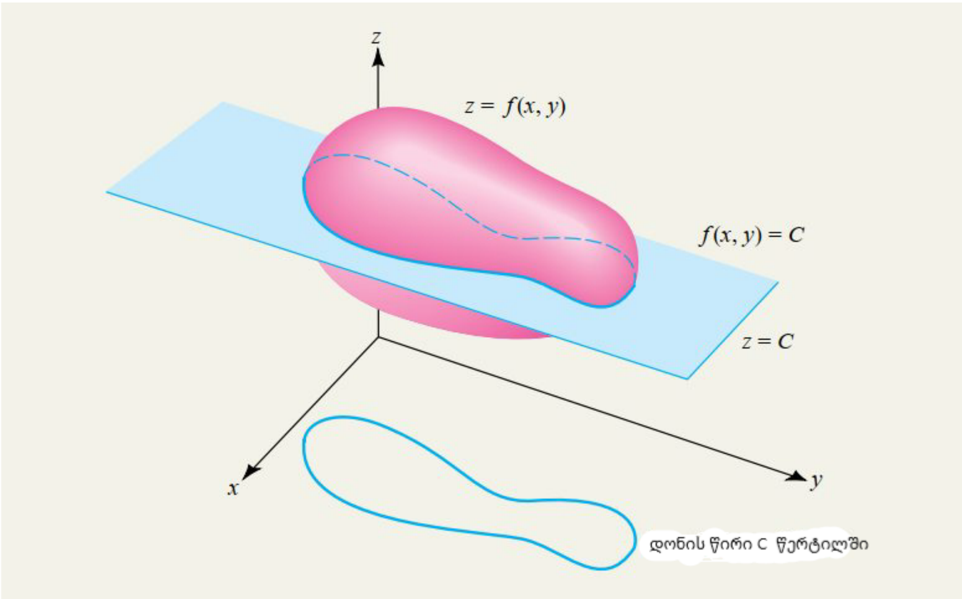
მაგალითად, $z = x^2 + y^2$ განტოლების შესაბამის ზედაპირს ეწოდება პარაბოლოიდი(სურ.23.2)



სურ 23.2

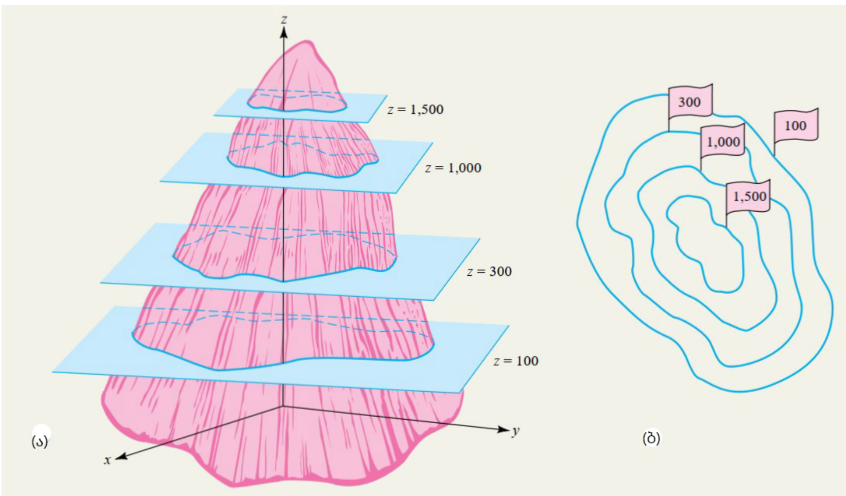
23.3 დონის წირები და მათი გამოყენება ეკონომიკაში

საზოგადოდ, ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის აგება არაა იოლი საქმე. ერთ-ერთი მეთოდი სივრცეში ზედაპირის ვიზუალიზაციისა ნაჩვენებია სურ.23.3-ზე.



სურ 23.3

მივაქციოთ ყურადღება, რომ როცა $z = C$ სიბრტყე კვეთს $z = f(x;y)$ ზედაპირს, სივრცეში მიიღება წირი. შესაბამის $(x;y)$ წერტილთა სიმრავლეს XY საკოორდინატო სიბრტყიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ $f(x;y) = C$ განტოლებას, ეწოდება f ფუნქციის **დონის წირი** C წერტილში. როდესაც C ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობებს f ფუნქციის მნიშვნელობათა არიდან, წარმოიქმნება დონის წირთა ოჯახი. XY სიბრტყეზე ამ ოჯახის წირების დახატვით შეგვიძლია შევიქმნათ სასარგებლო წარმოდგენები $z = f(x;y)$ ზედაპირის შესახებ. მაგალითად, წარმოვიდგინოთ, რომ $z = f(x;y)$ ზედაპირი წარმოადგენს''მთას''(''მთას'' ვამბობთ შემოკლების მიზნით, ცხადია, იგულისხმება მთის ზედაპირი)(სურ. 22.4 (ა)).



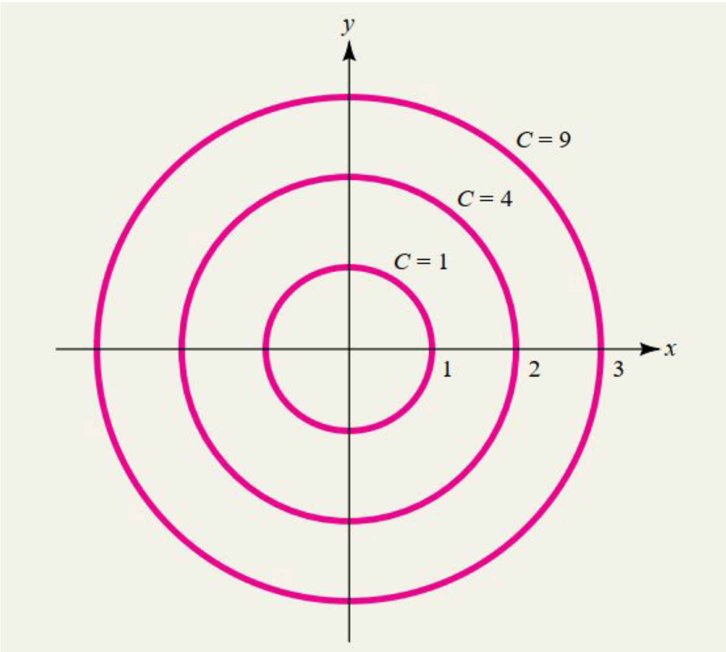
სურ 23.4

$f(x;y) = C$ დონის წირი მდებარეობს უშუალოდ ''მთის'' იმ ბილიკის ქვემოთ, სადაც სიმაღლე მუდმივად C-ს ტოლია. ''მთის'' გრაფიკის ასაგებად შეგვიძლია მივუთითოთ სწორედ ეს ბილიკები, დავხატავთ რა მათ სიბრტყეზე და ყოველ წირზე ალმის საშუალებით მოვნიშნავთ იმ სიმაღლეს, რომელსაც ეს წირი შეესაბამება. ასეთნაირად მიღებულ ბრტყელ ფიგურას $z = f(x;y)$ ზედაპირის **ტოპოგრაფიული რუკა** ეწოდება(სურ. 22.4 (ბ)).

მაგალითი 23.6 *გავაანალიზოთ $f(x;y) = x^2 + y^2$ ფუნქციის დონის წირები.*

ამოხსნა. *$f(x;y) = C$ დონის წირის განტოლება იქნება $x^2 + y^2 = C$. თუ $(C = 0)$, ეს წირი იქნება $(0;0)$ წერტილი, ხოლო როცა $C > 0$, მაშინ დონის წირები იქნება წრეწირები ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეზე და რადიუსით $\sqrt{C}$. ცხადია, როცა $C < 0$, $x^2 + y^2 = C$ განტოლების ნამდვილი ამონახსნები არ არსებობენ.*

სურ. 23.5-ზე მოცემულია $f(x;y) = x^2 + y^2$ ფუნქციის დონის წირები, რომელსაც მივიღებთ (სურ.23.2)-ზე მოცემული პარაბოლოიდის OZ ღერძის მართობულ სიბრტყეებთან გადაკვეთის შედეგად.



სურ 23.5

დონის წირები წარმატებით გამოიყენება ეკონომიკაში. მაგალითად, თუ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის ფუნქცია $Q(x;y)$ დამოკიდებულია ორ პარამეტრზე(ვთქვათ, სამუშაო საათებსა და ინვესტირებულ კაპიტალზე), მაშინ $Q(x;y) = C$ დონის წირს ეწოდება მუდმივი C წარმოების წირი, ან, მოკლედ, **იზოქვანტი**.

კიდევ ერთი გამოყენება დონის წირებისა ეკონომიკაში დაკავშირებულია ე.წ. განურჩევლობის მრუდების კონცეფციასთან. მომხმარებელი, რომელიც განიხილავს ორი პროდუქტის რამდენიმე ერთეულის შესყიდვის შესაძლებლობას, ასოცირდება სარგებლიანობის $U(x;y)$ ფუნქციასთან, რომელიც ზომავს იმ საერთო კმაყოფილებას(ან სარგებლიანობას), რასაც მომხმარებელი იღებს პირველი პროდუქტის x ერთეულის და

მეორე პროდუქტის y ერთეულის შეძენით. სარგებლიანობის ფუნქციის $U(x;y) = C$ დონის წირს ეწოდება განურჩევლობის მრუდი და ის იძლევა x და y-ის ყველა იმ კომბინაციას, რომლებიც იწვევენ მომხმარებლის კმაყოფილების ერთსა და იმავე დონეს.

მაგალითი 23.7 *ვთქვათ, სარგებლიანობა(კმაყოფილება), რომელსაც იღებს მომხმარებელი პირველი პროდუქტის x ერთეულის და მეორე პროდუქტის y ერთეულის შეძენით, გამოისახება $U(x;y) = x^{\frac{3}{2}}y$ სარგებლიანობის ფუნქციით. ვიპოვოთ მომხმარებლის კმაყოფილების დონე იმ შემთხვევაში, როცა ის ფლობს პირველი პროდუქტის $x = 16$ ერთეულს და მეორე პროდუქტის $y = 20$ ერთეულს. ავაგოთ შესაბამისი განურჩევლობის მრუდი.*

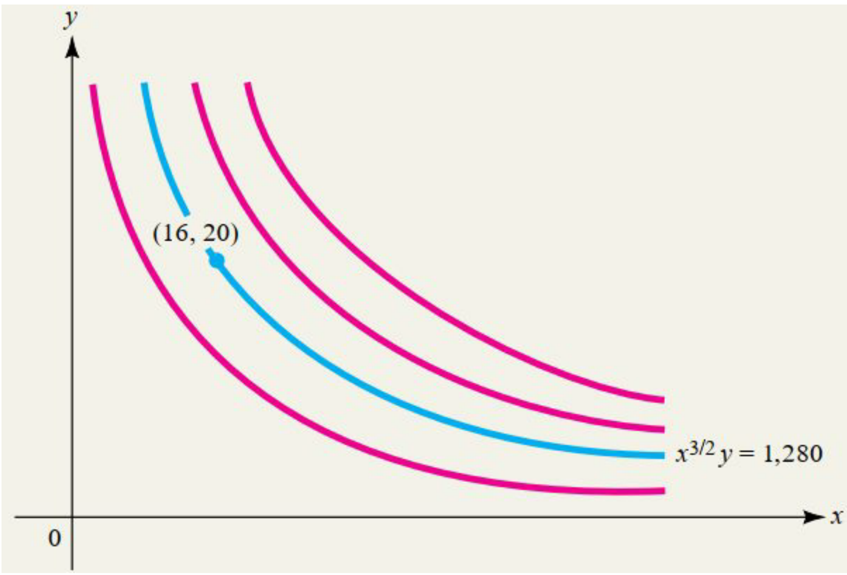
ამოხსნა. *სარგებლიანობის მიმდინარე დონეა*

$$U(16;20) = (16)^{\frac{3}{2}}(20) = 1280,$$

ხოლო შესაბამის განურჩევლობის მრუდის განტოლებას ექნება სახე:

$$x^{\frac{3}{2}}y = 1280,$$

ანუ, $y = 1280x^{-\frac{3}{2}}$. ეს წირი შეიცავს ყველა იმ $(x;y)$ წერტილს, რომლებზეც კმაყოფილების დონე $U(x;y)$ არის 1280. $x^{\frac{3}{2}}y = 1280$ წირი და რამდენიმე სხვა წირი $x^{\frac{3}{2}}y = C$ წირთა ოჯახიდან მოცემულია სურ.23.6-ზე.



სურ 23.6

23.4 სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობები მითითებულ წერტილებზე

   ა) $f(x,y) = 5x + 3y; f(-1,2), f(3,0)$

ბ) $f(x,y)=x^2+x-4y; f(1,3), f(2,-1)$

გ) $g(x,y)=x\left(y-x^3\right); g(1,1)$

დ) $f(x,y)=\frac{3x+2y}{2x+3y}; f(1,2)$

ე) $g(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}; g(4,5)$

ვ) $g(u,v)=10u^{1/2}v^{2/3}; g(16,27)$

ზ) $f(r,s)=\frac{s}{\ln r}; f\left(e^2,3\right), f\left(\ln 9, e^3\right)$

თ) $f(x,y)=xye^{xy}; f(1,\ln 2)$

ი) $g(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}; g(1,2)$

კ) $f(s,t)=\frac{e^{st}}{2-e^{st}}; f(1,0), f(\ln 2,2)$

ლ) $f(x,y,z)=xyz; f(1,2,3)$

მ) $g(x,y,z)=(x+y)e^{yz}; g(1,0,-1), g(1,1,2)$

ნ) $F(r,s,t)=\frac{\ln(r+t)}{r+s+t}; F\left(0,e^2,3e^2\right)$

ო) $f(x,y,z)=xye^z+xze^y+yze^x$; $f(1,1,1), f(\ln 2,\ln 3,\ln 4)$

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე

ა) $f(x,y)=\frac{5x+2y}{4x+3y}$

ბ) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

გ) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y}$

დ) $f(x,y)=\frac{x}{\ln(x+y)}$

ე) $f(x,y)=\ln(x+y-4)$

ვ) $f(x,y)=\frac{e^{xy}}{\sqrt{x-2y}}$

3. ააგეთ მოცემული $f(x;y)=C$ დონის წირები C-ს მითითებული მნიშვნელობებისთვის

ა) $f(x,y)=x+2y; C=1, C=2, C=-3$

ბ) $f(x,y)=x^2+y; C=0, C=4, C=9$

გ) $f(x,y)=x^2-4x-y; C=-4, C=5$

დ) $f(x,y)=\frac{x}{y}; C=-2, C=2$

ე) $f(x,y)=xy; C=1, C=-1, C=2, C=-2$

4. ვთქვათ, ქარხანაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გამოისახება ქობდაგლასის ფუნქციის საშუალებით $Q(K,L)=120K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, სადაც K არის ინვესტირებული კაპიტალი(ათას ერთეულში), ხოლო L სამუშაო დროის რაოდენობა.

ა) გამოთვალეთ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა , თუ ინვესტირებულია 125000 ლარი და გამოყენებულია მუშახელის 1331 სამუშაო საათი.

ბ) გაარკვიეთ, რა მოუვა ა) პუნქტში მიღებულ შედეგს, თუ ინვესტირებული თანხა და მუშახელის სამუშაო დრო განახევრდება.

5. როდესაც ქარხანა ყოველდღიურად იყენებს x რაოდენობა ჩარხსა და y სამუშაო საათს,მაშინ ის უშვებს $Q(x;y) = 10xy$ ფიჭურ ტელეფონს. აღწერეთ დამოკიდებულება x და y პარამეტრებს შორის იმ შემთხვევაში, როცა ქარხანა ყოველდღიურად უშვებს 1000 ერთეულ ტელეფონს.(მითითება: უნდა იპოვოთ Q ფუნქციის დონის წირი).

6. ვთქვათ, სარგებლიანობა(კმაყოფილება), რომელსაც იღებს მომხმარებელი პირველი პროდუქტის x ერთეულის და მეორე პროდუქტის y ერთეულის შეძენით, გამოისახება $U(x;y) = 2x^3y^2$ სარგებლიანობის ფუნქციით. იპოვეთ მომხმარებლის კმაყოფილების დონე იმ შემთხვევაში, როცა ის ფლობს პირველი პროდუქტის $x = 5$ ერთეულს და მეორე პროდუქტის $y = 4$ ერთეულს. ააგეთ შესაბამისი განურჩევლობის მრუდი.

7. ვთქვათ, სარგებლიანობა(კმაყოფილება), რომელსაც იღებს მომხმარებელი პირველი პროდუქტის x ერთეულის და მეორე პროდუქტის y ერთეულის შეძენით, გამოისახება $U(x;y) = (x+1)(y+2)$ სარგებლიანობის ფუნქციით. იპოვეთ მომხმარებლის კმაყოფილების დონე იმ შემთხვევაში, როცა ის ფლობს პირველი პროდუქტის $x = 25$ ერთეულს და მეორე პროდუქტის $y = 8$ ერთეულს. ააგეთ შესაბამისი განურჩევლობის მრუდი.

ლექცია 24

ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

ორი ცვლადის ფუნქციებთან დაკავშირებულ ამოცანებში, ხშირად საჭიროა ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის პოვნა ერთ-ერთი ცვლადის მიმართ, მაშინ როცა მეორე ცვლადი მუდმივია. ცხადია, ეს ნიშნავს იმას, რომ ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული კონკრეტული ცვლადის მიმართ, მაშინ როცა მეორე ცვლადი დაფიქსირებულია. ეს პროცესი ცნობილია კერძო გაწარმოების სახელით, ხოლო მოღებულ წარმოებულს ეწოდება **ფუნქციის კერძო წარმოებული** შესაბამისი ცვლადით.

მაგალითად, მწარმოებელმა დაადგინა, რომ შესაძლებელია გარკვეული საქონლის

$$Q(x;y) = 5x^2 + 7xy$$

ერთეულის გამოშვება, თუ ის დაიქირავებს, შესაბამისად, x და y რაოდენობის კვალიფიციურ და არაკვალიფიციურ მუშახელს. შემდგომ, თუ არაკვალიფიციური მუშახელის რაოდენობა იქნება ფიქსირებული(ანუ მუდმივი), მაშინ წარმოების სიჩქარე კვალიფიციური მუშახელის რაოდენობასთან მიმართებით, გამოითვლება $Q(x;y)$-ის გაწარმოებით x ცვლადის მიმართ y ცვლადის მუდმივი მნიშვნელობების შენარჩუნებით. ამას ჩვენ ვუწოდებთ $Q(x;y)$ **ფუნქციის კერძო წარმოებულს** x **ცვლადის მიმართ** და აღვნიშნავთ $Q_x(x;y)$-ით. მაშასადამე,

$$Q_x(x;y) = 5(2x) + 7(1)y = 10x + 7y.$$

ანალოგიურად, თუ კვალიფიციური მუშახელის რაოდენობა იქნება მუდმივი, მაშინ წარმოების სიჩქარე არაკვალიფიციური მუშახელის რაოდენობის მიმართ მოიცემა Q ფუნქციის კერძო წარმოებულით y ცვლადის მიმართ, ანუ $Q(x;y)$-ის გაწარმოებით თ, როცა x ცვლადი მუდმივია. მივიღებთ:

$$Q_y(x;y) = (0) + 7x(1) = 7x.$$

მოვიყვანოთ კერძო წარმოებულების ზოგადი განსაზღვრებები.

24.1 კერძო წარმოებულები

ვთქვათ, $z = f(x;y)$. f ფუნქციის კერძო წარმოებული x-ით აღინიშნება

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ან} \quad f_x(x,y)$$

და წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც მიიღება f-ის გაწარმოებით x ცვლადის მიმართ, როცა y ცვლადი დაფიქსირებულია. თუ გავიხსენებთ ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრებას, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

f ფუნქციის კერძო წარმოებული y-ით აღინიშნება

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{ან} \quad f_y(x,y)$$

და წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც მიიღება f-ის გაწარმოებით y ცვლადის მიმართ, როცა x ცვლადი დაფიქსირებულია. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

შევნიშნოთ, რომ კერძო წარმოებულებს ზოგჯერ ასეც აღნიშნავენ:

$$f'_x(x,y) \quad \text{და} \quad f'_y(x,y).$$

მაგალითი 24.1 *გამოვთვალოთ $f(x;y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები f_x და f_y.*

ამოხსნა. *გამოთვლების გასამარტივებლად გადავწეროთ მოცემული ფუნქცია შემდეგი სახით:*

$$f(x;y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2}{3}yx^{-1}.$$

f_x-ის საპოვნელად წარმოვიდგინოთ f ფუნქცია მხოლოდ x ცვლადის ფუნქციად. ამისათვის y ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ მოცემული ჯამი წევრ-წევრად:

$$f_x(x,y) = 2x + 2(1)y^2 + \frac{2}{3}y\left(-x^{-2}\right) = 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2}.$$

ანალოგიურად, f_y-ის საპოვნელად x ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად. გვექნება:

$$f_y(x,y) = 0 + 2x(2y) + \frac{2}{3}(1)x^{-1} = 4xy + \frac{2}{3x}.$$

მაგალითი 24.2 *ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = \left(x^2 + xy + y\right)^5$.*

ამოხსნა. *დავაფიქსიროთ y და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით ვიპოვოთ z-ის კერძო წარმოებული x ცვლადით. მივიღებთ:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 5\left(x^2+xy+y\right)^4 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+y\right) \\ &= 5\left(x^2+xy+y\right)^4 (2x+y).\end{aligned}$$

ახლა კი დავაფიქსიროთ x და ასევე რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გავაწარმოოთ z ფუნქცია y ცვლადით. გვექნება:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 5\left(x^2+xy+y\right)^4 \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy+y\right) \\ &= 5\left(x^2+xy+y\right)^4 (x+1).\end{aligned}$$

მაგალითი 24.3 *ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები f_x და f_y, თუ $f(x,y) = xe^{-2xy}$.*

ამოხსნა. *გამოვიყენოთ ნამრავლის გაწარმოების წესი. მივიღებთ:*

$$f_x(x,y) = x\left(-2ye^{-2xy}\right) + e^{-2xy} = (-2xy+1)e^{-2xy}$$

და

$$f_y(x,y) = x\left(-2xe^{-2xy}\right) = -2x^2e^{-2xy}.$$

24.2 მარგინალური ანალიზი

ეკონომიკაში ტერმინი მარგინალური ანალიზი გამოიყენება ისეთი ამოცანების გადასაწყვეტად, სადაც წარმოებულის საშუალებით შესაფასებელია ფუნქციის მნიშვნელობების ცვლილება მისი ერთ-ერთი ცვლადის ერთი ერთეულით გაზრდისას. ზემოთ ჩვენ უკვე გავეცანით რამდენიმე მაგალითს მარგინალური ანალიზიდან ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის. ახლა კი განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს ანალოგიური ამოცანებისათვის კერძი წარმოებულების გამოყენების შესაძლებლობას.

მაგალითი 24.4 *დადგენილია, რომ ქარხნის ყოველკვირეული წარმადობა შეადგენს $Q(x;y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ ერთეულს, სადაც x და y არის , შესაბამისად, კვალიფიციური და არაკვალიფიციური მუშაკის რაოდენობა. ამჟამად ქარხნის სამუშაო ძალას წარმოადგენს 30 კვალიფიციური და 60 არაკვალიფიციური მუშა. გამოვიყენოთ მარგინალური ანალიზი ყოველკვირეული წარმადობის იმ ცვლილების შესაფასებლად, რაც გამოწვეული იქნება სამუშაო ძალაზე მხოლოდ ერთი კვალიფიციური მუშის დამატებით.*

ამოხსნა. *კერძო წარმოებული*

$$Q_x(x, y) = 1200 + 2xy - 3x^2$$

არის წარმადობის ცვლილების სიჩქარე კვალიფიციური მუშახელის რაოდენობის მიმართ. ნებისმიერი x და y მნიშვნელობებისათვის ეს იქნება ყოველკვირეულად წარმოებული იმ დამატებითი პროდუქციის ერთეულების მიახლოებითი რაოდენობა, როცა კვალიფიციური მუშების რაოდენობა გაიზრდება x-დან $x+1$-მდე და არაკვალიფიციური მუშების რაოდენობა დარჩება მუდმივად y დონეზე. კერძოდ, თუ სამუშაო ძალა იზრდება 30 კვალიფიციური და 60 არაკვალიფიციური მუშიდან 31 კვალიფიციურ და 60 არაკვალიფიციურ მუშამდე, მაშინ წარმოების საბოლოო ცვლილება დაახლოებით იქნება

$$Q_x(30, 60) = 1200 + 2(30)(60) - 3(30^2) = 2100$$

ერთეული.

ვთქვათ, $Q(K; L)$ წარმოადგენს საწარმოო ფუნქციას, რომელიც შეიცავს K ერთეული კაპიტალის დანახარჯებსა და L ერთეულ შრომას. მაშინ, კერძო წარმოებულს $Q_K(K; L)$ ეწოდება კაპიტალის მარგინალური(ზღვრული) მწარმოებლურობა და ის ზომავს Q-ს ცვლილების სიჩქარეს კაპიტალური დანახარჯების მიმართ, როცა მუშახელის რაოდენობა რჩება უცვლელი.

ანალოგიურად, კერძო წარმოებულს $Q_L(K; L)$ ეწოდება შრომის მარგინალური მწარმოებლურობა და ის ზომავს წარმოების ცვლილების სიჩქარეს შრომის დონის მიმართ იმ შემთხვევაში, როდესაც კაპიტალური დანახარჯები იქნება უცვლელი.

მაგალითი 24.5 *მეწარმემ დაადგინა, რომ ქარხანაში ყოველთვიურად გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გამოისახება ქობ-დაგლასის ფუნქციით*

$$Q(K; L) = 50K^{0.4}L^{0.6},$$

სადაც K არის დახარჯული კაპიტალის რაოდენობა(ათას ერთეულებში), ხოლო L -სამუშაო დროის რაოდენობა(საათებში).

ა) ვიპოვოთ კაპიტალის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_K(K; L)$ და შრომის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_L(K; L)$, თუ კაპიტალური დანახარჯები შეადგენენ 750000 ლარს, ხოლო შრომის დონე კი- 991 სამუშაო საათს.

ბ) წარმოების მიმდინარე დონის უფრო სრაფად გასაზრდელად კაპიტალის ერთეულის დამატება ჯობს, თუ სამუშაო დროის ერთეულით გაზრდა?

ამოხსნა. *ა)*

$$Q_K(K, L) = 50\left(0.4K^{-0.6}\right)L^{0.6} = 20K^{-0.6}L^{0.6}$$

და

$$Q_L(K, L) = 50K^{0.4}\left(0.6L^{-0.4}\right) = 30K^{0.4}L^{-0.4}.$$

როცა $K = 750$ (750000 ლარი) და $L = 991$, გვექნება:

$$Q_K(750, 991) = 20(750)^{-0.6}(991)^{0.6} \approx 23.64$$

და

$$Q_L(750,991) = 30(750)^{0.4}(991)^{-0.4} \approx 26.84.$$

ბ) ამოცანის ა) ნაწილის შედეგიდან ჩანს, რომ კაპიტალის 1 ერთეულით(ანუ 1000 ლარით) გაზრდა იწვევს წარმოების რაოდენობის გაზრდას 23.64 ერთეულით, ხოლო სამუშაო საათების ერთეულით გაზრდა იწვევს წარმოების რაოდენობის გაზრდას 26.84 ერთეულით. მაშასადამე, წარმოების რაოდენობის მიმდინარე დონის უფრო სწრაფად გასაზრდელად მეწარმემ ჯობია გაზარდოს სამუშაო დრო.

24.3 მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

ცხადია, კერძო წარმოებულები, როგორც ფუნქციები, შეიძლება თავადვე გაწარმოვდეს. ამის შედეგად მიღებულ ფუნქციებს მეორე რიგის კერძო წარმოებულები ეწოდებათ.

ვთქვათ, $z = f(x;y)$. f_x-ის კერძო წამოებული x ცვლადით ეწოდება

$$f_{xx} = (f_x)_x \quad \text{ან} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

f_x-ის კერძო წამოებული y ცვლადით ეწოდება

$$f_{xy} = (f_x)_y \quad \text{ან} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

f_y- ის კერძო წამოებული x ცვლადით არის

$$f_{yx} = (f_y)_x \quad \text{ან} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

f_y- ის კერძო წამოებული y ცვლადით არის

$$f_{yy} = (f_y)_y \quad \text{ან} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

აქაც შევნიშნოთ, რომ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს ასეც აღნიშნავენ:

$$f''_{xx}, \quad f''_{yy}, \quad f''_{xy} \quad \text{და} \quad f''_{yx}.$$

მაგალითი 24.6 *ვიპოვოთ* $f(x,y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$ *ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.*

ამოხსნა. *ვინაიდან*

$$f_x = y^3 + 5y^2 + 2,$$

ამიტომაც გვექნება, რომ

$$f_{xx} = 0 \quad \text{და} \quad f_{xy} = 3y^2 + 10y.$$

ხოლო, რადგანაც

$$f_y = 3xy^2 + 10xy,$$

მივიღებთ, რომ

$$f_{yy} = 6xy + 10x \quad \text{და} \quad f_{yx} = 3y^2 + 10y.$$

შევნიშნოთ, რომ f_{xy} და f_{yx} მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს უწოდებენ მეორე რიგის შერეულ კერძო წარმოებულებს. როგორც ბოლო მაგალითიდან ჩანს, ისინი ერთმანეთის ტოლია. საზოგადოდაც, გარკვეულ პირობებში,ორი ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია.

24.4 რთული ფუნქციის კერძო წარმოებული

მრავალ პრაქტიკულ სიტუაციაში კონკრეტული სიდიდე გამოისახება ორი ან მეტი ცვლადის საშუალებით, რომელთაგან თითოეული ასევე შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც მესამე ცვლადის ფუნქცია. ასეთ დროს მიზანს წარმოადგენს ვიპოვოთ ამ სიდიდის ცვლილების სიჩქარე სწორედ მესამე ცვლადის მიმართ. მაგალითად, გარკვეულ პროდუქტზე მოთხოვნა შეიძლება დამოკიდებული იყოს მის ფასზე და ასევე კონკურენტი პროდუქტის ფასზეც, რომლებიც დროის განმავლობაში იზრდებიან. ვთქვათ, ასეთ დროს საჭიროა დროში პროდუქტზე მოთხოვნის ცვლილების სიჩქარის განსაზღვრა. ასეთი ამოცანების გადასაწყვეტად შემოვიღოთ რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულების პოვნის წესი.

ვთქვათ, z არის x და y ცვლადების ფუნქცია, რომლებიც თავის მხრივ არიან t ცვლადის ფუნქციები. მაშინ, z შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც t ცვლადის ფუნქცია და სამართლიანია ტოლობა:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

მაგალითი 24.7 *აფთიაქში იყიდება ორი- A და B მარკის თხევადი ვიტამინი. მათი გაყიდვების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ თუ ერთი ბოთლი A მარკის ვიტამინი იყიდება x ლარად, ხოლო B მარკისა- y ლარად, მაშინ ყოველთვიური მოთხოვნა A-ზე იქნება*

$$Q(x; y) = 300 - 20x^2 + 30y$$

ბოთლი. ასევე დადგენილია, რომ t თვის შემდეგ ერთი ბოთლი A მარკის ფასი იქნება

$$x = 2 + 0.05t$$

ლარი და ერთი ბოთლი B მარკის ფასი იქნება

$$y = 2 + 0.1\sqrt{t}$$

ლარი. დავადგინოთ A მარკის ვიტამინზე მოთხოვნის ცვლილების სიჩქარე 4 თვის შემდეგ.

ამოხსნა. *ცხადია, ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $\frac{dQ}{dt}$, როცა $t = 4$. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება:*

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -40x(0.05) + 30\left(0.05t^{-1/2}\right).$$

როცა $t = 4$, მაშინ $x = 2 + 0.05(4) = 2.2$

და საბოლოოდ,

$$\frac{dQ}{dt} = -40(2.2)(0.05) + 30(0.05)(0.5) = -3.65.$$

მამასადამე, 4 თვის შემდეგ A მარკის ვიტამინზე ყოველთვიური მოთხოვნის რაოდენობა შემცირდება 3.65 ბოთლით თვეში.

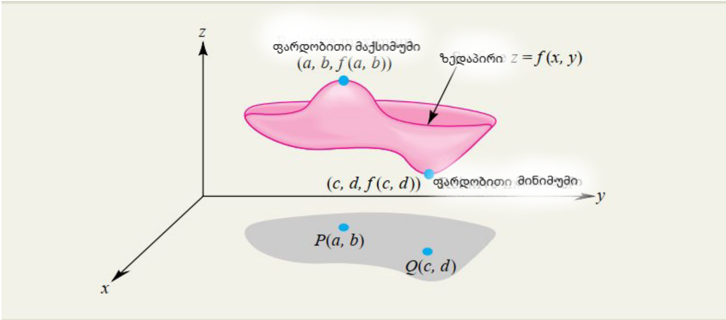
24.5 ორი ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაცია

ვთქვათ, მეწარმე ამზადებს ორი სახის პროდუქციას და მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია, რომელიც შეესაბამება პირველი და მეორე სახის პროდუქტის , შესაბამისად x და y რაოდენობის გამოშვებას, მოიცემა $C(x;y)$ ფუნქციით. როგორ განვსაზღვროთ წარმოების ის $x = a$ და $y = b$ დონე, რომ დანახარჯი იყოს მინიმალური? ან კიდევ, ვთქვათ, $Q(K;L)$ საწარმოო ფუნქციაში, რომელიც შეიცავს K ერთეულ კაპიტალის დანახარჯებსა და L ერთეულ შრომას, K_0 და L_0 -ის რა მნიშვნელობები უზრუნველყოფენ მაქსიმალურ მწარმოებლურობას? მსგავსი ტიპის ამოცანები ჩვენ უკვე განვიხილეთ ერთი ცვლადის ფუნქციების შემთხვევაში და მათ ამოსახსნელად ვიყენებდით ფუნქციის წარმოებულს. გავაფართოოთ ეს მეთოდები ორი ცვლადის ფუნქციებისთვისაც.

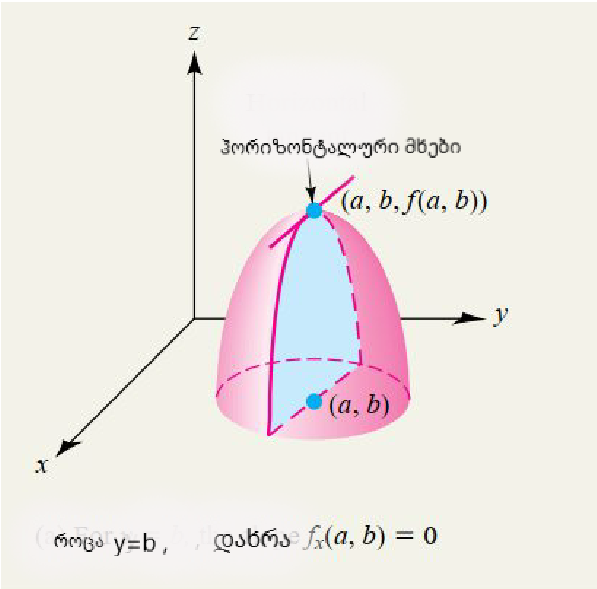
ფარდობითი ექსტრემუმები. ვიტყვით, რომ $f(x;y)$ ფუნქციას მისი განსაზღვრის არის $P(a;b)$ წერტილში გააჩნია **ფარდობითი მაქსიმუმი**, თუ არსებობს P წერტილის ისეთი მიდამო(ანუ წრე ცენტრით P წერტილში), რომ ამ მიდამოდან აღებული ყოველი $(x;y)$ წერტილისთვის $f(a,b) \geq f(x,y)$. ანალოგიურად, თუ $f(c,d) \leq f(x,y)$ ყოველი $(x;y)$ წერტილისთვის $Q(c;d)$ წერტილის მიდამოდან, მაშინ $f(x;y)$ ფუნქციას $Q(c;d)$ წერტილში გააჩნია **ფარდობითი მინიმუმი** (სურ. 24.1).

$f(x;y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის იმ $(a;b)$ წერტილებს, სადაც $f_x(a,b) = 0$ და $f_y(a,b) = 0$, f ფუნქციის **სტაციონარული წერტილები** ეწოდებათ.

ვთქვათ, $f(x;y)$ ფუნქციას $(a;b)$ წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი. მაშინ ერთი ცვლადის $f(x;b)$ ფუნქციას $x = a$ წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი და $f_x(a,b) = 0$ (სურ. 24.2).



სურ 24.1



სურ 24.2

ანალოგიურად გვექნება, რომ $f_y(a,b) = 0$(სურ. 24.3).

ადვილი დასანახია, რომ ეს ტოლობები ძალაშია იმ შემთხვევაშიც, როცა $(a;b)$ წარმოადგენს $f(x;y)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილს.

ამრიგად, თუ $z = f(x;y)$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და $(a;b)$ არის ამ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ პირველი რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები ამ წერტილში ნულის ტოლია:

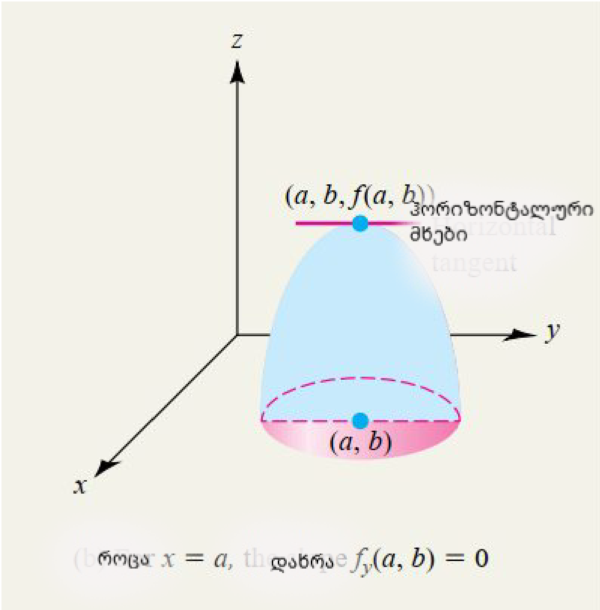
$$\begin{cases} f_x(a;b) = 0 \\ f_y(a;b) = 0 \end{cases}$$

ჩამოყალიბებული დებულება **ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის** სახელწოდებითაა ცნობილი.

შევნიშნოთ, რომ უწყვეტ ფუნქციას ექტრემუმი აგრეთვე შეიძლება ჰქონდეს იმ წერტილშიც, რომელშიც კერძო წარმოებულები არ არსებობენ.

წერტილებს, რომლებშიც უწყვეტი $z = f(x;y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია ან არ არსებობს, **კრიტიკული წერტილები** ეწოდებათ.

როგორც ვნახეთ, ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის უნდა ვეძებოთ. ისმის კითხვა: როგორ დავადგინოთ, წარმოადგენს თუ არა ესა თუ ის კრიტიკული წერტილი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს? ამისათვის ჩამოვაყალიბოთ **ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური**



სურ 24.3

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა.

ვთქვათ, $f(x;y)$ ფუნქციას გააჩნია პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, და f_{xy} და $(a;b)$ წარმოადგენს მის სტაციონალურ წერტილს. განვიხილოთ ფუნქცია $D(x,y)$, სადაც

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 .$$

თუ $D(a,b) > 0$, მაშინ $f(x;y)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი $(a;b)$ წერტილში. სახელდობრ, თუ $f_{xx}(a,b) < 0$, ამ წერტილში გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი, ხოლო თუ $f_{xx}(a,b) > 0$, მაშინ -ლოკალური მინიმუმი.
თუ $D(a,b) < 0$, მაშინ $f(x;y)$ ფუნქციას არ აქვს ლოკალური ექსტრემუმი $(a;b)$ წერტილში;
იმ შემთხვევაში, როცა $D(a,b) = 0$, მაშინ გვაქვს საეჭვო ვითარება და საჭიროა დამატებითი გამოკვლევები იმის დასადგენად, აქვს თუ არა $f(x;y)$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი $(a;b)$ წერტილში;

მაგალითი 24.8 *ვიპოვოთ $f(x;y) = 12x - x^3 - 4y^2$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და მოვახდინოთ მათი კლასიფიკაცია.*
ამოხსნა. *ვინაიდან*

$$f_x = 12 - 3x^2 \quad \text{და} \quad f_y = -8y,$$

ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს ვიპოვით შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{aligned} 12 - 3x^2 &= 0 \\ -8y &= 0 \end{aligned}$$

მეორე განტოლებიდან მივიღებთ $y = 0$ და პირველი განტოლებიდან კი

$$3x^2 = 12$$
$$x = 2 \text{ ან } -2$$

მაშასადამე, ფუნქციას გააჩნია ორი კრიტიკული წერტილი $(2, 0)$ და $(-2, 0)$. მათი კლასიფიკაციისთვის პირველ რიგში გამოვთავლოთ

$$f_{xx} = -6x \quad f_{yy} = -8 \quad \text{და} \quad f_{xy} = 0.$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ ფუნქცია $D(x, y)$:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x)(-8) - 0 = 48x$$

და გამოვთვალოთ კრიტიკულ წერტილებზე მისი მნიშვნელობები. მივიღებთ:

$$D(2, 0) = 48(2) = 96 > 0 \quad \text{და} \quad f_{xx}(2, 0) = -6(2) = -12 < 0,$$

ასევე

$$D(-2, 0) = 48(-2) = -96 < 0.$$

მიღებული შედეგებიდან დავასკვნით, რომ მოცემულ ფუნქციას $(-2, 0)$ წერტილზე არ გააჩნია ექსტრემუმი, ხოლო $(2, 0)$ წერტილი მისი ფარდობითი მაქსიმუმის წერტილია. ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა კი ამ წერტილში ტოლი იქნება

$$f(2; 0) = 12(2) - (2)^3 - 4(0^2) = 16.$$

მაგალითი 24.9 *სასურსათო მაღაზია დისტრიბუტორებისგან გასაყიდად იბარებს ადგილობრივი და იმპორტული წარმოების საბავშვო ხილფაფას: ადგილობრივს ერთ ქილას 30 თეთრად, ხოლო იმპორტულს -40 თეთრად. მენეჯერის გათვლებით, იმ შემთხვევაში თუ ადგილობრივი ხილფაფა გაიყიდება ერთი ქილა x თეთრად და იმპორტული y თეთრად, მაშინ ყოველდღიურად გაიყიდება ადგილობრივი და იმპორტული ხილფაფის , შესაბამისად, $70 - 5x + 4y$ და $80 + 6x - 7y$ რაოდენობის ქილა. რა ფასი უნდა დაადოს მენეჯერმა თითოეულ მათგანს, რომ მათი გაყიდვებით მიღებული საერთო დღიური შემოსავალი იყოს მაქსიმალური?*

ამოხსნა. *ცხადია, რომ (მთლიანი მოგება)=(ადგილობრივი ბრენდის გაყიდვებით მიღებული მოგება)+(იმპორტული ბრენდის გაყიდვებით მიღებული მოგება). ამიტომაც, ხილფაფების გაყიდვებით მიღებული მთლიანი დღიური მოგება მოიცემა ფუნქციით*

$$f(x, y) = (\underbrace{70 - 5x + 4y}_{\text{გაყიდული რაოდენობა}}) \cdot (\underbrace{(x - 30}_{\text{მოგება ერთეულზე}}) + (\underbrace{80 + 6x - 7y}_{\text{გაყიდული რაოდენობა}}) \cdot (\underbrace{y - 40}_{\text{მოგება ერთეულზე}}) =$$

$$= -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5300.$$

გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები

$$f_x = -10x + 10y - 20 \quad \text{და} \quad f_y = 10x - 14y + 240.$$

სტაციონარული წერტილების საპოვნელად გავუტოლოთ ისინი ნულს:

$$-10x + 10y - 20 = 0 \quad \text{და} \quad 10x - 14y + 240 = 0.$$

ანუ,

$$-x + y = 2 \quad \text{და} \quad 5x - 7y = -120.$$

მათი საერთო ამონახსნი იქნება:

$$x = 53 \quad \text{და} \quad y = 55.$$

ამრიგად, f ფუნქციას გააჩნია მხოლოდ ერთი $(53, 55)$ კრიტიკული წერტილი. ამის შემდეგ ვიპოვოთ f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

$$f_{xx} = -10, \quad f_{yy} = -14 \quad \text{და} \quad f_{xy} = 10.$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-10)(-14) - (10)^2 = 40.$$

ვინაიდან

$$D(53, 55) = 40 > 0 \quad \text{და} \quad f_{xx}(53, 55) = -10 < 0,$$

ეს ნიშნავს, რომ f ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს, როცა $x = 53$ და $y = 55$.

მამასადამე, ხილფაფების გაყიდვებით მიღებული მოგება იქნება მაქსიმალური, თუ ადგილობრივი ხილფაფის საცალო ფასი იქნება 53 თეთრი, ხოლო იმპორტულის- 55 თეთრი.

24.6 სავარჯიშოები

1. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები

   ა) $f(x, y) = 7x - 3y + 4$;

   ბ) $f(x, y) = x - xy + 3$;

   გ) $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y + 5x$;

   დ) $f(x, y) = 2x(y - 3x) - 4y$;

   ე) $z = (3x + 2y)^5$;

   ვ) $f(x, y) = (x + xy + y)^3$;

   ზ) $f(s, t) = \frac{3t}{2s}$;

   თ) $z = xe^{xy}$;

   ი) $f(x, y) = \frac{e^{2-x}}{y^2}$;

ვ) $z = \frac{xy^2}{x^2y^3+1}$;

2. გამოთვალეთ მოცემული ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები მითითებულ $P_0(x_0; y_0)$ წერტილებში

   ა) $f(x,y) = x^2 + 3y$, $P_0(1,-1)$;

   ბ) $f(x,y) = x^3y - 2(x+y)$, $P_0(1,0)$;

   გ) $f(x,y) = \frac{y}{2x+y}$, $P_0(0,-1)$;

   დ) $f(x,y) = x + \frac{x}{y-3x}$, $P_0(1,1)$;

   ე) $f(x,y) = (x-2y)^2 + (y-3x)^2 + 5$, $P_0(0,-1)$;

   ვ) $f(x,y) = xe^{-2y} + ye^{-x} + xy^2$, $P_0(0,0)$.

3. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ყველა სახის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

   ა) $f(x,y) = 5x^4y^3 + 2xy$;

   ბ) $f(x,y) = \frac{x+1}{y-1}$;

   გ) $f(x,y) = e^{x^2y}$;

   დ) $f(u,v) = \ln(u^2+v^2)$.

4. მეწარმემ დაადგინა, რომ ქარხანაში ყოველწლიურად გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გამოისახება ქობ-დაგლასის ფუნქციით

$$Q(K;L) = 30K^{0.3}L^{0.7},$$

   სადაც K არის დახარჯული კაპიტალის რაოდენობა(ათას ერთეულებში), ხოლო L -სამუშაო დროის რაოდენობა(საათებში).

   ა) იპოვეთ კაპიტალის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_K(K;L)$ და შრომის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_L(K;L)$, თუ კაპიტალური დანახარჯები შეადგენენ 630000 ლარს, ხოლო შრომის დონე კი- 830 სამუშაო საათს.

   ბ) წარმოების მიმდინარე დონის უფრო სწრაფად გასაზრდელად კაპიტალის ერთეულის დამატება ჯობს, თუ სამუშაო დროის ერთეულით გაზრდა?

5. ქვეყნის ეკონომიკის წლიური მწარმოებლურობა შეადგენს

$$Q(K,L) = 150\left[0.4K^{-1/2} + 0.6L^{-1/2}\right]^{-2}$$

   ერთეულს, სადაც K არის დახარჯული კაპიტალის რაოდენობა(მილიონ დოლარებში), ხოლო L -სამუშაო დროის რაოდენობა(ათას საათებში).

   ა) იპოვეთ კაპიტალის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_K(K;L)$ და შრომის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_L(K;L)$, თუ კაპიტალური დანახარჯები შეადგენენ 5.041 მილიარდ დოლარს$(K = 5041)$, ხოლო შრომის დონე კი- 4900000 სამუშაო საათს$(L = 4900)$.

   ბ) ეკონომიკის მწარმოებლურობის გასაზრდელად რომელი ღონისძიება ჯობია წაახალისოს ქვეყნის მთავრობამ: ახალი ინვესტიციების მოზიდვა თუ დამატებითი დროით შრომითი დასაქმების გაზრდა?

6. A პროდუქტზე ყოველთვიური მოთხოვნა შეადგენს $Q(x;y) = 200 - 10x^2 + 20xy$ ერთეულს, სადაც x არის ამ პროდუქტის ფასი, ხოლო y მისი კონკურენტი B პროდუქტის ფასი. დადგენილია, რომ დღეიდან t თვის შემდეგ A პროდუქტის ფასი იქნება

$$x(t) = 10 + 0.5t$$

ლარი, ხოლო B პროდუქტის ფასი -

$$y(t) = 12.8 + 0.2t^2.$$

რა სიჩქარით შეიცვლება მოთხოვნა A პროდუქტზე დღეიდან 4 თვის შემდეგ?

7. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ექსტრემუმები

ა) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$;

ბ) $f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$;

გ) $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$;

დ) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$;

ე) $f(x, y) = (x-1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5$;

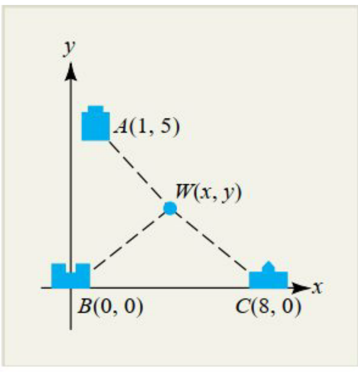
ვ) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$;

ზ) $f(x, y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$;

თ) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$.

8. კომპანია აწარმოებს A საქონლის x ერთეულს და B საქონლის y ერთეულს. A საქონლის თითოეული ერთეული შეიძლება გაიყიდოს $p = 100 - x$ ლარად, ხოლო B საქონლის თითოეული ერთეული - $q = 100 - y$ ლარად. წარმოების დანახარჯები გამოისახება ერთობლივი დანახარჯების ფუნქციის საშუალებით $C(x;y) = x^2 + xy + y^2$. დაადგინეთ x და y-ის ის მნიშვნელობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მაქსიმალურ მოგებას.

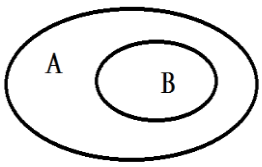
9. კომპანია''ACME''-ს ბიზნეს მენეჯერმა რეგიონის რუკაზე დაიტანა საკოორდინატო ბადე და დაადგინა, რომ კომპანიის სამი მნიშვნელოვანი მომხმარებელი მდებარეობს $A(1;5)$, $B(0;0)$ და $C(8;0)$ წერტილებზე, სადაც ერთეულები მოცემულია კილომეტრებში. რომელ $W(x;y)$ წერტილში უნდა განათავსოს კომპანიამ საწყობი, რომ ამ საწყობიდან A, B და C ობიექტებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი იყოს მინიმალური?(სურ. 24.4)



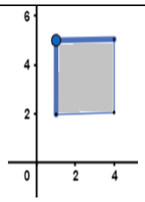
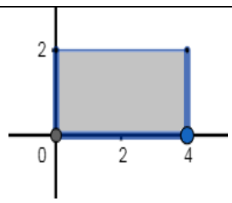
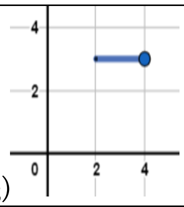
სურ 24.4

პასუხები

ლექცია 1

ს.№	
1	ა) ჭეშმარიტია; ბ) ჭეშმარიტია; გ) მცდარია; დ) ჭეშმარიტია: ე) მცდარია; ვ) მცდარია.
2	$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{3\}$, $\{7\}$, $\{9\}$, $\{1;3\}$, $\{1;7\}$, $\{1;9\}$, $\{3;7\}$, $\{3;9\}$, $\{7;9\}$, $\{1;3;7\}$, $\{1;3;9\}$, $\{1;7;9\}$, $\{3;7;9\}$, $\{1;3;7;9\}$.
3	ა) მცდარია, ბ) მცდარია, გ) მცდარია, დ) მცდარია, ე) ჭეშმარიტია, ვ) მცდარია.
4	ა) $A\cup B=\{1;2;5;9;7;6\}$, $A\cap B=\{1;2;5;9\}$, $A\setminus B=\varnothing$;, $B\setminus A=\{7;6\}$, $A\Delta B=\{7;6\}$, $A\times B=\{(1;2),(1;9),(1;7),\ldots,(9;6)\}$ (სიმრავლე შედგება 24 ელემენტისგან) ბ) $A\cup B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $A\cap B=\varnothing$, $A\setminus B=A$, $B\setminus A=B$, $A\Delta B=A\cup B$; $A\times B=\{(2n;2k+1):n,k\in\mathbb{N}\}$
5	ა) $\{3;9\}$, ბ) $\{(1;7),(4;7)\}$, გ) $\{3;8;9\}$, დ) $\{(1;7),(3;7),(4;7),(7;7),(9;7)\}$.
6	$\{(a;2),(a;3),(b;2),(b;3)\}$.
7	ა) $\{7;9\}$, ბ) $\varnothing$, გ) $\{7;9\}$ დ) $\{(2;8),(4;8)\}$
8	$\{(2;-2),(2;k),(5;-2),(5;k),(b;-2),(b;k)\}$..
9	ბ), გ).
10	ა) $\varnothing$, ბ) $\{0;-1;-2;-\ldots\}$, გ) $\mathbb{N}$, დ) I ე) $\mathbb{Z}$, ვ) $\varnothing$.
11	ბ)
12	კი.
13	არა.
14	ა) 13, ბ) 30, გ) 56, დ) 8.
15	ა) 38, ბ) 19, გ) 83, დ) 9.
16	ა) $A\cap B$, ბ) $A\setminus B$, გ) $B\setminus A$, დ) $A\cup B$.
17	ა)მაგალითად, $A=\{c;a;-1;7;\Delta\}$, $B=\{4;a;-1;7;6\}$. ბ)მაგალითად, $A=\{c;a\}$, $B=\{4;7;6\}$. გ)მაგალითად, $A=\{4;9;b\}$, $B=\{4;-3\}$. დ)მაგალითად, $A=\{5\}$, $B=\varnothing$. ე)მაგალითად, $A=\{2;9;b;k\}$, $B=\{4;9;b\}$ ვ)მაგალითად, $A=\{4;9;b\}$, $B=\{0;\pi;7\}$
18	
19	$\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{7\},\{a;b\},\{a;7\},\{b;7\},\{a;b;7\}\}$.
20	$\{\varnothing,\{5\},\{\{c\}\},\{\varnothing\},\{5;\{c\}\},\{5;\varnothing\},\{\{c\};\varnothing\},\{5;\{c\};\varnothing\}\}$.

ლექცია 2

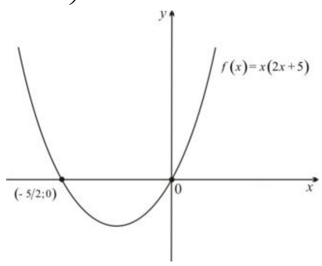
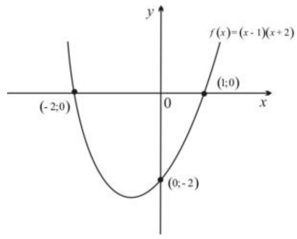
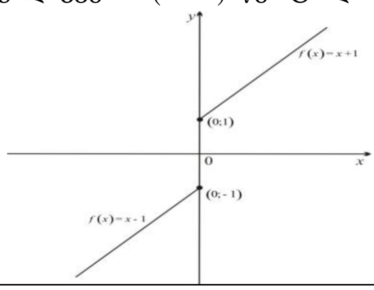
ს..№	
1	ა) გაერთიანება $[2;7]$, თანაკვეთა $[3;5]$. ბ)გაერთიანება$[-1;3]$, თანაკვეთა $[0;2]$. გ)გაერთიანება $[0;9]$, თანაკვეთა$\{5\}$. დ)გაერთიანება$(-\infty;9)$, თანაკვეთა$\varnothing$. ე)გაერთიანება $[-3;12]$, თანაკვეთა$\{6\}$. ვ)გაერთიანება $(-\infty;+\infty)$, თანაკვეთა$(1;2)$.
2	ა) 20, ბ)14, გ) $3-\sqrt{3}$, დ) $10-\pi$.
3	ა) $\pi-3$, ბ) $\sqrt{2}-1$, გ) $b-a$, დ) $2b$.
4	ა) 3, ბ) $-\frac{2}{3}$, გ) 13. დ) -1.
5	ა) 9, ბ) 24, გ) $\frac{119}{30}$, დ) $\frac{18}{35}$, ე) 19, ვ) 3.
8	ა) ± 6, ბ) $3;-7$, გ) $-3;6$, დ) $0;2$.
9	$A-IV$ მეოთხედში, $B-$ აბსცისთა ღერძზე, $C-II$ მეოთხედში, $D-III$ მეოთხედში, $E-$ ორდინატთა ღერძზე.
10	$(10;13)$.
11	ა) $10;(3;12)$, ბ) $13;(4;2,5)$, გ) $7\sqrt{2};(-0.5;1,5)$, დ) $\sqrt{41};(-3,5;-1)$, ე) $4\sqrt{10};(0;0)$. ვ) $\sqrt{89};(2,5;-4)$.
12	24.
13	16.
14	ტრაპეცია; 9.
15	$(0;-4)$.
16	A.
17	A.
21	$0,5\sqrt{145}$, $\sqrt{37}$, $0,5\sqrt{109}$.
22	$(2;-3)$.
23	$(2,5;3)$.
24	$(2;3)$, $3\sqrt{2}$.
25	$(-3;-6)$, $\sqrt{233}$.
26	$(-1;4)$, $\sqrt{10}$.
27	ა) $A\cup B=[1;6]$, $A\cap B=(1;6)$, $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=\{1;6\}$, $A\Delta B=\{1;6\}$, $A\times B=\{(a;b):1<a<6,1\le b\le 6\}$ ბ) $A\cup B=(-\infty;+\infty)$, $A\cap B=(1;6]$, $A\setminus B=(6;+\infty)$, $B\setminus A=(-\infty;1]$, $A\Delta B=(-\infty;1]\cup(6;+\infty)$, $A\times B=\{(a;b):a>1,b\le 6\}$.
28	$(-2;+\infty)$.
29	გ)  დ)  ვ) 

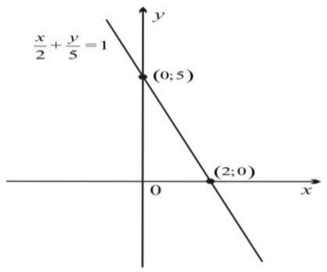
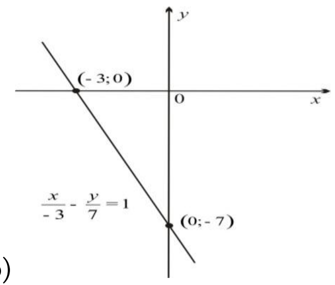
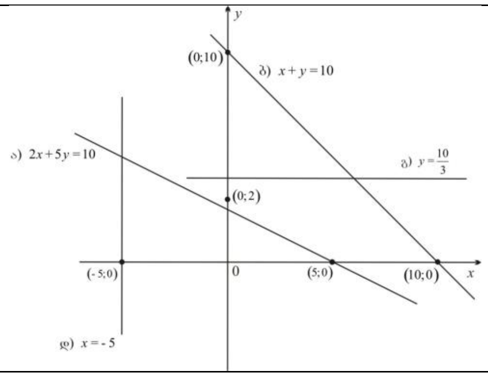
ლექცია 3	
ს. №	
1	ა) $f(0)=-2$; $f(-2)=0$; $f(1)=6$. ბ) $f(1)=1$; $f(-3)=\frac{1}{3}$; $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. გ) $g(-2)=6$; $g(0)=4$; $g(2)=6$. დ) $f(0)=f(-5)=f(c)=f(c+h)=3$. ე) $h(3)=10$; $h(1)=2$; $h(-3)=10$; $h(0)=4$. ვ) $f(-6)=3$; $f(-5)=-4$; $f(16)=4$.
2	ა) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ ბ) $(-\infty;1]$ გ) $[-3;+\infty)$ დ) $(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$ ე) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ ვ) $(3;9]$ ზ) $[-11;0]$
3	ა) $[1;+\infty)$; ბ) $[0;1)$; გ) $[0;2]$; დ) $[0;+\infty)$; ე) $[-2;2]$; ვ) $[-1;3]$; ზ) $\left[\frac{1}{2};1\right]$.
4	ა) $3x^2+14x+10$. ბ) x^2-2x+5 გ) x^3+2x^2+4x+2 დ) $\lvert x\rvert$.
5	ა) $f(f(x))=\frac{x-1}{x}$, $x\neq1$; $f(f(f(x)))=x$, $x\neq0$, $x\neq1$. ბ) $f(f(x))=-\frac{1}{x}$, $x\neq1$; $f(f(f(x)))=\frac{x-1}{x+1}$, $x\neq0$, $x\neq1$. გ) $f(f(x))=\frac{1+x}{2+x}$, $x\neq-1$; $f(f(f(x)))=\frac{2+x}{3+2x}$, $x\neq-1$, $x\neq-2$. დ) $f(f(x))=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$; $f(f(f(x)))=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.
6	ა) $f(f(x))=f(x)$; $f(g(x))=0$; $g(f(x))=g(x)$; $g(g(x))=0$. ბ) $f(f(x))=f(x)$; $f(g(x))=g(f(x))=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & x\geq0\end{cases}$; $g(g(x))=\begin{cases}x, & x<0\\ x^4, & x\geq0\end{cases}$.
7	ა) x^2-5x+6. ბ) x^2-2, $x\neq0$. გ) $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$, $x>0$. დ) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$
8	ა) -5 ბ) 2. გ) $4-2x-h$, $h\neq0$. დ) $\frac{1}{(x+h+1)(x+1)}$, $h\neq0$.
9	ა) 1) $R(x)=-0{,}02x^2+29x$; $P(x)=-1{,}45x^2+10{,}7x-15{,}6$; 2) $2<x<5{,}3$. ბ) 1) $R(x)=-0{,}37x^2+47x$; $P(x)=-1{,}75x^2+31{,}85x-115{,}5$; 2) $5<x<13{,}2$. გ) 1) $R(x)=-0{,}5x^2+39x$; $P(x)=-2x^2+29{,}8x-67$; 2) $3{,}32<x<11{,}58$. დ) 1) $R(x)=-0{,}09x^2+51x$; $P(x)=-1{,}41x^2+39{,}3x-101{,}4$; 2) $2{,}88<x<24{,}9$.
10	ა) 12 ბ) 1,09.

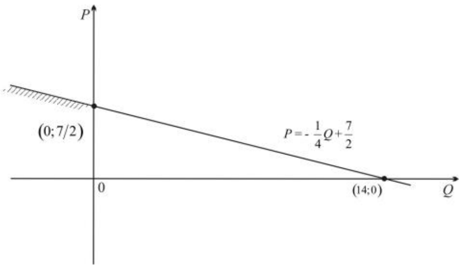
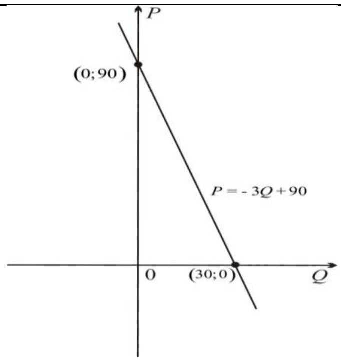
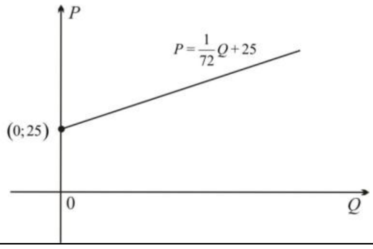
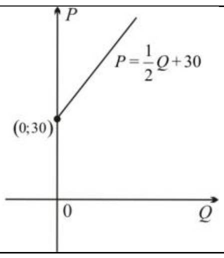
11	ა) 19400. ბ)გაიზარდა მიახლოებით 66 ერთეულით. გ)მოსახლეობა იზრდება და უახლოვდება 20000-ს.
12	ა)დაახლოებით 5,8 სახეობა. ბ) $S_2=\sqrt[3]{2}\,S_1$. გ) $A=41002$ კვ.კმ.
13	ა) $Q(t)=\dfrac{4374}{\left(0,04t^2-0,2t+12\right)^2}$. ბ) 22,32 კგ. გ) მე-5 კვირაში.
14	ა) $C(t)=625t^2+25t+900$. ბ) $C(3)=6600$ ლარი. გ)მე-4 საათის ბოლოს
15	ა) $C(t)=4,2+0,08t^2$ მემილიონედი. ბ) 4,52 მემილიონედი. გ)5 წლის შემდეგ.
16	ა) $[-1;0]$; ბ) $[-2;-1)\cup\{0\}$; გ) $[-6;0]$; დ) $\{0\}$; 5) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$
17	ა) $(1;2]$. ბ) $[-2;-1]\cup\{2\}$. გ) $[-6;-1)\cup(1;2]$ დ) $[-3;0]$ ე) $[1;+\infty)$ ვ) $[-1;+\infty)$.ზ) $\varnothing$ თ) $(-\infty;-1]\cup\{0\}$
18	a) კლებადობის შუალედებია: $[-1;0),[0;1]$ ზრდადობის შუალედია $[0;1]$. ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია: $x=-1$, $[0;1]$ (ისინი გლობალური მაქსიმუმის წერტილებიცაა). ლოკალური მინიმუმის წერტილებია: $(0;1]$.გლობალური მინიმუმის წერტილები არ აქვს.
	b) კლებადობის შუალედებია: $[-2;0]$, $[1;3]$. ზრდადობის შუალედებია: $[0;1]$, $[3;5]$. ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია: $x=1$, $x=5$, $x=-2$. $x=-2$ გლობალური მაქსიმუმის წერტილია. ლოკალური მინიმუმის წერტილებია: $x=0$, $x=3$. $x=3$ გლობალური მინიმუმის წერტილია.
	c) ზრდადობის შუალედებია: $[-3;-1]$, $[-0,4;0,2]$. კლებადობის შუალედია: $[-1;2]$. ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია: $x=-1$, $(-0,4;0,2]$. $x=-1$ გლობალური მაქსიმუმის წერტილია. ლოკალური მინიმუმის წერტილებია: $[-0,4;0,2)$, $x=-3$, $x=2$. $x=-3$, $x=2$ გლობალური მინიმუმის წერტილებია.
	d) კლებადობის შუალედია $[-2;2]$. ზრდადობის შუალედებია: $[-2;-1]$, $[1;4]$. ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია: $x=4$, $[-2;-1]$ (ისინი გლობალური მაქსიმუმის წერტილებიცაა). ლოკალური მინიმუმის წერტილებია: $[1;2]$ (ისინი გლობალური მინიმუმის წერტილებიცაა).
19	ა) და დ).
20	ა) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. ბ) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2-3x}$ გ) $y=\dfrac{x^2-1}{3}$, $x\ge 0$ დ) $y=\sqrt[3]{x-2}$

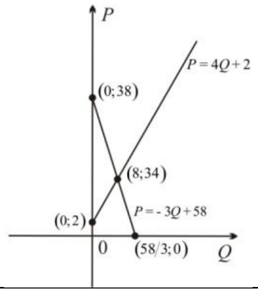
21	ა) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}, & x<1 \end{cases}$. ბ) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ \sqrt{x}, & 1\le x\le 16 \\ \log_2 x, & x>16 \end{cases}$

ლექცია 4

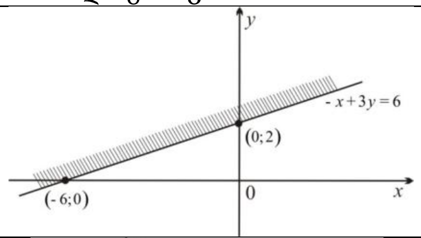
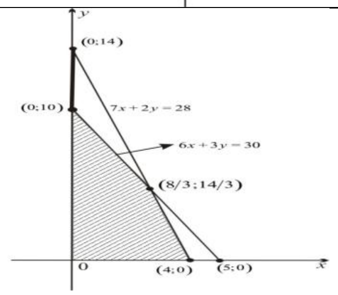
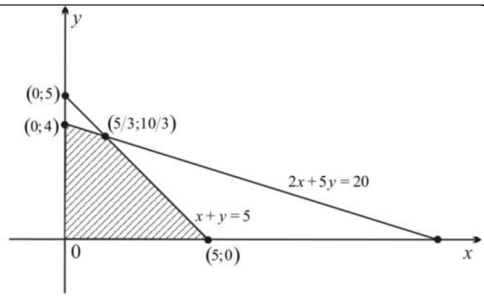
ს.№	
1	ა) x გადაკვეთაა $(0;0)$ წერტილში, y გადაკვეთა $(0;0)$ წერტილში. ბ) x გადაკვეთაა $(0;0)$ წერტილში, y გადაკვეთა $(0;0)$ წერტილში. გ) x გადაკვეთაა $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ წერტილში, y გადაკვეთა $(0;-1)$ წერტილში. დ) x გადაკვეთაა $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ წერტილში, y გადაკვეთა $(0;2)$ წერტილში. ე) x გადაკვეთებია $(0;0)$ და $\left(-\dfrac{5}{2};0\right)$ წერტილებში, y გადაკვეთა $(0;0)$ წერტილში.  ვ) x გადაკვეთებია $(-2;0)$ და $(1;0)$ წერტილებში, y გადაკვეთა $(0;-2)$ წერტილში.  ზ) x გადაკვეთა არ აქვს, y გადაკვეთა $(0;-1)$ წერტილში. 
2	ა) $y=3x-2$ ბ) $y=\dfrac{2}{3}x+4$ გ) $y=5x-7$ დ) $y=3x-1$ ე) $y=-5x+11$ ვ) $y=-8x-11$ ზ) $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{6}=1$ თ) $\dfrac{x}{-8}+\dfrac{y}{6}=1$ ი) $x=-1$ კ) $x=2$ ლ) $y=1$ მ) $y=1$ ნ) $x=4$ ო) $y=6$ პ) $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{2}$
3	$y=2x-7$
6	ა)ერთ წრფეზე მდებარეობენ. ბ)არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე.
7	$x=6$

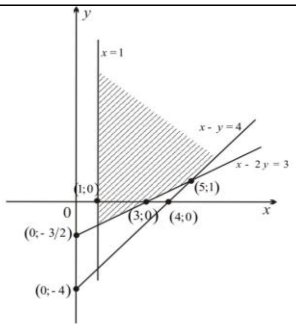
8	$y=8$
9	$k=\frac{11}{4}$
10	$-4<t<2$
11	$n\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{11}{9};+\infty\right)$
12	$y=3x-1$
13	$y=-\frac{4}{3}x$
14	$y=3x+3$
15	ა) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ ბ) $y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$ გ) $y=-2x+\frac{17}{3}$ დ) $y=x-2$
16	 ა)  დ)
17	$S=7{,}5$
19	$m=\frac{1}{3}$
20	$\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right)$
21	$(1;5)$
22	
23	$\frac{22}{\sqrt{10}}$.
24	$\frac{13}{\sqrt{37}}$
25	$\varphi=\frac{\pi}{3}$
26	$P=-\frac{1}{10}Q+310$
27	$P=-2Q+80$

28	ა) $P=-\frac{1}{4}Q+\frac{7}{2}$  ბ) 14 ნაყინი; 3,5 ლარი
29	ა) $P=40$ ბ) $Q=20$ გ)ფასი გაიზრდება 8 ერთეულით
30	 ა) $P=30$ ბ) $Q=10$ გ)ფასი 12 ერთეულით გაიზარდა დ)მოთხოვნა ერთი ერთეულით შემცირდება.
31	ა) $0\le Q\le 70$ ბ) $0\le P\le 350$
32	$P=\frac{1}{72}Q+25$, 
33	$P=3Q+100$
34	ა) $P=\frac{1}{20000}Q+0,5$ ბ)როცა ფასი 0,5 ლარზე ნაკლები ან ტოლი იქნება, მაშინ არ გაიტანს ბაზარზე
35	ა) $P=58$ ბ) $Q=15$ გ)მიწოდება გაიზრდება 0,5 ერთეულით.
36	
37	ა) წონასწორობის ფასი 30; წონასწორობის სიდიდე 10; წონასწორობის წერტილი: $(10;30)$ ბ) წონასწორობის ფასი 28; წონასწორობის სიდიდე 12; წონასწორობის წერტილი: $(12;28)$ გ) წონასწორობის ფასი 24; წონასწორობის სიდიდე 14; წონასწორობის წერტილი: $(14;24)$

	დ) წონასწორობის ფასი 40; წონასწორობის სიდიდე 20; წონასწორობის წერტილი: $(20;40)$
38	წონასწორობის წერტილი: $(8;34)$; წონასწორობის საბაზრო ფასი 34, 
39	ა) წონასწორობის ფასი 30; წონასწორობის სიდიდე 10 ბ)წონასწორობის წერტილი: $(8;34)$
40	ა) წონასწორობის ფასი 36; წონასწორობის სიდიდე 21 ბ) წონასწორობის წერტილია $(18;48)$, მომხმარებლისთვის ფასი გაიზარდა 12 ლარით .გაეზარდა საცალო ფასი
41	წონაწორობის დონე $(210;193)$, შემოსავალი $Y=210$; დანახარჯი $C=193$
42	$C=680$
43	$C=x+30$
44	1 საათში იწარმოება x კგ ძეხვი და $y=-\frac{5}{3}x+500$ კგ სოსისი; $0\le x\le 300$.
45	$y=300-15x$
46	$y^{\circ}F=1{,}8x^{\circ}C+32^{\circ}F$ ა)$18\frac{1}{3}^{\circ}C$ ბ)$158^{\circ}F$

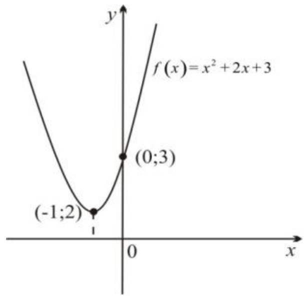
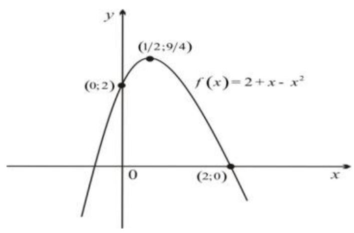
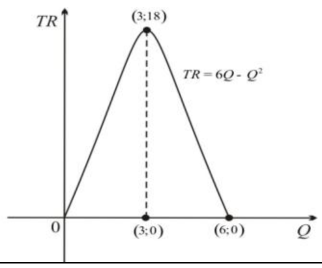
ლექცია 5

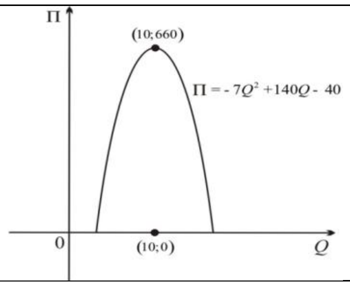
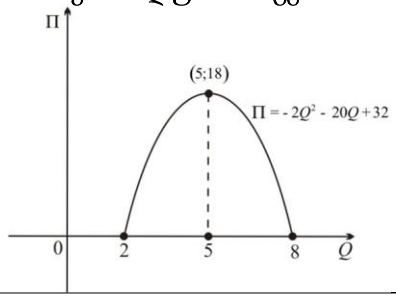
ს.№	
1	ა) 25 კმ-ზე ნაკლებ მანძილზე ეკონომიურია I კომპანია, ხოლო 25 კმ-ზე მეტ მანძილზე – II კომპანია. ბ)20 კმ-ზე ნაკლებ მანძილზე ეკონომიურია II კომპანია, ხოლო 20 კმ-ზე მეტ მანძილზე – I კომპანია.
2	
3	 ა)  ბ)

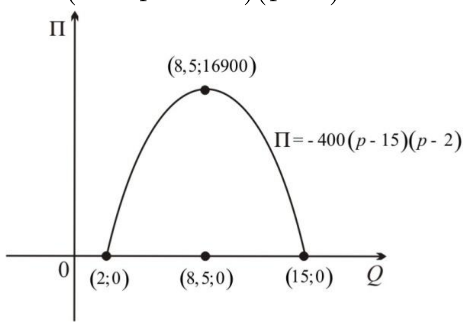
	 გ)
4	გ) $\max(-x+y)=12$, როცა $x=0$, $y=12$
5	ა) $\min(x-y)=-2$, როცა $x=0$, $y=2$. ბ) $\max(3x+5y)=6$, როცა $x=2$, $y=0$.
6	ა) $\max(4x+9y)=126$ მიიღწევა $(0;14)$ წერტილზე. ბ) $\max(3x+6y)=30$ მიიღწევა $(0;5)$ წერტილზე. გ) $(x+y)$-ს დასაშვებ არეში არ აქვს მაქსიმუმი. დასაშვები არე არ არის შემოსაზღვრული.
7	$\min(x+y)=1$ მიიღწევა $(1;0)$ წერტილზე.
8	ა) $\max(8x+3y)=16$ მიიღწევა $(2;4)$ წერტილზე. ბ) $\max(-8x+4y)=12$ მიიღწევა $(0;3)$ ან $(1;5)$ წერტილზე.
9	უნდა აწარმოონ 20 ცალი COM1 და 10 ცალი COM2 კომპიუტერი, მაშინ იქნება მაქსიმალური მოგება 19000 ლარი.
10	უნდა გამოსცენ მხოლოდ “მაკროეკონომიკის” 36 ეგზემპლარი მაქსიმალური მოგებისთვის, რომელიც შეადგენს 648 ლარს.
11	მინიმალური ღირებულების რაციონია: $\frac{7}{6}$ კგ თევზი და $\frac{9}{5}$ კგ ხორცის ნარჩენი.
12	მაქსიმალური მოგებისთვის უნდა გამოუშვან მაღალი ხარისხის ბეტონი 124 ერთეულით და დაბალი ხარისხის – 56 ერთეული, მაქსიმალური მოგება იქნება 204,8 ლარი.
13	x ერთეული I პაკეტი და y ერთეული II პაკეტი. წრფივი პროგრამირების ამოცანა ჩამოყალიბდება ასე: $$\begin{gathered}20x+26y\to\min,\\ 3x+12y\ge 396,\\ 6x+13y\ge 288,\\ 4x+3y\ge 255,\\ x\ge 0,\quad y\ge 0.\end{gathered}$$ დანახარჯი მინიმალური იქნება, თუ პირველი მომწოდებლისგან მიიღებს 48 ერთეულ პაკეტს, მეორისგან კი – 21 ერთეულს.
14	x ერთეული პროდუქტი 1, y ერთეული პროდუქტი 2, z ერთეული პროდუქტი 3. წრფივი პროგრამირების ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგი სახით: $$\begin{gathered}60x+142y+120z\to\min,\\ 5x+10y+15z\ge 30,\\ 2x+3y+2z\ge 8,\\ x+6y+z\ge 10,\\ x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.\end{gathered}$$ ულუფა იქნება მინიმალური კალორიებით; კერძოდ, 300 კალ, თუ მასში შევა 3

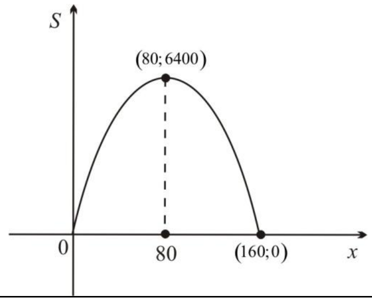
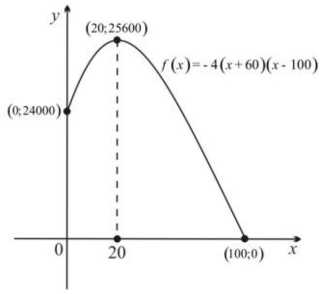
	ერთეული პროდუქტი 1, 1 ერთეული პროდუქტი 3 ანუ მინიმუმი მიიღწევა $(3;0;1)$ წერტილზე.

ლექცია 6

ს.№	
1	ა) $(-4;0)$, $(4;0)$ ბ) $(0;0)$, $(100;0)$ გ) $(9;0)$ დ) x გადაკვეთა არ აქვს
2	ა) -1 ბ) 5 გ) 18 დ) 9 ე) 11
3	ა) -4 ბ) $-\frac{31}{4}$ გ) -9 დ) 0 ე) $-\frac{25}{4}$
4	გ) $f(x)=x^2+2x+3$  დ) $f(x)=2+x-x^2$ 
5	ა) $P=50-4Q$ ბ) $P=\frac{10}{Q}$
6	$TR=-\frac{1}{5}Q^2+25Q$, მაქსიმალური ამონაგებია $781,2$ ლარი, როცა $Q=62$ ან $Q=63$.
7	$TR=-\frac{1}{100}Q^2+18Q$, მაქსიმალური ამონაგებია 8100 ლარი, სუვენირების ფასი ამ შემთხვევაში 9 ლარია.
8	მაქსიმალური ამონაგები იქნება 900 ბილეთის გაყიდვისას, ბილეთის ფასი ამ დროს 9 ლარია.
9	$TR=-2Q^2+140Q$, $Q_0=35$
10	$TR=6Q-Q^2$ 
11	$TR=12Q-3Q^2$
12	$AC=\frac{50}{Q}+58$
13	$\Pi=-2Q^2+72Q-70$ ა) ნულოვანი ზღვრისთვის $Q=1$ ან $Q=35$ ბ) $Q=18$ იძლევა მაქსიმალურ მოგებას
14	$\Pi=-7Q^2+140Q-40$, მაქსიმალური მოგება იქნება, როცა $Q=10$, ამ დროს ფასი 80 ლარია.

	
15	ა) $Q = 2500$ ბ) $Q = 3500$
16	$\Pi = -2Q^2 - 20Q - 32$, ნულოვანი ზღვრისთვის $Q = 2$ ან $Q = 8$; როცა $Q = 5$, მაშინ არის მაქსიმალური მოგება. 

ლექცია 7	
ს..№	
1	$f(x) = \begin{cases} 0,0122x, & 0 \le x \le 1200, \\ (x - 1200) \cdot 0,1 + 14,64, & 1200 < x \le 2400, \\ (x - 2400) \cdot 0,5 + 134,64, & x > 2400. \end{cases}$ x – მოხმარებული წყლის რაოდენობა დეკალიტრებში.
2	ა) $\Pi = (-400p + 6000)(p - 2)$  ბ) როცა სარეალიზაციო ფასი $p = 8,5$, მაშინ არის მაქსიმალური მოგება, რომელიც ტოლია 16900 ლარის.
3	ა)ნულოვანი ზღვარზე $Q = 150$ ერთეული. ბ)100 ერთეული პროდუქციის რეალიზებისას, წაგება არის 2500 ლარი. გ)მოგება იქნება 1250, როცა მოხდება 175 ერთეული პროდუქციის რეალიზება.
4	50 კმ-ზე ნაკლები მანძილისთვის პირველი ფირმა, 50 კმ-ზე მეტი მანძილისთვის მეორე ფირმა არის მომგებიანი.
5	$f(x) = x(18 - x)$, $-\infty < x \le 9$

6	$f(x)=x+\dfrac{318}{x}$, $x\in\left(-\infty;-\sqrt{318}\right]\cup\left(0;\sqrt{318}\right]$
7	$S=2x^2$, $x>0$
8	$S=x(160-x)$, $S_{\max}=6400$, როცა $x=80$. 
9	$V=\pi r^2(60-r)$, r ფუძის რადიუსია.
10	x დამატებით დასარგავი ხეების რაოდენობა, $f(x)$ – ჯამური მოსავალი, $f(x)=-4(x+60)(x-100)$  მაქსიმალური მოსავალი იქნება, თუ დამატებით დარგავს 20 ხეს, ანუ სულ 80 ხეს.

ლექცია 8

ს.№	
1	$a_{12}=0$; $a_{24}=9$; $a_{14}=7$; $a_{32}=-9$; $a_{24}=9$; $a_{34}=17$.
2	ა) $B=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\\5&5\end{pmatrix}$ ბ) $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}$ გ) $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}$
	დ) $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&2\end{pmatrix}$ ე) $B=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&1\\3&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$
3	ა) $A+B=\begin{pmatrix}7&2&-1\\4&17&-10\end{pmatrix}$ ბ) $A-3B=\begin{pmatrix}-21&-10&15\\4&-31&-6\end{pmatrix}$ გ) $A^T+C=\begin{pmatrix}1&-4\\2&7\\7&-9\end{pmatrix}$ დ) $2B^T+3C=\begin{pmatrix}17&-24\\12&30\\4&-2\end{pmatrix}$ ე) $A-4C^T=\begin{pmatrix}-4&-9&-13\\36&-3&-9\end{pmatrix}$
4	20

5	ა) $b=7;\quad a=7;\quad c=\frac{1}{3}$. ბ) $a=1;\quad b=-3;\quad c=15$.
6	ა) $\begin{pmatrix}-5 & 10\\ 3 & -4\end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix}12 & 1\end{pmatrix}$; გ) (-14); დ) $\begin{pmatrix}10 & 0 & -8\\ -15 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
7	$(AB)\cdot C = A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}41 & 88\\ 53 & 109\end{pmatrix}$.
8	$(AB)^T = B^T\cdot A^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 11\end{pmatrix}$.
9	B უნდა იყოს 5×3 რიგის მატრიცა
10	$A\cdot(B+C)=AB+AC=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 2 & -30 & -6\end{pmatrix}$.
11	ა) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 5\end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
12	I კანდიდატი – 72000 ლარი; II –81000 ლარი; III – 79500 ლარი.
13	I ტურისტმა დახარჯა 12 ლარი; II – 21 ლარი. $Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$, Q – შეძენილი პროდუქტების რაოდენობის მატრიცა; $P=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$, P – ფასების მატრიცა; $QP=\begin{pmatrix}12\\ 21\end{pmatrix}$, QP – დანახარჯების მატრიცა.
14	ა) 22 ; ბ)1 ; გ) 1; დ) 22; ე) -42 ; ვ) 36.
15	ა)0 ; ბ)10.
16	ა) $A_{11}=M_{11}=2,\quad M_{12}=1,\quad A_{12}=-1$ ბ) $A_{11}=M_{11}=7,\quad M_{12}=13,\quad A_{12}=-13$
17	ა) $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-35$ ბ) $\Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=-2\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & 0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-35$
18	ა) $x=-14$ ბ) $x=\pm4$
19	$x_1=5,\quad x_2=-1,\quad \lvert x_1x_2\rvert=5$

ლექცია 9

ს.№	
1	ა) შებრუნებადია. ბ) არ არის შებრუნებადი. გ)შებრუნებადია. დ)არ არის შებრუნებადი.

2	ა) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} -1 & -1{,}5 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.
3	ა) $b_{23} = \frac{5}{7}$; ბ) $b_{12} = \frac{6}{7}$. გ) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ – მეორე სტრიქონი. დ) $\begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ – მესამე სვეტი.
4	$\begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 11 & 6.5 \end{pmatrix}$.
5	$A = B^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 10 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 8 & -11 & -2 \end{pmatrix}$.
6	ა) $X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.; ბ) $X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; გ) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; დ) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$; ე) $X = \frac{1}{154} \begin{pmatrix} 80 & -20 \\ 42 & 28 \end{pmatrix}$.
7	ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. ბ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. გ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. დ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 = 1$, $y = 0$, $z = -1$.
8	ა) $(-1; 2)$;. ბ) $(1; 3)$; გ) $(2; 1; 3)$; დ) $(1; 2; -2)$; ე) $\left(-\frac{4}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; ვ) $(3; -1; 4)$.
9	ა) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$; ბ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
10	ა) $(1; 0; 2)$; ბ) $\left(\frac{13}{3}; -\frac{13}{3}; -\frac{10}{3}\right)$; გ) სისტემა არათავსებადია. დ) ზოგადი ამონახსნია $(1; 3+t; t)$, $t \in R$. ე) $(1; 2; 3; 4)$ ვ) სისტემა არათავსებადია.
11	ზოგადი ამონახსნია $(-t-12; -2t-9; t)$, $t \in R$; კერძო ამონახსნი, რომლისთვისაც $x_3 = 2$ არის $(-14; -13; 2)$.

12	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$, ზოგადი ამონახსნია $(5t+1; 7t-2; t)$, $t \in R$.
13	ზოგადი ამონახსნია $(1-2t; 2+t; t; t)$, $t \in R$; კერძო ამონახსნი, რომლისთვისაც $x_4 = 2$ არის $(-3; 4; 2; 2)$.

ლექცია 10

ს.№	
1	ა) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ბ) $\begin{pmatrix} -21 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$ გ) $\begin{pmatrix} -40 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 26 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$
3	$x = 5$
4	ასეთი α არ არსებობს
5	ა) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ბ) 44
6	ა) 17. ბ) $(2; -4; 11; 6)$
7	$q \cdot p = 18200$, სადაც $q = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \\ 2000 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
8	$p(n_4) \le 20$
9	ა) წრფივად დამოუკიდებელია. ბ) წრფივად დამოკიდებულია. გ) წრფივად დამოუკიდებელია. დ) წრფივად დამოუკიდებელია.
11	ა)ბაზისია ბ)ბაზისია გ)ბაზისია დ)არ არის ბაზისი
12	წრფივად დამოუკიდებელია
13	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
15	ა) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ბ) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
16	ა) საბალანსოა ბ) არ არის საბალანსო გ) არ არის საბალანსო დ) არ არის საბალანსო ე) საბალანსოა
17	$x = -3600$
18	საბალანსო მატრიცაა

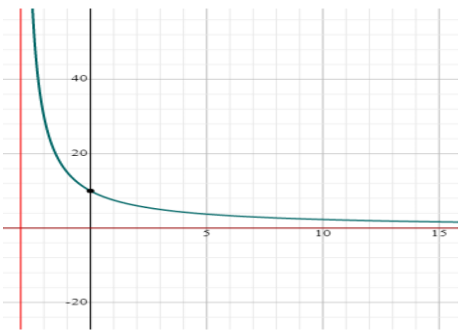
	$\begin{pmatrix} 850 & 2050 & 4150 & 5750 \\ 1300 & 1900 & 1900 & 2900 \\ 0 & -400 & 1100 & -100 \\ -2000 & -2000 & -3000 & -4400 \\ 0 & -1400 & -1400 & -1400 \\ -150 & -150 & -2750 & -2750 \end{pmatrix}$
19	განხორციელდა სამი ტრანზაქცია, რომელთა შესამამისი ვექტორებია: $v_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ -180 \\ 50 \\ -70 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -160 \\ -230 \\ 190 \\ 200 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 400 \\ 210 \\ -310 \\ -300 \end{pmatrix}$
20	7500
21	არ არის ექვივალენტური, $p \cdot q_1 = 4950$, $p \cdot q_2 = 5880$
22	$x = 270$
23	ექვივალენტური წყვილებია: x_1 და x_4: x_2 და x_3.

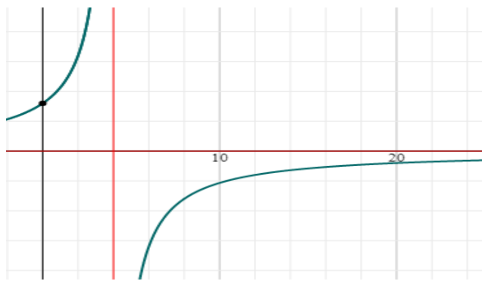
ლექცია 11	
ს.№	
1	a_{23} აღნიშნავს მე-2 დარგის პროდუქციის იმ მოცულობას პ/ე , რომელიც საჭიროა მე-3 დარგის ერთი პ/ე პროდუქციის საწარმოებლად. $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ გამოხატავს პირველი დარგის პროდუქციის მოცულობათა ჯამს პ/ე, რომელიც საჭიროა პირველი, მეორე, და მესამე დარგის პროდუქციის ერთი პ/ე საწარმოებლად: $x_2 - y_2$ - არის მეორე სახის პროდუქციის მოცულობა პ/ე, რომელიც რჩება ამ პრუდუქციაზე შიდა მთხოვნის დაკმაყოფილების შემდეგ . b_{11} აღნიშნავს პირველი დარგის პროდუქციის მოცულობას პ/ე, რომელიც საჭიროა პირველი დარგის ერთი პ/ე საბოლოო პროდუქციის წარმოებისათვის.
2	საბოლოო პროდუქციის ვექტორი $y = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 160 \end{pmatrix}$.
3	შეუძლია უზრუნველყოს
4	A – რენტაბელურია, B – რენტაბელურია, C – არარენტაბელურია. D – არარენტაბელურია.
5	$0 \le x < 0,3$.
6	$0 \le y \le 0,1$
7	$0 \le z \le 0,1$
8	$x = \begin{pmatrix} 46800 \\ 44100 \\ 63000 \end{pmatrix}$.
9	წარმოების გეგმაა: $\begin{pmatrix} 1 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,4 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix} =$

10	შრომის აუცილებელი მთლიანი დანახარჯი მიახლოებით არის 1031670,5 ჰ/ე.
11	ა) I – 0,8 ნაწილი, II – 0,6 ნაწილი, III – 0,6 ნაწილი. ბ) I – 0,6 ნაწილი, II – 0,4 ნაწილი, III– 0,7 ნაწილი.
12	ა) $x_1 : x_2 : x_3 = 3:8:6$, სადაც x_1, x_2, x_3 ეროვნული შემოსავლებია. ბ) $x_1 : x_2 : x_3 = 28:10:45$.

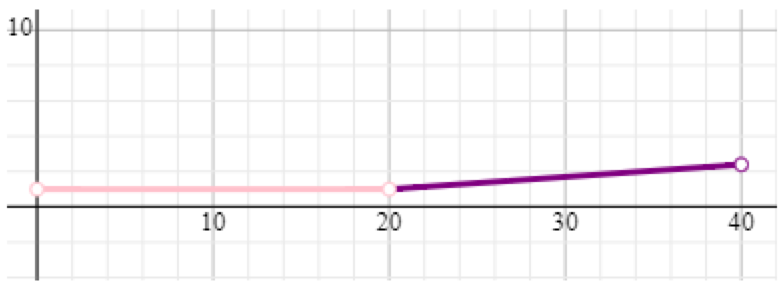
ლექცია 12

ს.№	
1	ა) 4 ბ) 9-4$\sqrt{2}$ გ)-8 დ) $\frac{2}{3}$ ე) $\frac{1}{2}$ ვ) -8 ზ) $\frac{4}{7}$ თ) $\frac{5}{2}$ ი) ∞ კ) ∞ ლ) 2 მ) 6 ნ) 7 ო) 5 პ) $\frac{5}{3}$
2	ა) ∞ ბ) $-\infty$ გ) $-\infty$ დ) ∞ ე) $\frac{1}{2}$ ვ) $-\frac{3}{2}$ ზ) 0 თ) 0 ი) ∞ კ) $-\infty$ ლ) 0 მ) 3 ნ) 1
3	ა) $P(0) = 10$; $Q(0) = 16$ ბ) როცა $t \to \infty$-კენ, $P(t)$ და $Q(t)$ ფუნქციები მიისწრაფის ნულისკენ გ)

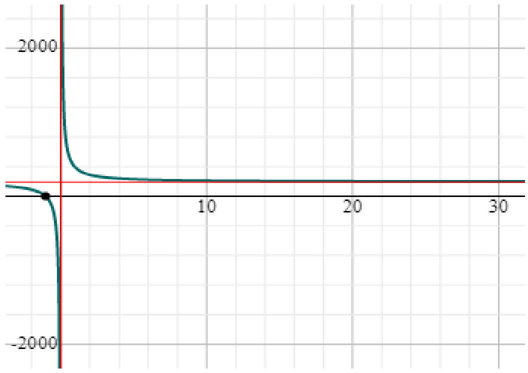


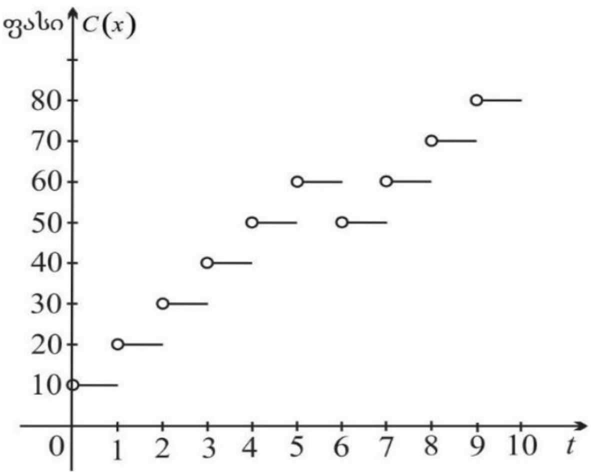
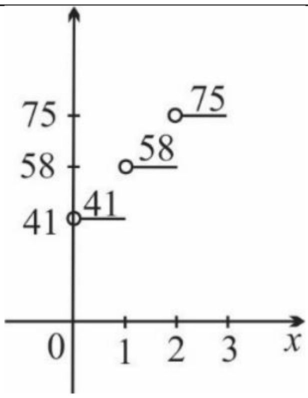


4	ა) $P(t) = \frac{\sqrt{9t^2+0.5t+179}}{0.2t+1500}$ ბ) 15 ათასი
5	გახდება 6 ათასი
6	ა) $F(x) = \begin{cases} 0.99, & 0 < x \leq 20 \\ 0.99 + 0.07(x-20), & x > 20 \end{cases}$ ბ)



	გ) 0.99; 0.99; 0.99
7	ა) $C(x) = 200 + 190x$

	ბ) $\overline{C(x)} = \frac{200+190x}{x}$, $x = 0$ და $y = 190$  გ) 190
8	ა) 40 ბ)21 გ) 100; ხანგრძლივი დატრენინგების შემდეგ თანამშრომელი გამოუშვებს 100 კომპონენტს
9	5 მლგრ/მლლიტრ; ხანგრძლივი ინექციის შედეგად, პაციენტის სისხლში პრეპარატის კონცენტრაცია იქნება 5 მლგრ/მლლიტრი.
10	8.4
11	ა) 16 ბ) -10 გ) $\sqrt{3}$ დ) -25 ე) $-2{,}5$ ვ) ∞ ზ) 0 თ) 2
12	**11.19** **(a)** - b, **(b)** - b, **(c)** - b, **(d)** - არ არსებობს **11.20** **(a)** - არ არსებობს, **(b)** - b.
13	**(a)** $\lim_{x\to2-} f(x) = -2, \lim_{x\to2+} f(x) = 1,$ $\lim_{x\to2} f(x)$ არ არსებობს **(b)** $\lim_{x\to2-} f(x) = 4, \lim_{x\to2+} f(x) = 2,$ $\lim_{x\to2} f(x)$ არ არსებობს **(c)** $\lim_{x\to2-} f(x) = 2, \lim_{x\to2+} f(x) = 2,$ $\lim_{x\to2} f(x) = 2$ **(d)** $\lim_{x\to2-} f(x) = 2, \lim_{x\to2+} f(x) = \infty,$ $\lim_{x\to2} f(x)$ არ არსებობს
14	$x=1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.
15	$x=3$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.
16	ა) $y=7,\ y=-7$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია. ბ) $y=1,\ y=-1$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია.
17	ა) 39 ბ) 1 გ) 0 დ) 0 ე) $\frac{5}{4}$ ვ) ∞ ზ) 0 თ) $\frac{1}{2}$ ი) $\frac{1}{4}$ კ) $\frac{1}{3}$
18	ა) $\lim\limits_{x\to3-} f(x)=15,\ \lim\limits_{x\to3+} f(x)=0;$ ბ) $\lim\limits_{x\to-1-} f(x)=-\frac{1}{2},\ \lim\limits_{x\to-1+} f(x)=-1;$ გ) $\lim\limits_{x\to4-} f(x)=\lim\limits_{x\to4+} f(x)=\frac{1}{4};$ დ) $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=\lim\limits_{x\to2+} f(x)=1-\frac{\sqrt{2}}{2};$ ე) $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to2+} f(x)=2;$ ვ) $\lim\limits_{x\to0-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to0+} f(x)=-1;$ ზ) $\lim\limits_{x\to3-} f(x)=10,\ \lim\limits_{x\to3+} f(x)=10;$ თ) $\lim\limits_{x\to-1-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=-2$
19	$x=5$ წერტილში ფუნქციას ზღვარი არ აქვს.
20	ა)უწყვეტია $x=2$ წერტილში; ბ) $x=0$ წერტილში უწყვეტია; გ) $x=1$ წერტილში უწყვეტია; დ) $x=2$ წერტილში უწყვეტია; ე)არ არის უწყვეტი $x=1$ წერტილში; ვ)არ არის უწყვეტი $x=2$ წერტილში.
21	ა) უწყვეტია $(-\infty;+\infty)$ შუალედზე; ბ) უწყვეტია $(-\infty;+\infty)$ შუალედზე; გ) უწყვეტია $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ შუალედზე; დ)უწყვეტია $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ შუალედზე; ე)უწყვეტია $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ შუალედზე; ვ)უწყვეტია $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ შუალედზე;

	ზ)უწყვეტია $(-\infty;-3)\cup(-3;6)\cup(6;+\infty)$ შუალედზე; თ)უწყვეტია $(-\infty;-5)\cup(-5;1)\cup(1;+\infty)$ შუალედზე; ი)უწყვეტია $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$ შუალედზე; კ)უწყვეტია $(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$ შუალედზე; ლ)უწყვეტია $(-\infty;+\infty)$ შუალედზე; მ)უწყვეტია $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ შუალედზე; ნ)უწყვეტია $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ შუალედზე.
24	ა) $C(x)$ ფუნქციის გრაფიკი  ბ) $C(4,5)=50$, $\lim\limits_{x\to 4,5} C(x)=50$; გ) $C(8)=60$, $\lim\limits_{x\to 8} C(x)$ არ არსებობს; დ) $C(x)$ უწყვეტია $x=4,5$ წერტილში, ხოლო $x=8$ წერტილში არ არის უწყვეტი.
25	ა)  ბ) $p(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $x=1$, $x=2$ წერტილებში.
26	ა) $A=6$ ბ) $A=-1$

ლექცია 13	
ს.№	
1	$m=-\frac{2}{3}$; კლებადია.
4	$f'(2)=448$.
5	ა) $y'=8x^7$; ბ) $y'=50x^{49}$; გ) $y'=17x^{16}$; დ) $y'=777x^{776}$.
6	ა) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ბ) $f'(x)=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$; გ) $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.
7	ა) $(\pm3;\pm243)$; ბ) $\left(-\frac{1}{2};4\right)$.
8	ა) $y'=18x^2$; ბ) $y'=-\frac{4}{x^2}$; გ) $y'=5$; დ) $y'=2x+1$; ე) $y'=3x^2-4$; ვ) $y'=2+\frac{11}{x^2}$; ზ) $y'=12x^3+15x^2-16x-1$; თ) $y'=a$; ი) $y'=2ax+b$.
9	ა) $f'(a)=27a^8,\quad f(1)=27$; ბ) $f'(a)=2a-2,\quad f'(3)=4$; გ) $f'(a)=3a^2-8a+2,\quad f'(0)=2$; დ) $f'(a)=20a^3+\frac{16}{a^5},\quad f'(-1)=-36$; ე) $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{2}{a^2},\quad f'(4)=\frac{3}{8}$.
10	ა) $\frac{dQ}{dP}=2P+1$; ბ) $\frac{d(TR)}{dQ}=50-6Q$; გ) $\frac{d(AC)}{dQ}=-\frac{30}{Q^2}$; დ) $\frac{d\Pi}{dQ}=-6Q^2+30Q-24$.
11	ა) $\frac{dy}{dx}=18x-12$; ბ) $\frac{dy}{dx}=36-24x$; გ) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; დ) $\frac{dy}{dx}=8x^3-6x$; ე) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{(x^2+1)^3}$; ვ) $\frac{dy}{dx}=-\frac{6x}{(3x^2+5)^2}$.
12	ა) $y'=22(2x+1)^{10}$; ბ) $y'=(8x+12)(x^2+3x-6)^3$; გ) $y'=-\frac{8}{(8x-5)^2}$; დ) $y'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; ე) $y'=\frac{7}{2\sqrt{7x-3}}$.
13	ა) $y'=(x+3)^4(7x^2+6x)$; ბ) $y'=x^4(4x+3)(28x+15)$; გ) $y'=\frac{9x^4+8x^3}{2\sqrt{x+1}}$; დ) $y'=3\cos3x\cos2x-2\sin3x\sin2x$.
14	ა) $y'=\frac{x(x+8)}{(x+4)^2}$; ბ) $y'=\frac{11}{(x+5)^2}$; გ) $y'=\frac{5x^3-6x^2}{2(x-1)^{3/2}}$; დ) $y'=\frac{1}{1+\cos x}$; ე) $y'=\frac{\sin x\cdot\cos x-2-x}{\sin^2 x}$.
15	ა) $y=10x+2$; ბ) $y=-9x+4$; გ) $y=-\frac{1}{16}x+2$; დ) $y=-\frac{11}{12}x+15$; ე) $y=-4x-2$; ვ) $y=\frac{9}{2}x-\frac{1}{2}$.
16	ა) $y=-4x-1$; ბ) $y=4x-14$; გ) $y=3x-3$; დ) $y=\frac{193}{4}x-127$; ე) $y=-3x+\frac{22}{3}$; ვ) $y=2x-4$.

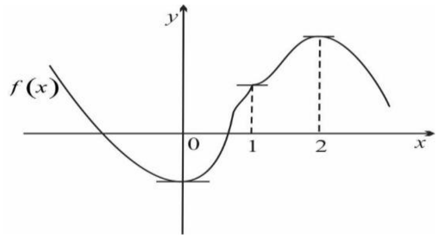
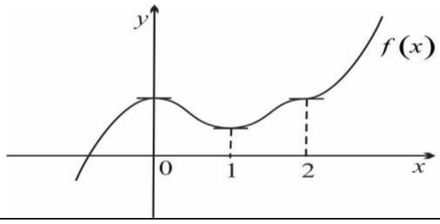
17	ა) $R(t)=Q'(t)=-3t^2+16t+15$; ბ) $R'(1)=10$, 10 ერთეულით გაიზრდება;
18	$M'(9)=-0.12$, გაყიდვები ხარჯების ამ დონისთვის შემცირდება.
19	ა) $P'(9)=20$, მოსახლეობა იზრდება 20 ერთეულით; ბ) $\frac{P'(9)}{P(9)}\cdot 100\% \approx 0.39\%$, იზრდება 0.39%-ით.
20	ა) $F(t)=\frac{2}{45+2t}\cdot 100\%$; ბ) ხელფასი იზრდება 4.25%-ით; გ) გრძელვადიან პერსპექტივაში ხელფასის პროცენტული ტემპი ნულისკენ მიისწრაფვის.

ლექცია 14

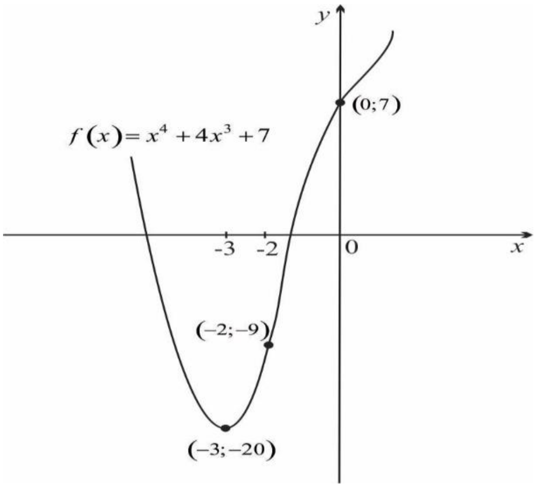
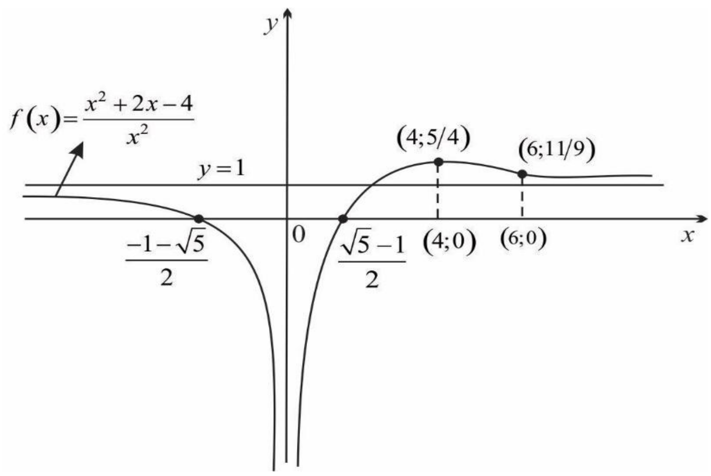
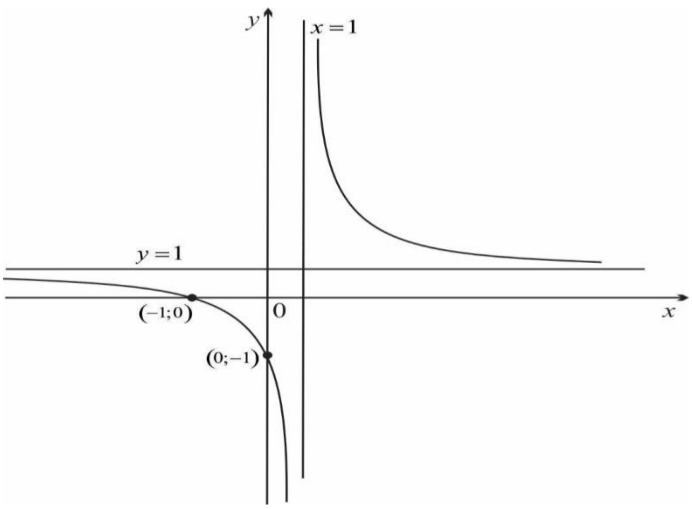
ს.№	
1	ა) $\frac{d^2y}{dx^2}=14$; ბ) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6}{x^4}$; გ) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$.
2	ა) $f''(x)=24x$; ბ) $f''(x)=24(x+4)(x+2)$; გ) $f''(x)=\frac{6(1-x)}{(x+1)^4}$.
3	$f''(2)=4$
4	ა) $dy=-\frac{14x}{(3x^2+1)^2}dx$; ბ) $dy=(-5x^4+4x^3+3x^2+18x-1)dx$; გ) $df(x)=10(5x^4-3x^2+2x+1)^9(20x^3-6x+2)dx$; დ) $df(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.
5	ა) -2; ბ) $\frac{7}{9}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) 2; ე) ∞; ვ) ∞. ზ) 2 თ) $\frac{1}{3}$; ი) $\frac{3}{4}$; კ) $\frac{5}{3}$.
6	ა) $TR=60Q-Q^2$, $MR=60-2Q$; ბ) $MR(50)=-40$; გ) $\Delta TR(50)=-41$; $\Delta TR\approx MR(50)=-40$;
7	ა) 200; ბ) $\Delta(TR)(25)\approx MR(25)\Delta Q=1000$.
8	ა) $TR=80Q-Q^2$, $MR=80-2Q$; ბ) $MR(20)=40$; გ) $\Delta TR(20)=39$.
9	ა) $MR=6-4Q$; ბ) $MR=\frac{250(Q+6)}{\sqrt{(3+Q)^3}}$; გ) $MR=\frac{600-16Q}{3\sqrt[3]{(200-4Q)^2}}$.
10	ა) $TC=400+4Q$, $MC=4$; ბ) 560; გ) 12.
11	ა) $TC=3Q^2+4Q+15$, $MC=6Q+4$; ბ) $\Delta TC\approx -248$.
12	ა) $TC=78+4Q$, $MC=4$; ბ): 1) $\Delta TC(50)=12$, როცა $\Delta Q=2$; 2) $\Delta TC(50)=-16$, როცა $\Delta Q=-4$.
13	საშუალო დანახარჯი $AK=0.03Q-2+\frac{300}{Q}$; მარგინალური დანახარჯი $MK=0.06Q-2$; $AK(50)=5.5$, $AK(100)=4$; $MK(50)=1$, $MK(100)=4$;
14	$MR=100-8Q$; ა) $\Delta TR\approx -760$, $\Delta Q=2$; ბ) $\Delta TR\approx -1140$, $\Delta Q=3$.
15	ა) $M\Pi=-2Q+296$; ბ) $\Delta\Pi(40)\approx 432$; გ) $\Pi(42)-\Pi(40)=428$, განსხვავდება 4 ერთეულით.

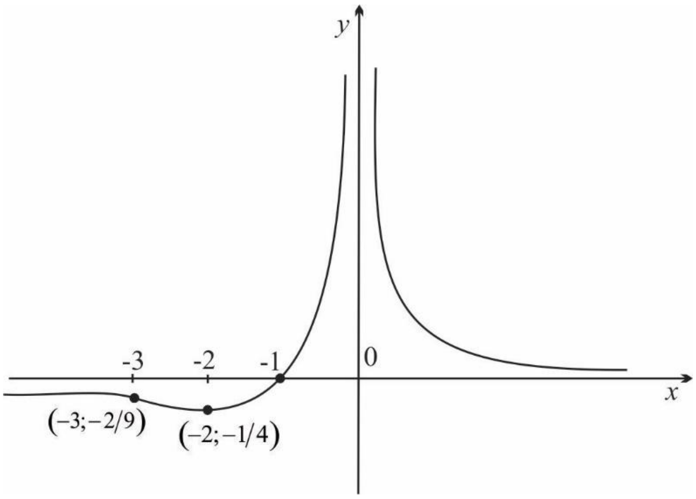
ლექცია 15	
ს.№	
1	ა) I. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$, II. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$; ბ) I. $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{7}$, II. $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{7}$; გ) I. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y}$, II. $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-5}}$; დ) I. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y^2}$, II. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(12-x^2)^2}}$; ე) I. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, II. $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}$.
2	ა) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-3x^2}{3y^2-x}$; ბ) $\frac{dy}{dx}=\frac{5-2xy^3}{2+3x^2y^2}$; გ) $\frac{dy}{dx}=\frac{3-2y^2}{2y+4xy}$; დ) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2}$; ე) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$; ვ) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2y\sqrt{2x}}$; ზ) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{x-1}$; თ) $\frac{dy}{dx}=\frac{8x-3y}{2y-3x}$; ი) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(2x+y)^2}-2$; კ) $\frac{dy}{dx}=\frac{2(x-2y)}{1+4x+8y}$; ლ) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-10x(x^2+3y^2)^4}{30y(x^2+3y^2)^4-2x}$.
3	ა) $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$; ბ) $y=-1$; გ) $y=-\frac{1}{2}x+2$; დ) $y=4x-\frac{1}{2}$; ე) $y=\frac{5}{8}x-\frac{9}{4}$; ვ) $y=-4x-1$; ზ) $y=\frac{13}{12}x+\frac{11}{12}$; თ) $y=\frac{1}{12}x+2$.
4	ა) I. ჰორიზონტალური მხები არ აქვს; II. $x=9$ არის ვერტიკალური მხები $(9;0)$ წერტილში. ბ) I. ჰორიზონტალური მხები არ აქვს; II. ვერტიკალური მხები არ აქვს. გ) I. ჰორიზონტალური მხები არ აქვს; II. ვერტიკალური მხები აქვს $(0;0)$ და $(64;2)$ წერტილებში, $x=0$ და $x=64$ ვერტიკალური მხებებია, შესაბამისად. დ) I. $y=-2$ ჰორიზონტალური მხებია $(1;-2)$ წერტილში, $y=2$ ჰორიზონტალური მხებია $(-1;2)$ წერტილში; II. $x=-2$ ვერტიკალური მხებია $(-2;1)$ წერტილში, $x=2$ ვერტიკალური მხებია $(2;-1)$ წერტილში; ე) I. ჰორიზონტალური მხები აქვს $(1;2)$ და $(-1;-2)$ წერტილებში, $y=2$ და $y=-2$, შესაბამისად; II. ვერტიკალური მხები აქვს $(2;1)$ და $(-2;-1)$ წერტილებში, $x=2$ და $x=-2$, შესაბამისად.
5	თევზის პოპულაცია შემცირდება 70 ერთეულით.
6	მიწოდება იზრდება 1740 ერთეულით.
7	მოთხოვნა გაიზრდება 27.4 ერთეულით.
8	მოთხოვნა გაიზრდება 15.4 ერთეულით.
9	სიჩქარე გაიზრდება 0.0006 მ/წმ-ით.
10	კაპიტალდაბანდება შემცირდება 400 ლარით.

ლექცია 16	
ს.№	
1	ა) ზრდადობის შუალედია: $[2;+\infty)$; კლებადობის შუალედია: $(-\infty;2]$; ბ) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-2]$, $[0;+\infty)$; კლებადობის შუალედია: $[-2;0]$; გ) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$; კლებადობის შუალედია: $[-1;1]$; დ) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-3]$, $[3;+\infty)$; კლებადობის შუალედია: $[-3;3]$; ე) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;0]$, $[4;+\infty)$; კლებადობის შუალედია: $[0;4]$; ვ) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$; კლებადობის შუალედია: $[-1;1]$; ზ) ზრდადობის შუალედებია: $[0;2)$, $(2;+\infty)$; კლებადობის შუალედებია: $(-\infty;-2)$, $(-2;0]$; თ) ზრდადობის შუალედებია: $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; კლებადობის შუალედებია: $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$; ი)ზრდადობის შუალედია: $[-3;0]$; კლებადობის შუალედია: $[0;3]$; კ) ზრდადობის შუალედია: $\left[-3;-\frac{1}{2}\right]$; კლებადობის შუალედია: $\left[-\frac{1}{2};2\right]$; ლ) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-3]$, $[3;+\infty)$; კლებადობის შუალედებია: $[-3;0)$, $(0;3]$; მ) ზრდადობის შუალედია: $(-3;3]$; კლებადობის შუალედებია: $(-\infty;-3)$, $[3;+\infty)$.
2	ა) კრიტიკული წერტილებია: $x=0$, $x=1$, $x=0$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია, $x=1$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი; ბ) კრიტიკული წერტილებია: $x=3$, $x=9$, $x=3$ ლოკალური მქასიმუმის წერტილია, $x=9$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია; გ) კრიტიკული წერტილია: $t=-1$, $t=-1$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი; დ) კრიტიკული წერტილებია: $t=-1$, $t=0$, $t=0$ რის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, $t=-1$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი; ე) კრიტიკული წერტილია: $x=1$, $x=1$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი; ვ) კრიტიკული წერტილია: $x=-1$, $x=-1$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი; ზ)კ რიტიკული წერტილებია: $t=-\sqrt{3}$, $t=\sqrt{3}$, $t=-\sqrt{3}$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, $t=\sqrt{3}$ არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი; თ) კრიტიკული წერტილებია: $t=6$, $t=9$, $t=6$ არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, $t=9$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი; ი) კრიტიკული წერტილებია: $t=0$, $t=4$, $t=0$ არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, $t=4$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი;

	კ)კრიტიკული წერტილია: $x=3$, $x=3$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი.
3	ა) $t\in(1;\infty)$; ბ) $t\in\varnothing$; გ) $t\in(4;+\infty)$; დ) $t\in\left(-\infty;-\frac{1}{12}\right)$.
4	იხ. ნახ. 1  ნახ. 1
5	იხ. ნახ. 2 
6	$a=-\frac{9}{25}$, $b=\frac{18}{5}$, $c=3$.
7	$a=2$, $b=3$, $c=-12$, $d=-12$.
8	ა) $y_{\max}=f(-3)=20$, $y_{\min}=f(3)=-16$; ბ) $y_{\max}=f(-2)=5$, $y_{\min}=f(0)=1$; გ) $y_{\min}=f(3)=-17$; დ) ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი; ე) ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი; ვ) $y_{\max}=f(-1)=4$, $y_{\min}=f(1)=-4$; ზ) $y_{\min}=f(0)=-125$; თ) $y_{\min}=f(2)=0$.
9	ა) $y_{\min}=f(0)=1$, $y_{\max}=f(-2)=5$; ბ) $y_{\max}=f(0)=3$, $y_{\min}=f(1)=2$, $y_{\min}=f(-1)=2$; გ) $y_{\max}=f(0)=81$, $y_{\min}=f(\pm3)=0$; დ) $y_{\min}=f(1)=2$, $y_{\max}=f(-1)=-2$; ე) $y_{\min}=f(3)=13$, $y_{\max}=f(-3)=-11$; ვ) $y_{\max}=f(0)=0$, $y_{\min}=f(4)=8$; ზ) $y_{\min}=f(0)=0$, $y_{\max}=f(2.5)=39.0625$, $y_{\min}=f(5)=0$; თ) $y_{\min}=f(0)=0$; ი) $y_{\max}=f(0)=2$; კ) $y_{\min}=f(-3)=-\frac{1}{8}$.
10	ა) $abs\cdot\min f(x)=f(3)=-16$, $abs\cdot\max f(x)=f(-3)=20$;

	ბ) $abs \cdot \min f(x) = -80, \quad abs \cdot \max f(x) = f(5) = f(0) = 1$; გ) $abs \cdot \min f(x) = -56 = f(-2), \quad abs \cdot \max f(x) = f(-1) = 2$; დ) $abs \cdot \min f(x) = f(0) = 3, \quad abs \cdot \max f(x) = f(1) = 52$; ე) $abs \cdot \min f(x) = f(3) = 5^5, \quad abs \cdot \max f(x) = f(\pm 2) = 0$; ვ) $abs \cdot \min f(x) = f(-2) = -\frac{4}{3}, \quad abs \cdot \max f(x) = f(2) = 4$; ზ) $abs \cdot \min f(x) = f(-1) = -2, \quad abs \cdot \max f(x) = f(3) = 3\frac{1}{3}$; თ) $abs \cdot \min g(x) = g(2) = -\frac{1}{5}, \quad abs \cdot \max g(x) = g(0) = -\frac{1}{9}$;
11	შემოსაღობი მასალის მინიმალური რაოდენობაა 200 მეტრი. ამ დროს კემპინგის სიგრძეა 100 მ, ხოლო სიგანე 50 მ.
12	ყველაზე ეკონომიური მარშრუტია, როცა კაბელი მიაღწევს მოპირდაპირე ნაპირს ელექტროსადგურიდან ქვემოთ 1200 მეტრის დაშორებით. ხარჯი ასეთ შემთხვევაში იქნება მინიმალური და შეადგენს 14 700 ლარს.
13	10 სმ
14	ცილინდრის სიმაღლე უნდა იყოს ფუძის დიამეტრის ტოლი.
15	ა) ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty;-4], \quad [-2;+\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია: $[-4;-2]$, გადაღუნვის წერტილებია: $(-4;0)$ და $(-2;-32)$; ბ) ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty;-1], \quad [1;+\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია: $[-1;1]$, გადაღუნვის წერტილებია: $(-1;4)$ და $(1;4)$; გ) ჩაზნექილობის შუალედია: $(-\infty;+\infty)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს; დ) ამოზნექილობის შუალედებია: $(-\infty;-1], \quad [1;+\infty)$, ჩაზნექილობის შუალედია: $[-1;1]$, გადაღუნვის წერტილებია: $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$ და $\left(1;\frac{1}{4}\right)$; ე) ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty;-1], \quad [0;+\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია: $[-1;0]$, გადაღუნვის წერტილებია: $(-1;1)$ და $(0;1)$; ვ) ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty;-4], \quad [1;+\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია: $[-4;1]$, გადაღუნვის წერტილებია: $(-1;-488)$ და $(1;7)$;
16	ა) $x=0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია, $y=x$ დახრილი ასიმპტოტია; ბ) ვერტიკალური ასიმპტოტი არ აქვს, $y=3x$ დახრილი ასიმპტოტია გ) ვერტიკალური ასიმპტოტი არ აქვს, $y=x$ დახრილი ასიმპტოტია, როცა $x \to +\infty$, $y=-x$ დახრილი ასიმპტოტია, როცა $x \to -\infty$; დ) ვერტიკალური ასიმპტოტები არ აქვს, $y=x$ დახრილი ასიმპტოტია. ე) ვერტიკალური ასიმპტოტებია $x=0$ და $x=4$. დახრილი ასიმპტოტია $y=2x+8$:

	ვ) ვერტიკალური ასიმპტოტია $x=-\frac{2}{3}$, დახრილი ასიმპტოტია $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$:
17	
ა)	იხ. ნახ. 3  ნახ. 3
ბ)	იხ. ნახ. 3  ნახ. 4
გ)	იხ. ნახ. 5  ნახ. 5

დ)	იხ. ნახ. 6  ნახ. 6

ლექცია 17

ს.№	
1	$Q=10$.
2	$TC=100+4Q^2$, $AC=4Q+\dfrac{100}{Q}$, $MC=8Q$, AC მინიმალურია, როცა $Q=5$, $AC(5)=MC(5)=40$.
3	როცა $L=30$, საშუალო შრომის ნაყოფიერება არის მაქსიმალური, $MP_L(30)=AP_L(30)=450$.
4	11:00 საათისთვის, ანუ $t=3$ სთ-ის შემდეგ მუშაობის დაწყებიდან შრომის ნაყოფიერება (მწარმოებლობა) იქნება მაქსიმალური.
5	ა) 9:30 საათისთვის მწარმოებლობა იქნება მაქსიმალური, ანუ $t=1.5$ სთ-ის შემდეგ; ბ) მწარმოებლობა მინიმალური იქნება, როცა $t=4$ სთ-ის შემდეგ, ანუ 12 საათისთვის.
6	ა) როცა $Q=6000$ არის მაქსიმალური მოგება, $P_{\max}=17600$ ლარი; ბ) AC მინიმალურია, როცა $Q=10000$; გ) $AC=MC$, როცა $Q=10000$.
7	$L=10$, $MP_L=AP_L=2000$, როცა $L=10$.
8	ა) როცა $Q=5$, მაშინ სრული ამონაგები R მაქსიმალურია; ბ) მოგება P მაქსიმალურია, როცა $Q=4$, $P_{\max}=P(4)=30$, $MR=MC=4$.
9	საშუალო დანახარჯი მინიმალურია, როცა $Q=6$, $AC(6)=MC(6)=15$.
10	$t=12.5$ ლარი.
11	$AC=\dfrac{13}{Q}+Q+2$, ა) $AC(1)=16$, $AC(2)=10.5$, $AC(3)=9\dfrac{1}{3}$, $AC(4)=9\dfrac{1}{4}$, $AC(5)=\dfrac{48}{5}$, $AC(6)=10\dfrac{1}{6}$; ბ) AC ფუნქციას მინიმუმი აქვს, როცა $Q=\sqrt{13}\approx 3.4$; გ) $AC(3)>AC(4)$, ე. ი. მინიმალური დანახარჯია, როცა $Q=4$.

12	ა) $t=333$ დღე, მაქსიმალური შეკვეთა დღეში 37037; ბ) 167-ე დღეს.
13	$Q=\frac{1000}{6}=166\frac{2}{3}$, $R_{\max}(167)\approx 303.94$, $Q=167$
14	ა) $TR=-\frac{1}{4}Q^2+4Q$, $P=-\frac{1}{20}Q^3+\frac{1}{20}Q^2+2Q-4$, $MR=-\frac{1}{2}Q+4$, $MC=2-\frac{3}{5}Q+\frac{3}{20}Q^2$; ბ) მოგება მაქსიმალურია, როცა $Q=4$; გ) $MR(4)=MC(4)=2$.
15	$t=3$ ლარი.
16	ა) $ED(p)=\frac{-1.3p}{10-1.3p}$, $ED(4)=-\frac{13}{12}$, მოთხოვნა ელასტიკურია; ბ) $ED(p)=\frac{-1.5p}{25-1.5p}$, $ED(12)=-\frac{18}{7}$, მოთხოვნა ელასტიკურია; გ) $ED(p)=\frac{-2p^2}{200-p^2}$, $ED(10)=-2$, მოთხოვნა ელასტიკურია; დ) $ED(p)=\frac{-0.01p^2}{400-0.01p^2}$, $ED(120)=-\frac{9}{16}$, მოთხოვნა არაელასტიკურია.
17	$E(p)=\frac{-2p^2}{300-p^2}$ ა) მოთხოვნა არაელასტიკურია, როცა $0\le p<10$, ელასტიკურია, როცა $10<p<\sqrt{300}$, ერთეულოვანია, როცა $p=10$; ბ) ამონაგები კლებადია, როცა $10<p\le\sqrt{300}$, ზრდადია, როცა $0<p<10$, ერთგვაროვანია, როცა $p=10$;
18	ა) $E(q)=\frac{-3p}{2q+3p}$; ბ) $E(q)\big\vert_{p=3}=-\frac{9}{13}$, როცა $p=3$, არაელასტიკურია.
19	ა) $\frac{160\sqrt{3}}{3}<p<160$, მოთხოვნა ელასტიკურია, $0\le p<\frac{160\sqrt{3}}{3}$, მოთხოვნა არაელასტიკურია, $p=\frac{160\sqrt{3}}{3}$, მოთხოვნა ერთეულოვანია; ბ) $0\le p<\frac{160\sqrt{3}}{3}$, მოთხოვნა ზრდადია, $\frac{160\sqrt{3}}{3}<p<160$, მოთხოვნა კლებადია, $p=\frac{160\sqrt{3}}{3}$, მოთხოვნა ერთგვაროვანია; გ) ფასი ბილეთზე უნდა იყოს 92.3 ლარი.

ლექცია 18	
ს.№	
1	ა) $\approx 1.35\%$; ბ) $\approx 18.83\%$; გ) $\approx 50.18\%$.
2	ა) $TR = 5$ მილიონი ლარი; ბ) ≈ 4.1 წლის შემდეგ
3	ა) $f'(x) = e^{x^2+2x-1}(2x+2)$; ბ) $f'(x) = \left(6x^2+20x+33\right)e^{6x}$; გ) $f'(x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$; დ) $f'(x) = -6e^x\left(1-3e^x\right)$; ე) $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$; ვ) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{x}}\,e^{\sqrt{3x}}$; ზ) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; თ) $f'(x) = \frac{3}{x}$; ი) $f'(x) = \frac{1}{x}$; კ) $f'(x) = x(2\ln x + 1)$; ლ) $f'(x) = \ln\sqrt{x} + \frac{1}{2}$; მ) $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{e^{2x}}$; ნ) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
4	მაქსიმალური მოგება (მიახლოებით) P= 4,27 მილიონი დოლარი , როცა x= 1750 .
5	10%
6	გაიზარდა 50% -ით
7	880 ტურისტი
8	272 ლარი
9	26 ლარი
10	656 ლარი
11	შემცირდა 13.55% -ით
12	შემცირდა 4.77% -ით
13	≈ 366.97 ლარი
14	≈ 18008.4 ლარი
15	≈ 35253.4 ლარი
16	44800 ლარი
17	≈ 37727.27 ლარი
18	7%
19	≈ 9327.66 ლარი
20	≈ 20.3 წლის შემდეგ
21	≈ 23098 ლარი
22	$\approx 12.21\%$
23	ა) ≈ 19859.27 ლარი; ბ) ≈ 19960.64 ლარი; გ) ≈ 20030 ლარი.
24	$t \approx 8.6$ წლის შემდეგ
25	ა) ≈ 5.66; ბ) ≈ 5.61.
26	უმჯობესია I ბანკში
27	≈ 13 %
28	$\approx 10{,}3$ %
29	$\approx 10{,}5$ %
30	უმჯობესია მესამე ბანკში

ლექცია 19	
ს..№	
1	ა) $-3x+C$; ბ) $x+C$; გ) $\frac{1}{6}x^6+C$; დ) $\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C$; ე) $-\frac{1}{x}+C$; ვ) $3e^x+C$; ზ) $4\sqrt{t}+C$; თ) $\frac{x^{0.7}}{0.7}+C$; ი) $\frac{5}{3}u^{\frac{3}{5}}+C$;
2	ა) $2x$; ბ) x^2-x+1; გ) e^x+4; დ) $2\ln\lvert x\rvert+8$;
3	$k=\pm\sqrt{2}$
4	ა) $2\sqrt{y^3}+\frac{1}{y^2}+C$; ბ) $\frac{1}{2}\ln y+\frac{2}{y}+6\sqrt{y}+C$; გ) $\frac{1}{2}e^x+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$; დ) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\sqrt{x}+\sqrt{2}x+C$; ე) $\frac{u^{1.1}}{3.3}-\frac{u^{2.1}}{2.1}+C$; ვ) $2e^u+6\ln\lvert u\rvert+u\ln 2+C$; ზ) $x+2\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}+C$; თ) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}+C$; ი) $\frac{11}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-x^2+C$; კ) $\frac{2}{5}y^5+\frac{1}{3}y^3+C$.
5	ა) $\frac{1}{12}(2x+6)^6+C$; ბ) $\frac{1}{5}e^{5x+3}+C$; გ) $\frac{1}{6}(4x-1)^{\frac{3}{2}}+C$; დ) $\frac{1}{3}\ln\lvert 3x+5\rvert+C$; ე) $-e^{1-x}+C$; ვ) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$; ზ) $e^{x^2-1}+C$; თ) $\frac{1}{12}\left(t^2+1\right)^6+C$. ი) $\left(t^2+8\right)^{\frac{3}{2}}+C$; კ) $\frac{4}{21}\left(x^3+1\right)^{\frac{7}{4}}+C$; ლ) $-\frac{1}{6}e^{1-x^6}+C$; მ) $\frac{2}{5}\ln\left\lvert y^5+1\right\rvert+C$.
6	ა) $\sin x-x\cos x+C$; ბ) $x\sin x+\cos x+C$; გ) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$; დ) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$; ე) $e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$; ვ) $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$; ზ) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$.
7	742.081 ლარი
8	483.2 ლარი
9	15300 ლარი
10	18700 ლარი

ლექცია 20	
ს.№	
1	ა) 15; ბ) 3π; გ) 47,5; დ) 0; ე) 1,2; ვ) 28/3; ზ) 4/3; თ) 8/3 + ln3; ი) 0,5; კ) 2/3 - ln3; ლ) 252+1/12;
2	ა) -20; ბ) -12; გ) 0; დ)-5; ე) 5; ვ)-6; ზ)3; თ)12.
3	75 დოლარი
4	2626 (მიახლოებით)
5	ა) შემცირდა 48036 ლარით ; (მიახლოებით); ბ) გაიზარდა 28547 ლარით (მიახლოებით).
6	ა) 40/3; ბ) 4,5; გ) e^2 -1/e ; დ) 2/3.
7	ა)-3,25; ბ) (28/9)$\sqrt{2}$; გ) 0,5$e^3(e^4-1)$; დ) 0,5; ე) ln(e^2+2)-ln(e+2); ვ) – ln(ln2); ზ)1,5 (ln(e^6 -1) –ln(e^4 -1)) .
8	ა) π; ბ) 1; გ) 0,25(e^2+1); დ) 0; ე) 0,5π-1.

9	ა) 1; ბ) 2/3; გ) 4/3; დ) 4/3; ე) 20,25; ვ) 18.
10	ა) 5/12; ბ)4.
11	ა) -2; ბ) 4,5; გ) 1,5/ln2; დ)1,5 (e -1/e);
12	411607 (მიახლებით);
13	1388480.

ლექცია 21

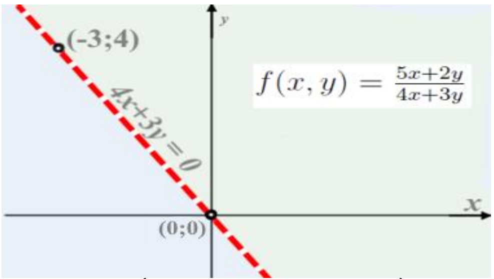
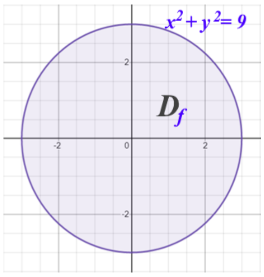
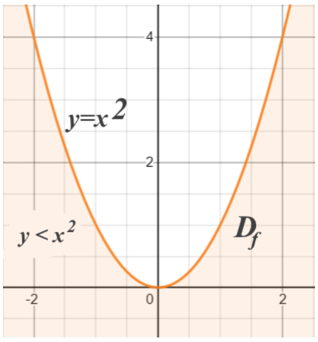
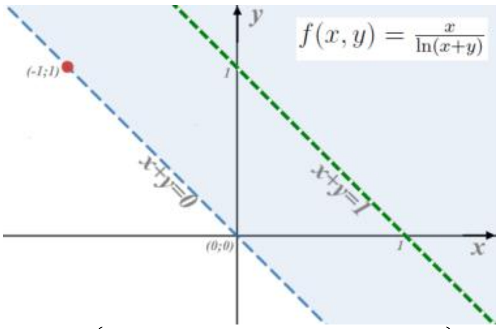
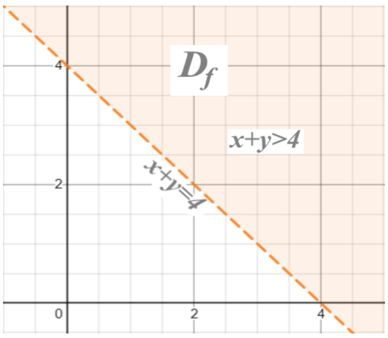
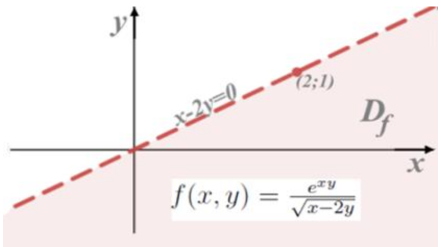
ს.№	
1	ა) კრებადია, ½ -ის ტოლია; ბ) კრებადია, 2 -ის ტოლია; გ) განშლადია; დ) განშლადია; ე) განშლადია; ვ) განშლადია; ზ) კრებადია, 0,1 -ის ტოლია; თ) კრებადია, 1-ის ტოლია; ი) კრებადია, 2,5-ის ტოლია; კ) კრებადია, 1-ის ტოლია; ლ) კრებადია, 1/9-ის ტოლია; მ) განშლადია; ნ) კრებადია, 1-ის ტოლია; ო) კრებადია, 2/9-ის ტოლია; პ) კრებადია, e-ს ტოლია; ჟ) განშლადია.
2	ა) $2e^3$; ბ) 3.
3	60000 ევრო
4	83333 ლარი (მიახლოებით)
5	400000 ლარი

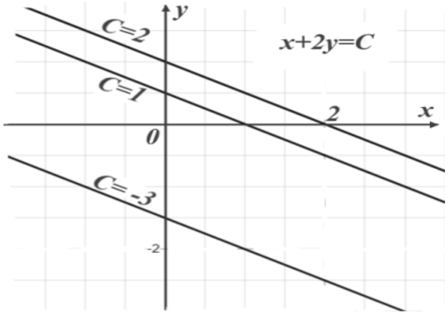
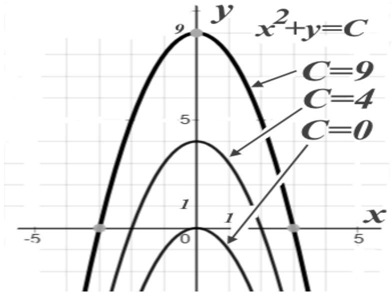
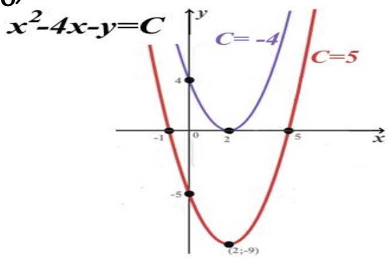
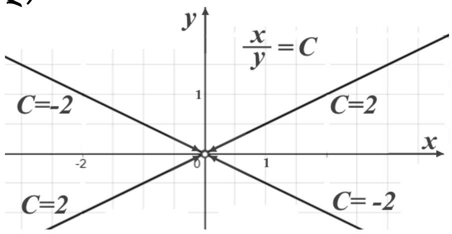
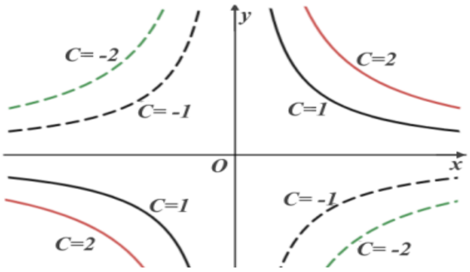
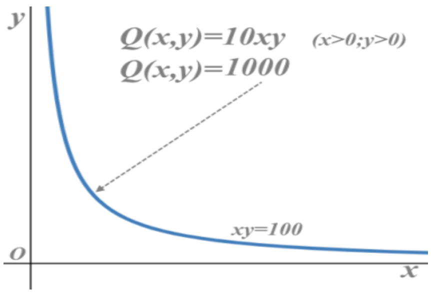
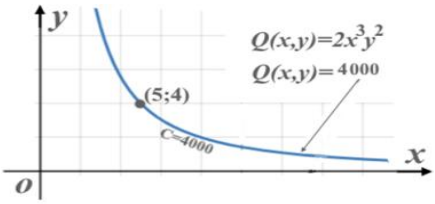
ლექცია 22

ს..№	
1	ა) $f(x)=2\cos x(1-\sin x)$; ბ) $f(x)=e^x(2-x)$.
2	ა) $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-6x+C$; ბ) $p=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}-e^{-t}+C$; გ) $y=Ce^{3x}$; დ) $y=\frac{1}{C-x}$; ე) $y=-\ln(C-x)$; ვ) $y=-\ln\left(C-e^x\right)$; ზ) $y=\pm\sqrt{x^2+C}$; თ) $y=Cx$; ი) $y=\left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+C\right)^2$; კ) $y=\pm\sqrt{Cx^2-4}$.
3	ა) $y=\left(\frac{15}{2}x^2+C\right)^{\frac{1}{3}}$; ბ) $y=\left(\frac{C+x^3}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$; გ) $y=\left(\frac{4x^{\frac{5}{2}}+C}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; დ) $e^{2y}=\frac{2}{5}e^{5x}+C$ $\left(y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}e^{5x}+C\right)\right)$.
4	ა) $y=\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{4}{5}$; ბ) $y=x^5-x^3-2x+6$; გ) $y=\left(\frac{3}{2}x^2+21\right)^{\frac{1}{3}}$; დ) $y=\frac{2}{3-2x^4}$;ე) $y=\frac{3}{2\sqrt{(4-x)^3}+1.5}$.
5	ა) $y=Ce^{-2x}-\frac{3}{2}$; ბ) $y=Ce^x-6\left(x^2+2x+2\right)$; გ) $y=e^{3x}\left(C+2x+e^{-3x}\right)$;

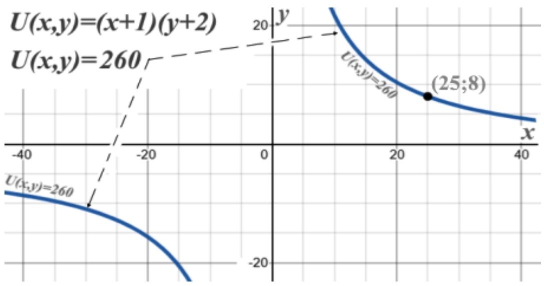
	დ) $y=e^{2.5x^2}\left(C+0.5x^2\right)$; ე) $y=x^2\left(C+x^2\right)$.
6	ა) $y=C_1e^{-8x}+C_2e^{x}$; ბ) $y=C_1e^{7x}+C_2e^{x}$; გ) $y=e^{x}\left(C_1+C_2x\right)$; დ) $y=e^{5x}\left(C_1+C_2x\right)$.

ლექცია 23

ს.№		
1	ა) f(-1;2)=1, f(3;0)=15; ბ) f(1;3)=-10 , f(2; -1)= 10 ; გ) g (1; 1) =0; დ) f (1;2) = 7/8; ე) g(4; 5) =3; ვ) g (16 ; 27)=360; ზ) f (e^2 ; 3)=1,5 ; f(ln9, e^3) =e^3/ ln(ln9); თ) f (1; ln2) =2ln2; ი) g (1; 2) =2,5; კ) f (1; 0) =1 , f(ln2; 2)= -2; ლ) f (1; 2; 3) = 6 ; მ) g (1; 0; -1) =1 , g (1; 1;2)=2e^2;; ნ) F (0; e^2;3e ^{2}) = (2+ ln3)/4e^2; ო) f (1;1;1) =3e.	
2	 ა) $D_f=\{(x;y)\mid 4x+3y\neq 0\}$	ბ) 
	გ) 	 დ) $D_f=\{(x;y)\mid x+y>0,\ x+y\neq 1\}$
	ე) 	 ვ) $D_f=\{(x;y)\mid x-2y>0\}$

<table>
<tr><td>3</td><td>ა) იხ. ნახაზი.

</td><td>ბ) იხ. ნახაზი

</td></tr>
<tr><td></td><td>გ) იხ. ნახაზი.

</td><td>დ) იხ. ნახაზი.

</td></tr>
<tr><td></td><td>ე) იხ. ნახაზი.

</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">ა) Q(125 ; 1331)=33000000;   ბ) Q განახევრდება, Q (K/2 ;L/2)=0,5 Q(K;L) =16500000.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>იხ. ნახაზი.

</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>U(5; 4)=4000, განურჩევლობის მრუდი x^3y^2=2000, y= $(2000x^{-3})^{0,5}$
იხ. ნახაზი


.</td><td></td></tr>
</table>

7	U (25;8)=260, განურჩევლობის მრუდი y=260/(x+1) -2 იხ. ნახაზი.	

ლექცია 24

ს.№	
1	ა) $f_x=7,\quad f_y=-3$; ბ) $f_x=1-y,\quad f_y=-x$; გ) $f_x=12x^2-6xy+5,\quad f_y=-3x^2$; დ) $f_x=2y-12x,\quad f_y=2x-4$; ე) $z_x=15(3x+2y)^4,\ z_y=10(3x+2y)^4$; ვ) $f_x=3(x+xy+y)^2(1+y),\ f_y=3(x+xy+y)^2(1+x)$; ზ) $f_t=\frac{3}{2s},\ f_s=-\frac{3t}{4s^2}$; თ) $z_x=e^{xy}(1+xy),\ z_y=x^2e^{xy}$; ი) $z_x=-\frac{e^{2-x}}{y^2},\ z_y=-\frac{2}{y^3}e^{2-x}$; კ) $z_x=\frac{y^2(1-x^2y^3)}{(1+x^2y^3)^2},\ z_y=\frac{xy(2-x^2y^3)}{(1+x^2y^3)^2}$.
2	ა) $f_x(1;-1)=2,\ f_y(1;-1)=3$; ბ) $f_x(1;0)=-2,\ f_y(1;0)=-1$; გ) $f_x(0;-1)=2,\ f_y(0;-1)=0$; დ) $f_x(1;1)=1.25,\ f_y(1;1)=-0.25$; ე) $f_x(0;-1)=10,\ f_y(0;-1)=-10$; ვ) $f_x(0;0)=1,\ f_y(0;0)=1$.
3	ა) $f'_{xx}=60x^2y^3,\ f'_{xy}=60x^3y^2+2,\ f'_{yy}=30x^4y$; ბ) $f_{xx}=0,\ f_{xy}=-\frac{1}{(y-1)^2},\ f_{yy}=\frac{2(x+1)}{(y-1)^3}$; გ) $f_{xx}=2ye^{x^2y}(1+2x^2y),\ f_{xy}=2xe^{x^2y}(1+x^2y),\ f_{yy}=x^4e^{x^2y}$; დ) $f_{uu}=\frac{2(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2},\ f_{uv}=\frac{-4uv}{(u^2+v^2)^2},\ f_{vv}=\frac{2(v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^2}$;
4	ა) $Q_K(630;830)\approx 10.22$ (ერთ), $Q_L(630;830)\approx 19.33$ (ერთ); ბ) მწარმოებელმა უნდა განიხილოს სამუშაო საათების გაზრდის საკითხი;
5	ა) $Q_K(5041;4900)\approx 58.54$ (ერთ), $Q_L(5041;4900)\approx 91.63$ (ერთ); ბ) მთავრობამ უნდა წაახალისოს დამატებითი შრომითი დასაქმება.
6	მოთხოვნა გაიზრდება 424 ერთეულით.
7	ა) $f_{\min}(-2;-4)=-28$; ბ) $(2;-1)$ კრიტიკული წერტილია, ექსტრემუმი არ აქვს ფუნქციას; გ) $f_{\min}(2;2)=12$; დ) $f_{\min}(1;1)=-13,\ f_{\max}(-2;-1)=18$; ე) $f_{\min}(1;3)=-22$; ვ) $f_{\min}(4;9.5)=778.875$; ზ) $f_{\max}(-2;-2)=71$; თ) $f_{\min}(0;0)=0$.
8	$x=20,\quad y=20$.