<u>სალექციო მასალა საგანში:</u>

სტატისტიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისთვის-1

თავი IX. დინამიკური (დროითი) მწკრივები ეკონომიკასა და ბიზნესში

1

თავი X. შერჩევითი დაკვირვებანი ეკონომიკასა და ბიზნესში

თავი XI. ინდექსები ეკონომიკაში, ბიზნესში

თავი IX. დინამიკური (დროითი) მწკრივები ეკონომიკასა და ბიზნესში

1. დინამიკის მწკრივების ცნება და სახეები

დიალექტიკა, ეკონომიკაში, ბიზნესსა და მენეჯმენტში მოვლენებსა და პროცესებს განიხილავს მათ განვითარებაში, მოძრაობაში, დროსა და სივრცეში. **დროში მოვლენებისა და პროცესების განვითარების მაჩვენე-ბლებს ცალკეული ქრონოლოგიური თარიღების მიხე-დვით ეწოდება დინამიკური მწკრივი.** მაჩვენებლების მიხედვით დინამიკური მწკრივი შეიძლება **იყოს აბსოლუტური, შეფარდებითი და საშუალო სიდიდეების დინამიკური მწკრივები.** თვით აბსოლუტური სიდიდეების დინამიკური მწკრივი ორი სახისაა: **ინტერვალური და სამომენტო**. ინტერვალური დინამიკური მწკრივის მაჩვენებლები მოვლენის განვითარებას ასახავს თითოეული ქრონოლოგიური თარიღის (წელი, კვარტალი, თვე) ინტერვალში. ასეთია, მაგალითად, პროდუქციის გამოშვება (ქვანახშირის ბიზნესში, ფოლადის გამოდნობის ბიზნესში და ა. შ.) ქრონოლოგიური თარიღების მიხედვით. ქვანახშირის ამოღება, მაგალითად, წლების მიხედვით, ასახავს ამ პროდუქციის წარმოების მოცულობას თითოეული წლის პირველი იანვრიდან 31 დეკემბრის ჩათვლით, მაშასადამე ერთი წლის ინტერვალით. ინტერვალური დინამიკური მწკრივის მაჩვენებლების შეკრება გარკვეული ეკონომიკური შინაარსის მატარებელია და გვიჩვენებს უფრო მსხვილი პერიოდების მიხედვით მოვლენებისა და პროცესების რაოდენობრივ გამოსახულებას. მაგალითად, თუ თვის ცალკეული დღეების მიხედვით ქვანახშირის ამოღებას შევკრიბავთ, მივიღებთ თვეში ქვანახშირის ამოღების საერთო მოცულობას.

სამომენტო დინამიკური მწკრივის მაჩვენებლები მოვლენებისა და პროცესების რაოდენობას ასახავენ

ქრონოლოგიური თარიღების გარკვეული მომენტისათვის. ასეთია, მაგალითად, საბანკო აქტივები და პასივები, ძირითადი კაპიტალის ღირებულება წლების მიხედვით. თითოეული მაჩვენებლის მიხედვით აგებული დინამიკური მწკრივი გვიჩვენებს ამ მოვლენის რაოდენობას თითოეული წლის პირველი იანვრის ან სხვა რომელიმე მომენტისათვის. ასეთი მწკრივის მაჩვენებლების შეკრება არ შეიძლება, ვინაიდან არავითარ ეკონომიკურ აზრს არ ატარებს.

აბსოლუტური მაჩვენებლების დინამიკური მწკრივის საფუძველზე შეიძლება მივიღოთ შეფარდებითი და საშუალო სიდიდეების დინამიკური მწკრივები. მაგალითად, მოსახლეობის რიცხოვნობისა და დაკავებული ტერიტორიის ურთიერთშეფარდებით მივიღებთ მოსახლეობის სიმჭიდროვის ანუ ინტენსივობის შეფარდებითი სიდიდის დინამიკურ მწკრივს. აგრიბიზნესში საერთო მოსავლისა და ნათესი ფართობის ურთიერთშეფარდებით მივიღებთ მოსავლიანობის სიდიდის დინამიკურ მწკრივს და ა.შ.

2. დინამიკური მწკრივის საანალიზო მაჩვენებლები

დინამიკური მწკრივის საანალიზო მჩვენებლებია: დინამიკური მწკრივის დონე, აბსოლუტური მატება, საშუალო დონე, საშუალო აბსოლუტური მატება, დინამიკური მწკრივის ზრდისა და მატების ტემპები, საშუალო წლიური ზრდისა და მატების ტემპები, მატების ერთი პროცენტის აბსოლუტური მნიშვნე-ლობა. თუ წლების მიხედვით მოცემულია დინამიკური მწკრივის მაჩვენებლები $y_1, y_2, .., y_n$**, მაშინ მათ მნიშვნელობებს ეწოდებათ დინამიკური მწკრივის დონეები. აბსოლუტური მატება** არის სხვაობა მომდევნო და წინა დონეებს შორის. თუ წინა დონედ აღებულია ერთი

306

რომელიმე (ჩვეულებრივად იღებენ საწყისს y_1) დონე, მაშინ გვაქვს საბაზისო აბსოლუტური მატება, ხოლო თუ თითოეულ დონეს აკლდება მისი მომიჯნავე წინა დონე – გვაქვს ჯაჭვური აბსოლუტური მატება. ისე, რომ თუ აბსოლუტურ მატებას აღვნიშნავთ Δ (დელტა) ასოთი, მაშინ საბაზისო აბსოლუტური მატება იქნება:

$$\Delta_{\text{საბ.}} = y_t - y_1 \quad (9.1),$$

ხოლო ჯაჭვური

$$\Delta_{\text{ჯაჭ.}} = y_t - y_{t-1} \quad (9.2),$$

სადაც y_t – დინამიკური t-ური დონეა,

ხოლო y_{t-1} – მისი მომიჯნავე წინა დონე;

y_1 – საწყისი დონეა.

დინამიკური მწკრივის საშუალო დონე ($\bar{y}$) გაინაგარიშება ინტერვალური დინამიკური მწკრივისათვის ჩვეულებრივი საშუალო არითმეტიკულის გამოყენებით:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n}{n} = \frac{\Sigma y}{n} \quad (9.3),$$

ხოლო სამომენტო დინამიკური მწკრივისათვის, ქრონოლოგიური საშუალო არითმეტიკულით:

$$\bar{y} = \frac{0{,}5y_1 + y_2 + y_3 + ... + 0{,}5y_n}{n-1} \quad (9.4),$$

სადაც n – დინამიკური მწკრივის დონეთა რიცხვია.

ზოგჯერ საჭიროა დავადგინოთ დინამიკური მწკრივის საშუალო აბსოლუტური მატება ($\overline{\Delta}$). ის გაინგარიშება ფორმულით:

307

$$\overline{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i}{n-1} \quad (9.5),$$

სადაც $\overline{\Delta}$ - ჯაჭვური წესით გაანგარიშებული ბსოლუტური მატებანია, ხოლო n – დინამიკური მწკრივის დონეთა რიცხვია.

ეკონომიკურ, ბიზნესმენურ და მენეჯმენტურ გაანგარიშებებში მეტად მნიშვნელოვანი მაჩვენებლებია **ზრდისა და მატების ტემპები. ზრდის ტემპი გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ იზრდება დინამიკური მწრივის ესა თუ ის დონე წინა რომელიმე** დონესთან შედარებით. თუ წინა დონედ მიჩნეულია ერთი რომელიმე უცლელად, მაშინ მივიღებთ საბაზისო ზრდის ტემპებს, ხოლო თუ ის იცვლება და თითოეულ დონეს ვადარებთ მის მომიჯნავე წინა დონეს, მაშინ შედეგად ვღებულობთ ჯაჭვური ზრდის ტემპებს. მაშასადამე, თუ ზრდის ტემპს K ასოთი აღვნიშნავთ და გამოვსახავთ პროცენტებში, გვექნება:

$$K_{\text{საბაზ.}} = \frac{y_t}{y_1} \times 100 \qquad (9.6)$$

$$K_{\text{ჯაჭვ.}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} \times 100 \qquad (9.7)$$

მატების ტემპი მიიღება აბსოლუტური მატების შეფარდებით წინა შესაბამის დონესთან. იმის მიხედვით, თუ რომელი დონეა აღებული შესადარებლად, გვაქვს საბაზისო და ჯაჭვური მატების ტემპი. მაგალითად, მთლიან პერიოდში მატების ტემპი იქნება:

$$\frac{y_n - y_1}{y_1} 100 = \frac{y_n}{y_1} 100 - 100 \qquad (9.8)$$

მაშასადამე, მატების ტემპი სხვაგვარადაც შეგვიძლია გამოვიანგარიშოთ. კერძოდ, თუ ზრდის ტემპს გამოვაკლებთ

308

1-ს ან 100-ს (თუ პროცენტებშია ზრდის ტემპი გაანგარიშებული), მივიღებთ მატების ტემპს.

დიდი გამოყენება აქვს საშუალოწლიური **ზრდისა და მატების ტემპებს**. ზრდის საშუალოწლიური ტემპი გვიჩვენებს საშუალოდ წლიურად რამდენჯერ იზრდებოდა მოცემული მაჩვენებელი. ამიტომ მისი გაანგარიშებისათვის ხშირად მიმართავენ საშუალო გეომეტრიულის გამოყენებას, კერძოდ,

$$\overline{K} = \sqrt[n-1]{k_1 \times k_2 \times k_3 \ldots k_{n-1}} \qquad (9.9),$$

სადაც $k_1 \times k_2 \times k_3 \ldots k_{n-1}$ – არის ჯაჭვური წესით გაანგარიშებული ზრდის ტემპები.

$$k_1 = \frac{y_2}{y_1}, k_2 = \frac{y_3}{y_2}, k_3 = \frac{y_4}{y_3}, \ldots, k_{n-1} = \frac{y_2}{y_{n-1}}. \qquad (9.10).$$

აქედან საშუალო წლიური ზრდის ტემპის გასაანგარიშებელი ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\overline{K} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \qquad (9.11).$$

y_1 და y_n – შესაბამისად საწყისი და საბოლოო დონეებია.

$\overline{K}$ -ს პოვნისათვის საჭიროა მოცემული გამოსახულების გალოგარითმება:

$$\log \overline{K} = \frac{1}{n-1}\left(\log y_n - \log y_1\right) \qquad (9.12)$$

მაშადამე, უნდა ვიპოვოთ ათობითი ფუძით (ბრადისის ცხრილების დახმარებით) y_1-ისა და y_n-ის

309

ლოგარითმები, მათი სხვაობა გავყოთ $(n-1)$-ზე და მივიღებთ $\log \bar{k}$ -ს მნიშვნელობას. აქედან ცხადია, რომ ჩვენთვის ცნობილი მეთოდებით (იგივე ბრადისის ცხრილების დახმარებით)

 310

ანტილოგარითმებში ვიპოვით $\log\bar{k}$-ს შესაბამის $\bar{k}$ - ს მნიშვნელობას, რომელიც იქნება საშუალო წლიური ზრდის ტემპის მაჩვენებელი.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საშუალოწლიური მატების ტემპები გაიანგარიშება ზრდის ტემპების დახმარებით.

ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების განვითარების ანალიზისათვის ხშირად მეტად დიდი მნიშვნელობა ენიჭება **მატების ერთი პროცენტის აბსოლუტური მნიშვნელობის** გაანგარიშებას. ის გვიჩვენებს, მატების თითოეული პროცენტი აბსოლუტარად რა მნიშვნელობისაა. მატების 1 %-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა გაიანგარიშება აბსოლუტური მატების შეფარდებით მატების ტემპთან. ზოგჯერ ზრდისა და მატების ტემპები მცირდება, მაგრამ ერთი პროცენტის მნიშვნელობა გაცილებით მეტია, ვიდრე წინა პერიოდებში.

3. დინამიკური მწკრივის დაყვანა ერთ საფუძველზე

დინამიკური მწკრივის ანალიზის დასაწყისშივე უნდა გავარკვიოთ მისი დონეების ურთიერთშესადარისობის საკითხი. ზოგჯერ ისინი შეუდარებელია, რაც გამოწვეულია სხვადასხვა მიზეზით. მათ შორის აღსანიშნავია: 1) ტერიტორიული ცვალებადობა. ცხადია, თუ იცვლება მოცემული ქალაქის ან რესპუბლიკის ტერიტორია, მათი შესაბამისი მაჩვენებლების (მაგალითად, მოსახლეობის რიცხოვნობის, ან ამა თუ იმ კულტურის საერთო მოსავლის) დინამიკური მწკრივებიც შეუდარებელია; 2) ზომის ერთეულის ცვალებადობა. არ შეიძლება, მაგალითად, ერთმანეთს შევადაროთ ამა თუ იმ მაჩვენებლის დინამიკური მწკრივის დონეები, თუ ნაწილი მათგანი გაანგარიშებულია ერთი ზომის ერთეულებით (ვთქვათ საერთო მოსავალი ფუთებში) და მეორე ნაწილი სხვა ზომის ერთეულებში (ტონებში); 3) გაანგარიშების სხვადასხვა

311

მეთოდოლოგია. თუ, მაგალითად, შეიცვალა რაიმე მაჩვენებლის გაანგარიშების მეთოდოლოგია, ცხადია, შესაბამისი მაჩვენებლების დინამიკური მწკრივების დონეებიც შეუდარებელი სიდიდეებია; 4) დინამიკური მწკრივის დონეები შესაძლლებელია შეუდარებელი იყოს ფასების სხვადასხვა მასშტაბის გამო, რაც უნდა მოვიყვანოთ შესაბამისობაში.

იმისათვის, რომ დინამიკური მწკრივის დონეები შესადარისი გახდეს, ზოგჯერ მიმართავენ დინამიკური მწკრივების მიჯრას. მაგალითად, დავუშვათ, რომ 2002 წლის შემდეგ საბაჟო შემოსავლები განსხვავებული მეთოდიკით იანგარიშება.

საბაჟო შემოსავლები

ცხრილი №47

საბაჟო შემოსავლები	2001	2002	2003	2004
ძველი მეთოდიკით	12500	15200	17800	-
ახალი მეთოდიკით	-	-	16600	18700
შესადარისი მწკრივებით	11625	141360	16600	18700

დინამიკური მწკრივის მიჯრისათვის საჭიროა 2001 და 2002 წლების მაჩვენებლები გადავიყვანოთ ახალი მეთოდიკით გაანგარიშებულ მაჩვენებლებში, რისთვისაც ვიყენებთ 2003 წლის მონაცემებს, სადაც მოცემულია როგორც ძველი, ისე ახალი მეთოდიკით გაანგარიშებული მაჩვენებლები. ვანგარიშობთ კოეფიცენტს ახალი მეთოდიკით გაანგარიშებული საბაჟო შემოსავლების შეფარდებით ძველი მეთოდიკით გაანგარიშებულ საბაჟო შემოსავლებზე. გვექნება: $\frac{16600}{17800} = 0.93$.

ამ კოეფიციენტზე ვამრავლებთ 2001 და 2002 წლის საბაჟო შემოსავლებს და მივიღებთ შესადარის დონეებს.

ზოგჯერ საჭიროა სხვადასხვა მოვლენათა დინამიკური მწკრივების შედარებითი ანალიზი. ამისათვის თითოეული დინამიკური მწკრივისათვის ანგარიშობენ დინამიკის საბაზისო ზრდის ტემპებს რომელიმე ერთი წლის მიმართ. **ამას ეწოდება**

312

დინამიკური მწკრივების ერთ საფუძველზე დაყვანა. ასეთი იქნება, მაგალითად, საქართველოსა და რუსეთში ელექტროენერგიის, ქვანახშირის, ფოლადისა და სხვა სახის პროდუქციის ზრდის ტემპების დინამიკური მწკრივები, ვთქვათ, 2000 წლის მიმართ. ეს საშუალებას იძლევა შევადაროთ ამ ორი ქვეყნის მაჩვენებლების ზრდის ტემპები ერთმანეთს და გავაკეთოთ შესაბამისი დასკვნები.

4. დინამიკური მწკრივის განვითარების ტენდენციის გამოვლენის მარტივი ხერხები

დინამიკური მწკრივის ერთ-ერთი დანიშნულებაა სწორი წარმოდგენა მოგვცეს მოვლენის განვითარების ტენდენციაზე (ზრდადია, კლებადი თუ ტენდენცია საერთოდ არა აქვს). ზოგჯერ ერთი შეხედვით დინამიკური მწკრივის ემპირიული მონაცემები ამის საშუალებას არ იძლევა, ვინაიდან მთელს პერიოდში ზოგჯერ მატებას ცვლის კლება და პირიქით. ტენდენციის გამოვლენისათვის საჭიროა დინამიკური მწკრივის დონეებიის **მოსწორება**, ანუ მწკრივში ე. წ. 'ნახტომების'', ზრდიდან კლებაში და კლებიდან ზრდაში გადასვლების ლიკვიდაცია და განვითარების საერთო სურათის გამოვლენა. დინამიკური მწკრივის მოსწორების მარტივი ხერხებიდან აღსანიშნავია მოსწორება **სრიალა საშუალოს, საშუალო აბსოლუტური მატების, აგრეთვე საშუალოწლიური ზრდისა და მატების ტემპების გამოყენებით.** სრიალა საშუალოს დახმარებით დინამიკური მწკრივის მოსწორება ნიშნავს, რომ გარკვეული ინტერვალებისათვის გაინგარიშება სრიალა საშუალოები და ისინი ცვლიან დინამიკური მწკრივის დონეებს. თუ ინტერვალი სამწევრიანია, მაშინ სრიალა საშუალოები იქნება

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, ..., \bar{y}_{n-2} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3} \qquad (9.13)$$

ამ მეთოდის ნაკლი ისაა, რომ ვღებულობთ უფრო ნაკლები

313

რაოდენობის საშუალოებს, ვიდრე დინამიკური მწკრივის დონეების რიცხვია. **საშუალო აბსოლუტური** მატების გამოყენების შემთხვევაში დინამიკური მწკრივის პირველი დონე რჩება უცვლელი, ხოლო ყოველი შემდგომი მიიღება წინა დონეს მიმატებული საშუალო აბსოლუტური მატება. მაშასადამე, მეორე დონე უდრის:

$$\hat{y}_2 = y_1 + \overline{\Delta} \qquad (9.14);$$

მესამე

$$\hat{y}_3 = y_2 + \overline{\Delta} = y_1 + \overline{\Delta} + \overline{\Delta} = y_1 + 2\overline{\Delta} \qquad (9.15);$$

და ა.შ.

ზოგადად

$$\hat{y}_t = y_1 + \overline{\Delta}_{(t-1)} \qquad (9.16),$$

სადაც

$$\hat{y}_2, \hat{y}_3, .., \hat{y}_t .$$

დინამიკური მწკრივის მოსწორებული დონეებია.

საშუალო წლიური ზრდის ტემპის[1] გამოყენების შემთხვევაშიც პირველი დონე რჩება უცვლელი, ხოლო შემდგომი დონეები მიიღება წინა დონის საშუალოწლიური ზრდის ტემპზე გამრავლებით. მაშასადამე გვაქვს:

$$\hat{y}_2 = y_1 \times \bar{k}, \qquad \hat{y}_3 = y_2 \times \bar{k} = y_1 \times \bar{k} \times k = y_1 \times \bar{k}^2 \qquad (9.17)$$

ზოგადად

$$\hat{y}_t = y_1 \times \bar{k}^{t-1} \qquad (9.18)$$

სადაც $\overline{K}$ –დინამიკური მწკრივის საშუალოწლიური ზრდის ტემპია გაანგარიშებული კოეფიციენტის სახით. თუ პროცენტებშია ეს განგარიშებული, მაშინ ზემომოყვანილი მაჩვენებლები უნდა გაიყოს 100-ზე.

314

[1]თუ გვაქვს საშუალო წლიური მატების ტემპები, ადვილი მისახვედრია, რომ ჯერ შეგვიძლია მის საფუძველზე დავადგინოთ ზრდის ტემპი, ხოლო შემდეგ მოვასწოროთ დინამიკური მწკრივი.

315

5. დინამიკური მწკრივის მოსწორების ანალიზური ხერხები

დინამიკური მწკრივის **მოსწორების ანალიზური ხერხებიდან აღსანიშნავია მოსწორება წრფივი ფუნქციით, პარაბოლით, ჰიპერბოლით ან მაჩვენებლიანი ფუნქციით.**

თითოეული ფუნქცია ადეკვატურად უნდა ასახავდეს მოვლენის სურათს. ისე რომ თუ დინამიკური მწკრივის დონეების ცვალებადობა არითნეტიკული პროგრესიით ხორციელდება, მაშინ ვიყენებთ წრფივ ფუნქციას, ხოლო თუ გეომეტრიული პროგრესიით – მაშინ რომელიმე დანარჩენ ფუნქციას გამოვიყენებთ.

დინამიკური მწკრივის მოსწორების ანალიზური ხერხების გამოყენებისას ისეთ თეორიულ დონეებს ($\hat{y}_t$) ვპოლობთ, რომელთა ემპირიული დონეებისაგან გადახრების კვადრატების ჯამი იქნება მინიმალური.

მაშასადამე, ვიყენებთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდს:

$$\Sigma(y-\hat{y}_t)^2 = \min \qquad (9.19)$$

თუ $\hat{y}$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ შესაბამის ფუნქციას, ვიპოვით მიღებული გამოსახულების პირველი რიგის წარმოებულებს ცალ-ცალკე a_0, a_1, a_2, -ის მიმართ, მივიღებთ ამ პარამეტრების გასაანგარიშებელ ნორმალურ განტოლებათა სისტემებს.

მაგალითად, წრფივი განტოლების $y = a_0 + a_1 t$ შემთხვევაში გვექნება:

$$\Sigma(y-a_0-a_1 t) = \min \qquad (9.20)$$

სადაც t-წლების აღმნიშვნელია.

ნორმალურ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\Sigma t = \Sigma y \\ a_0\Sigma t + a_1\Sigma t^2 = \Sigma yt \end{cases} \qquad (9.21).$$

 316

ზოგჯერ იყენებენ ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გამარტივებულ ხერხებს. თუ წლების ათვლას გადავიტანთ დინამიკური მწკრივის ცენტრში, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ $\Sigma t = 0$. ამ შემთხვევაში

$$a_0 = \frac{\sum y}{n}; \qquad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}. \qquad (9.22)$$

მაგალითი: დავუშვათ, რომ ფირმაში ჩაის მწვანე ფოთლის საშუალოწლიურმა მოსავლიანობამ ცენტნერობით 1 ჰა-დან შეადგინა:

2000	წ.	63.6
2001	წ.	73.1
2002	წ.	77.2
2003	წ	81.0
2004	წ	89.5

შევადგინოთ ცხრილი:

ცხრილი №41

წლები	t	t^2	y	yt
2000	-2	4	63.5	-127.0
2001	-1	1	73.1	-73.1
2002	0	0	77.2	0
2003	+1	1	81.0	+81.0
2004	+2	4	89.5	179
		10	384.3	+59.9

რომ არ გადაგვეტანა წლების ათვლა ცენტრში, მაშინ t-ს პირდაპირი მნიშვნელობანი იქნებოდა 2000-1, 2001-2, და ა. შ. 2004-5.

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{384.3}{5} = 76.5;$$

317

$$a_1 = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2} = 5.9.$$

მაშასადამე, განტოლებას ექნება შემდეგი სახე: $y = 76.8+5.9\,t$. ახლა მოცემულ განტოლებაში t-ს მნიშვნელობათა ჩასმით მივიღებთ $\hat{y}$-ის მოსწორებულ დონეებს:

2000 წ. – $\hat{y}_1 = 76.8+5.9\ (-2) = 65.0$

2001 წ. – $\hat{y}_2 = 76.2+5.9\ (-1) = 70.9$

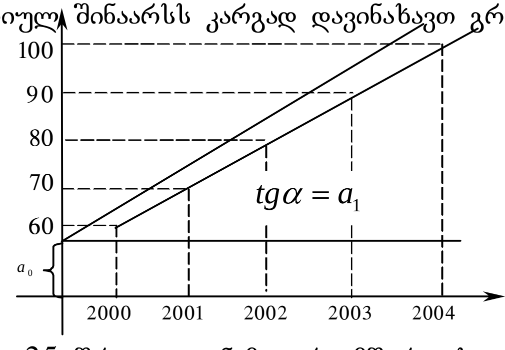
2002 წ. – $\hat{y}_3 = 76.8+5.9\ (0) = 76.8$

2003 წ. – $\hat{y}_4 = 76.8+5.9\ (+1) = 82.7$

2004 წ. – $\hat{y}_5 = 76.8+5.9\ (+2) = 88.6$

თუ სწორადაა მოსწორებული, მაშინ ემპირიული მონაცემების ჯამი მცირედით უნდა განსხვავდებოდეს მოსწორებული დონეების ჯამისაგან. ჩვენს მაგალითზე $\Sigma y = 384.3, \Sigma \hat{y} = 384$, რაც მიუთითებს მოსწორების სიზუსტეზე.

როგორია a_0 და a_1 პარამეტრების შინაარსი? ეკონომიკურად a_0 არის y-ის რაღაც საწყისი მნიშვნელობა, ხოლო, a_1 ასახავს ამ მაჩვენებლის განვითარების აჩქარებას. გეომეტრიულ შინაარსს კარგად დავინახავთ გრაფიკზე:



ნახ. 25 წრფივი დინამიკური მწკრივის გრაფიკი

318

a_0 წამოადგენს მანძილს კოოედინატთა სათავიდან გრაფიკის ორდინატთა ღერძის გადაკვეთამდე, ხოლო a_1 არის იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც გრაფიკი ადგენს აბსცისთა ღერძთან.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თუ მოვლენის განვითარების სურათი არაწრფივია, მაშინ დინამიკური მწკრივის მოსწორებისათვის ვიყენებთ შესაბამის პარაბულურ ან მაჩვენებლიან ფუნქიას. პარაბოლური ფორმის დროს განტოლებას აქვს სახე:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \qquad (9.23).$$

a_0 და a_1 პარამეტრების ამოსახსნელად გვაქვს განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2 \end{cases} \qquad (9.24).$$

ჰიპერბოლას აქვს სახე

$$y = a_1 + \frac{1}{a_1} t \quad , \qquad (9.25).$$

ხოლო მაჩვენებლიან ფუნქციას

$$y = a_0 a_1^t \qquad (9.27).$$

ჰიპერბოლური განტოლების პარამეტრების ამოსახსნელ განტოლებათა სისტემას ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{cases} na_0 + \dfrac{1}{a_1} \Sigma t = \Sigma y \\ a_0 \Sigma t + \dfrac{1}{a_1} \Sigma t^2 = \Sigma yt \end{cases} \qquad (9.28).$$

 319

მაჩვენებლიანი ფუნქცია ჯერ უნდა გავაწრფივოთ გალოგარითმების წესით:

$$\log y = \log a_0 + t\log a_1 \qquad (9.29)$$

ახლა შეგვიძლია დავწეროთ პარამეტრების ამოსახსნელი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} n\log a_0 + \log a_1 \Sigma t = \Sigma \log y \\ \log a_0\,\Sigma t + \log a_1\,\Sigma t^2 = \Sigma \log yt \end{cases} \qquad (9.30).$$

ყველა ზემომოყვანილ განტოლებებში y არის დინამიკური მწკრივის ფაქტობრივი დონეები, t – წლების აღმნიშვნელი, n – დინამიკური მწკრივის დონეების რიცხვი.

6. დინამიკური მწკრივების ინტერპოლაცია და ექსტრაპოლაცია

ინტერპოლაცია ეწოდება დინამიკური მწკრივის შუალედური რომელიმე უცნობი წევრის პოვნას. ეს შეიძლება დინამიკური მწკრივის მოსწორების ნებისმიერი ხერხის გამოყენებით. საშუალო გეომეტრიულის დახმარებით, როგორც ზემოთ დავინახეთ, შეიძლება საწყისი და ბოლო დონეების საფუძველზე დავადგინოთ სშუალოწლიური ზრდისა და მატების ტემპები. ინტერპოლირება შეიძლება აგრეთვე რომელიმე ანალიტიკური ფუნქციის გამოყენებით.

ექსტრაპოლაცია ეწოდება დინამიკური მწკრივის არესგარეთ უცნობი დონეების პოვნას. ამ წესს ძალიან ხშირად იყენებენ პროგნოზირებაში. ექსტრაპოლაციაც ნებისმიერი ზემოგანხილული დინამიკური მწკრივების მოსწორების ხერხის გამოყენებით შეიძლება. მაგალითად, ჩვენ ზემოთ დავადგინეთ ჩაის მოსავლიანობის ამსახველი წრფივი განტოლება 2000-2004 წლებისათვის: $\hat{y} = 76.8 + 5.9t$, სადაც 2004 წლისათვის

 320

t-ს მნიშვნელობა უდრიდა +2-ს. თუ გავაგრძელებთ t-ს მნიშვნელობებს შემდგომი წლებისათვის (2005 წლისათვის

321

იქნება 3, 2006 წლისათვის 4, 2007 წლისათვის 5 და ა. შ.) და მათ ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ მოსავლიანობის საპროგნოზო მნიშვნელობებს. მაგალითად, 2007 წლისათვის მოსავლიანობის სიდიდემ უნდა შეადგინოს:

$$\hat{Y} = 76.8 + 5.9 \times 5 = 106.3$$ ცენტნერი 1 ჰა-დან.

7. სეზონური რხევები დინამიკურ მწკრივებში

ხშირად ზოგიერთი ეკონომიკური მაჩვენებლის დინამიკური მწკრივების დონეები განიცდის პერიოდულ ცვალებადობას, **რასაც სეზონურ რხევებს უწოდებენ**. სეზონურობა დაკავშირებულია წლისშიგა დინამიკასთან და შეიძლება გამოწვეული იყოს სხვადასხვა ფაქტორით, მათ შორის ნედლეულის დამზადების, ნავიგაციის, ამა თუ იმ საქონელზე მოთხოვნის სეზონურობით და ა. შ.

წლის მანძილზე თვეების მიხედვით სეზონურ რხევებს სწავლობენ სეზონურობის ინდექსით, რაც გაიანგარიშება ერთსახელიანი თვეების ფაქტობრივი დონეების საშუალოს ($\bar{y}_{\text{ფაქტ.}}$) შეფარდებით მოსწორებული დონეების საშუალო ($\bar{y}_{\text{მოსწ.}}$) მნიშვნელობასთან:

$$i_{\text{სეზ.}} = \frac{\bar{y}_{\text{ფაქტ.}}}{\bar{y}_{\text{მოსწ.}}} \qquad (9.31)$$

სადაც $i_{\text{სეზ.}}$ – სეზონურობის ინდექსია;

$\bar{y}_{\text{ფაქტ.}}$ – რამდენიმე წლის მიხედვით ერთსახელიანი თვეების (მაგალითად, იანვარი ან თებერვალი და ა. შ.) ფაქტობრივი დონეების საშუალოა;

322

$\bar{y}_{მოსწ.}$ – იმავე ერთსახელიანი თვეების მოსწორებული დონეების საშუალო მნიშვნელობა.

სეზონურობის გამო დინამიკური მწკრივების რხევადობის

323

ხარისხს სწავლობენ სეზონურობის ინდექსების საშუალო კვადრატული გადახრით (σ), გაანგარიშებულს პროცენტობით:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum(i-100)^2}}{12} \qquad (9.32)$$

თუ მცირდება ეს მაჩვენებელი, ეს მიუთითებს მოცემული მოვლენის სეზონურობის შერბილებაზე და პირიქით.

8. ავტოკორელაცია დინამიკურ მწკრივებში

დინამიკური მწკრივების განვითარების ანალიზი შეიძლება ვაწარმოოთ მასზედ მოქმედი ფაქტორების მიხედვით. მაგალითად, ჩაის პლანტაციებში მოსავლიანობის დინამიკას (ცვალებადობას წლების მიხედვით) განსაზღვრავს ისეთი ფაქტორების ზემოქმედება, როგორიცაა მიწის ნაყოფიერების, შეტანილი სასუქების რაოდენობის, აგროტექნიკურ ვადებში ჩატარებული სასოფლო-სამეურნეო სამუშაოების, ნალექების წლის მანძილზე მოსვლის რეჟიმის ცვალებადობანი და ა. შ. მაგრამ დინამიკურ მწკრივებში თითოეული ამ ფაქტორის (მიზეზობრივი მოვლენის) საშედეგო მოვლენაზე ზემოქმედების რაოდენობრივი მაჩვენებელი იცვლება აგრეთვე ავტოკორელაციით. **ავტოკორელაცია** ეწოდება დინამიკური მწკრივის წინა დონეების ზემოქმედებას მომდევნო დონეებზე. მისი გამოვლენა წარმოებს კორელაციის კოეფიციენტის გაანგარიშებით მოცემული დინამკური მწკრივის დონეებსა (y_t) და იმ, ახალი დინამიკური მწკრივის დონეებს შორის y_{t+1}, რომელიც მიიღება წინა დინამიკური მწკრივის დონეთა ერთი ქრონოლოგიური თარიღით წინგადაწევის გზით. ეს იქნება ავტოკორელაციის კოეფიციენტი. კავშირის წრფივი ფორმის შემთხვევაში ავტოკორელაციის კოფიციენტის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$R_{y_t y_{t+1}} = \frac{\sum(y_t - \overline{y}_t)(y_{t+1} - \overline{y}_{t+1})}{\sqrt{\sum(y_t - y_t)^2 \sum(y_{t+1} - y_{t+1})^2}} \qquad (9.33)$$

ავტოკორელაციის გასაანგარიშებელი მონაცემები

ცხრილი №42

წლები	დონე Y_t	წლები	დონე Y_{t+1}	$(Y_t - \overline{Y}_t)$ $(Y_{t+1} - Y_{t+1})$	$(Y_t - \overline{Y}_t)^2$	$(Y_{t+1} - \overline{Y}_{t+1})^2$
1990	260.8	1991	254.1	6029.9	4569.7	7956.6
1991	254.1	1992	260.2	6174.3	5520.4	6905.5
1992	260.2	1993	273.7	4746.7	4651.2	4844.1
1993	273.7	1994	296.2	2576.3	2992.0	2218.4
1994	296.2	1995	314.9	914.4	1036.8	806.5
1995	314.9	1996	310.8	438.7	182.2	1056.2
1996	310.8	1997	328.5	260.4	309.7	219.0
1997	328.5	1998	329.4	-1.3	0	193.2
1998	329.4	1999	329.8	-13.5	1.0	182.2
1999	329.8	2000	367.7	34.1	1.9	595.3
2000	367.7	2001	394.2	2000.3	1544.4	2590.8
2001	394.2	2002	430.7	5750.9	4329.5	7638.7
2002	430.7	2003	446.9	10598.2	10465.2	10732.9
2003	446.9	2004	470.5	15073.2	14042.2	16179.8

ცხრილის მონაცემების მიხედვით:

$$R_{y_t} y_{t+1} = \frac{54582.6}{\sqrt{496.462 \times 62119.2}} = \frac{54582.6}{\sqrt{3982227}} = \frac{54582.6}{55533.6} = 0.982$$

ამრიგად, ავტოკორელაციის კოეფიციენტი 0.982 მიუთითებს დინამიკური მწკრივის ყოველ შემდგომ დონესა და მის წინა დონეთა შორის მჭიდრო ურთიერთკავშირზე, ანუ ავტოკორელაციის მაღალ ხარისხზე.

ხშირად ეკონომიკურ მაჩვენებელთა დინამიკური მწკრივის თითოეული დონე უფრო მეტად წინა დონესთან შედარებით დამოკიდებულია იმ ქრონოლოგიური თარიღის დონეზე, რომელიც დაშორებულია მოქმედი ფაქტორის ცვალებადობის გავლენის დაწყების დროით. მაგალითად, ინვესტიციური

პოლიტიკა ბიზნესში ეკონომიკურ შედეგს სამრეწველო ან სასოფლო-სამეურნეო წარმოებაში იძლევა არა ერთი წლის, არამედ გარკვეული პერიოდის (დროითი ბიჯის) გასვლის შემდეგ.

სტატისტიკაში დროითი ბიჯის გათვალისწინებულ დინამიკურ მწკრივთა ურთიერთკავშირს განსაზღვრავენ კორელაციის კოეფიციენტით, (R). რომელშიც განიხილება დინამიკური მწკრივების მოწორებული დონეების ($\hat{x}$ და $\hat{y}$) ანუ ტრენდისაგან დონეთა (x და y) გადახრები:

$$R = \frac{\Sigma(x-\hat{x})(y-\hat{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\hat{x})^2 \times \Sigma(y-\hat{y})^2}}$$

დროითი ბიჯის სიდიდისაგან დამოკიდებულებით დინამიკურ მწკრივებში ასხვავებენ პირველი, მეორე, მესამე და ა.შ. რანგის ავტოკორელაციებს. თუ დროითი ბიჯი ერთი წელია, გვაქვს პირველი რიგის (რანგის) ავტოკორელაცია და ა.შ.

9. ავტოკორელაციის არსებობის განმსაზღვრელი სტატისტიკური ხერხები

დინამიკურ მწკრივებში ავტოკორელაციის არსებობის დამტკიცებისათვის ჯერ გავამარტივოთ ავტოკორელაციის კოეფიციენტები. ავტოკორელაციის კოეფიციენტი $R_{y_t y_{t+1}}$ 9.33 შეიძლება ასეთნაირადაც ჩაიწეროს:

$$R_{y_t} y_{t+1} = \frac{\Sigma(Y_t - \overline{Y}_t)(Y_{t+1} - \overline{Y}_{t+1})}{\sqrt{\Sigma(Y_t - \overline{Y}_t)^2 \Sigma(Y_{t+1} - Y_{t+1})^2}}$$

ან კიდევ წინა კორელაციის წრფივი კოეფიციენტის, $R_{y_t} y_{t+1} = \dfrac{\overline{xy} + \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$ ფორმულის მსგავსად

$$R_{y_t} y_{t+1} = \frac{\overline{y_t y_{t+1}} - \bar{y}_t \, \overline{y_{t+1}}}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+1}}} \quad (9.34)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ პირველი რიგის ავტოკორელაციის გაანგარიშებისას (ე ი. ავტოკორელაცია y_t და y_{t+1} დონეებს შორის, როდესაც გადაადგილება ხდება წინ ან უკან ერთი წლით), დაკვირვების დიდი რიცხვის პირობებში, საშუალო დონეები $\bar{y}_t$ და $\overline{y_{t+1}}$, აგრეთვე საშუალო კვადრატული გადახრები ძალიან მცირე სიდიდით იქნება ერთმანეთისაგან განსხვავებული. ამიტომ ეს განსხვავება შეიძლება უგულველვყოთ და ჩავთვალოთ რომ $\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1}$ და $\sigma_{y_t} = \sigma_{y_{t+1}}$. აქედან გამომდინარე ავტოკორელაციის წრფივი კოეფიციენტი მიიღებს სახეს:

$$R_{y_t} y_{t+1} = \frac{\overline{y_t y_{t+1}} - \left(\bar{y}_t\right)^2}{\sigma_t^{\ 2}} \quad (9.35).$$

ეს არის ავტოკორელაციის კოეფიციენტის გასაანგარიშებელი გამარტივებული ფორმულა. ეს ფორმულა ასე შეიძლება გარდავქმნათ:

$$R_{y_t y_{t+1}} = \frac{\frac{\sum y_t y_{t+1}}{n} - \left(\bar{y}_t\right)^2}{\frac{\sum\left(y_t - \bar{y}_t\right)^2}{n}} = \frac{\sum y_t y_{t+1} - n\left(\bar{y}_t\right)^2}{\sum y_t^2 - 2\sum y_t \bar{y}_t + \sum\left(\bar{y}_t\right)^2} = \frac{\sum y_t y_{t+1} - n\left(\bar{y}_t\right)^2}{\sum y_t^2 - 2\bar{y}_t \sum y_t + \sum\left(\bar{y}_t\right)^2}$$

რადგან $2\bar{y}_t \times \frac{\Sigma y_t}{n} = 2\bar{y}_t^{\,2}$ და $\Sigma\left(\bar{y}_t\right)^2 = n\left(\bar{y}_t\right)^2$

$$R = \frac{\Sigma y_t y_{t+1} - n\left(\bar{y}_t\right)^2}{\ldots} = \frac{\Sigma y_t y_{t+1} - n\left(\bar{y}_t\right)^2}{\ldots}$$

323

ამიტომ $y_t y_{t+1}$ $\frac{\Sigma y^2}{n} - \left(y_t\right)^2$ $\Sigma y^2 - n\left(y\ \right)^2$

 324

საბოლოოდ მივიღეთ: $$R_{y_t y_{t+1}} = \frac{\Sigma y_t y_{t+1} - n\left(\overline{y}_t\right)^2}{\Sigma y^2 - n\left(y_t\right)^2} \qquad (9.36)$$

მაგრამ გაანგარიშებული ავტოკორელაციის კოეფიციენტის სიდიდე თავისთავად არ მეტყველებს ავტოკორელაციის არსებობაზე დინამიკურ მწკრივში. გაანგარიშებული კოეფიციენტი არაფერს ამბობს მისი ფაქტობრივი სიდიდის არსებითობა ან არარსებითობაზე. ამიტომ ჯერ ის უნდა შევადაროთ რაღაც სხვა სიდიდეს და ამის მიხედვით ვიმსჯელოთ ავტოკორელაციის არსებობაზე ან არარსებობაზე. ამის შესადარებლად სტატისტიკაში არსებობს სპეციალური ცხრილები, რომელთა შორის სტატისტიკოსები ასახელებენ **რ. ანდერსონის** მიერ შედგენილ ცხრილს. ეს ცხრილი ასეთი სახისაა:

ავტოკორელაციის კოეფიციენტის კრიტიკული დონეები ($R_{y_t y_{t+1}}$) $d = 0.05$ და $a = 0.01$ მნიშვნელობათა შესაბამისად

ცხრილი №43

დაკვირვების რიცხვი (n)	დადებითი მნიშვნელობანი		უარყოფითი მნიშვნელობანი	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	0.263	0.297	-0.753	-0.798
6	0.345	0.447	-0.700	-0.863
7	0.370	0.510	-0.674	-0.799
8	0.371	0.531	-0.625	-0.764
9	0.366	0.533	-0.593	-0.737
10	0.360	0.525	-0.564	-0.705
11	0.353	0.515	-0.539	-0.679
12	0.348	0.505	-0.516	-0.655
13	0.341	0.495	-0.497	-0.634
14	0.335	0.485	-0.479	-0.615
15	0.328	0.475	-0.462	-0.597
20	0.299	0.432	-0.399	-0.524

5 და 1 პროცენტიან მნიშვნელობათა დონის პირობებში ავტოკორელაციის ფაქტობრივი კოეფიციენტი უნდა შევუდაროთ ცხრილურ (კრიტიკულ) მნიშვნელობებს. ამასთან წინასწარ კეთდება ნულოვანი ჰიპოთეზა დინამიკურ მწკრივში

325

ავტოკორელაციის არარსებობის შესახებ. თუ ავტოკორე-ლაციის ფაქტობრივი კოეფიციენტი ნაკლებია ცხრილურ (კრიტიკულ) მონაცემზე, მაშინ ნულოვანი ჰიპოთეზა მიიღება და კეთდება დასკვნა იმის თაობაზე, რომ დინამიკურ მწკრივში ავტოკორელაცია არ არსებობს. ხოლო თუ ავტოკორელაციის ფაქტობრივი მაჩვენებელი მეტია ცხრილურზე, მაშინ, პირიქით, ნულოვანი ჰიპოთეზა უარიყოფა და დავასკვნით, რომ მოცემულ დინამიკურ მწკრივში ავტოკორელაცია არსებობს. 40-ე ცხრილის მონაცემებით, ავტოკორელაციის კოეფიცენტი უდრის 0.982-ს. ცხრილური მონაცემი კი ($n = 14$ და 5%-იანი მნიშვნელობის დონისათვის) შეადგენს 0.335-ს. ე. ი. ფაქტობრივი მონაცემი მეტია ცხრილურზე. აქედან $P = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.950$ ალბათობით შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ მოცემულ დინამიკურ მწკრივში არსებობს ავტოკორელაცია. ასეთივე შედეგს ვღებულობთ $1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$ ალბათობისათვის.

სოციალურ-ეკონომიკურ გაანგარიშებისათვის ძალიან ხშირად საჭიროა განისაზღვროს ავტოკორელაციის არსებობა არა მარტო დინამიკური მწკრივების დონეთა შორის, არამედ ამ დონეების საშუალო ან მოსწორებული მნიშვნელობებიდან მათ გადახრებს შორის ($\lambda_t = \bar{y} - y_t, \lambda_t = \hat{y} - y_t$).

ასეთი გადახრებისათვის ზემოთ მოტანილი ავტოკორელაციის კოეფიციენტი $R_{y_t}y_{t+1} = \frac{\overline{y_t y_{t+1}} - \left(\overline{y}_t\right)^2}{\sigma^2_{y_t}}$

მიიღებს სახეს: $R_{\lambda_t}\lambda_{t+1} = \frac{\overline{\lambda_t \lambda_{t+1}} - \left(\overline{\lambda}_t\right)^2}{\sigma^2_{\lambda_t}}$, რაც იგივეა

$R_{y_t y_{t+1}} = \frac{\Sigma y_t y_{t+1} - 2\left(\overline{y}_t\right)^2}{\Sigma y^2 - n\left(y_t\right)^2}$ მსგავსად

$R_{\lambda_t}\lambda_{t+1} = \frac{\Sigma\lambda_t\lambda_{t+1} - n(\overline{\lambda}_t)^2}{\Sigma\lambda_t^2 - n(\overline{\lambda}_t)^2}$. მაგრამ ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ვარიანტების მნიშვნელობებიდან საშუალო არითმეტიკულის გადახრების ალგებრული ჯამი უდრის ნულს. ამიტომ ასეთი გადახრების საშუალო არითმეტიკულიც ნულის ტოლი იქნება. ამ საფუძველზე გადახრებს შორის ავტოკორელაციის კოეფიციენტი კიდევ უფრო გამარტივდება და ჩაიწერება ასეთნაირად:

$$R_{\lambda_t}\lambda_{t+1} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1}\lambda_t\lambda_{t+1}}{\sum_{t=1}^{n-1}\lambda_t^2} \qquad (9.37)$$

ეს ფორმულა ასედაც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$R_{\lambda_t}\lambda_{t-1} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\lambda_t\lambda_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2} \qquad (9.38)$$

40-ე ცხრილის მონაცემების საფუძველზე გავიანგარიშოთ ვარიენტების ანუ დინამიკური მწკრივის დონეების მნიშვნელობებსა და მათ საშუალო დონეს შორის გადახრებში ავტოკორელაცის კოეფიციენტი.

გადახრებს შორის ავტოკორელციის
გასაანგარიშებელი მონაცემები

ცხრილი №44

წლები	დონე (y_t)	λ_t	λ_{t-1}	λ_t^2	$\lambda_t\lambda_{t-1}$	$\lambda_t - \lambda_{t-1}$	$(\lambda_t - \lambda_{t-1})^2$
1999	329.8	-64.0	-	409.60	-	-	-
2000	367.7	-26.1	-64.90	681.2	1670.4	37.9	1436.4
2001	394.2	0.4	-26.1	0.16	-10.44	26.5	702.2
2002	430.7	36.7	0.4	1346.9	14.68	36.3	1317.6
2003	446.9	53.0	376.7	2809.0	1945.1	16.3	265.7
Σ	1969.4	0	53.0	8933.2	3619.7	117.0	3721.9

დინამიკური მწკრივის საშუალო დონე ($\bar{y}$) უნდა გავიანგარიშოთ ფორმულით: $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{1969.4}{5} = 393.8$.

გადახრები (λ_t) უნდა ვიანგარიშოთ ემპირიულ დონებსა და საშუალო დონეს ($\bar{y}$) შორის სხვაობით. ასეთივე გადახრები შეგვეძლო გაგვეანგარიშებინა ემპირიულ დონეებსა და მოსწორებულ დონეებს შორის. ცხრილის λ_{t-1} სვეტში კარგად ჩანს, რომ გადახრების დინამიკური მწკრივის დოენეები ერთი წლითაა გადაწეული წინ. მაშასადამე, უნდა გაიზომოს λ_t სვეტისა და λ_{t-1} სვეტის მონაცემებს შორის ავტოკორელაციის კოეფიეციენტი. ამისათვის გამოვიყენოთ ზემოთმოტანილი ფორმულა

$$R_{\lambda_t \lambda_{t-1}} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \lambda_t \lambda_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \lambda_t^2} = \frac{3619.7}{8933.2} = 0.405$$

. ახლა შეგვიძლია მიღებული ავტოკორლაციის კოეფიციენტი 0.405 შევადაროთ რ. ანდერსონის მიერ შედგენილ ცხრილურ მაჩვენებლებს. ცხრილური კოეფიციენტი $n = 5$ რიცხვისა და $\alpha = 0.05$ მნიშვნელობისათვის შეადგენს 0.263-ს. მაშასადამე, გაანგარიშებული ფაქტობრივი კოეფიციენტი მეტია ცხრილურზე (0.405>0.263). ეს იმას ნიშნავს, რომ გადახრებს შორის ავტოკორელაცია არსებობს.

ასეთი სახის გადახრებს შორის ავტოკორელაციის არსებობის ან არარსებობის გამოსაკვლევად სტატისტიკაში ცნობილია, აგრეთვე, **დარბინ-უოტსონის** კრიტერიუმი (d), რომელიც ავტორთა მიერ რეკომენდებულია გავიანგარიშოთ ფორმულით:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(\lambda_t - \lambda_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^2} \qquad (9.39)$$

ავტორებმა ფორმულის გარდაქმნის გზით ეს კრიტერიუმი დაიყვანეს $2-2R_{\lambda_t\lambda_{t-1}}$ გამოსახულებამდე. კერძოდ თუ ფორმულის მრიცხველს ავიყვანთ კვადრატში გაშლილი ფორმით, გვექნება:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n}\lambda_t\lambda_{t-1} + \sum_{t=2}^{n}\lambda_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^2}$$

ავტორებმა ჩათვალეს, რომ გამოსახულებანი $\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2$ და $\sum^{n}\lambda_{t-1}^2$, აგრეთვე $\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2$ და $\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^2$ ერთმანეთისაგან ისეთი მცირედი მნიშვნელობით განსხვავდებიან, რომლის უგულებელყოფა გაანგარიშების შემდგომი გამარტივების მიზნით სავსებით შესაძლებელია. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ: $\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2 = \sum_{t=2}^{n}\lambda_{t-1}^2$. ამიტომ კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$d = \frac{2\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n}\lambda_t\lambda_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\lambda_t^2} = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n}\lambda_t\lambda_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\lambda_{t-1}^2}\right) = 2-2R_{\lambda_t,\lambda_{t-1}}$$

329

რადგანაც ფრჩხილებში მოთავსებული მაკლები, როგორც წინა მასალაში იყო ნაჩვენები (9.37) გადახრებს შორის ავტოკორელაციის კოფიციენტია.

მაშასადამე, დარბინ-უოტსონის კრიტერიუმი საბოლოოდ მიიღებს სახეს:

$$d = 2 - 2R_{\lambda_t \lambda_{t-1}} \quad (9.39)$$

ამ საფუძველზე ავტორები ასკვნიან, რომ თუ გადახრებს შორის ავტოკორელაცია არ არსებობს, ე. ი. $R_{\lambda_t \lambda_{t-1}} = 0$, მაშინ $d = 2$, ხოლო სრული კავშირია და $R_{\lambda_t}\lambda_{t-1} = 1$, მაშინ $d = 0$ (დადებითი კორელაციისას) ან 4-ს (უარყოფითი კორელაციისას). დადებითი კორელაციის შემთხვევაში კრიტერიუმის შუალედური მნიშვნელობებისათვის (0-დან 2-მდე)ავტორთა მიერ შედგენილია ცხრილური მონაცემები. ცხრილური მონაცემები შედგენილია დაკვირვების რიცხვისა (n) და დინამიკური მწკრივის მოსწორებისათვის გამოყენებული რეგრესიის განტოლების ცვლადების (Q) რაოდენობის შესაბამისად[1]. თუ დინამიკური მწკრივის მოსწორებისათვის გამოყენებულია წრფივი განტოლება ($y = a_0 + a_1 t$), მაშინ $Q = 2$, პარაბოლური განტოლების გამოყენების შემთხვევაში ($y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$), $Q = 3$ და ა. შ.

ცხრილის მონაცემები ასეთი სახისაა:

[1]ცხრილური მონაცემების ერთერთი ნაკლი ისაა, რომ ისინი მხოლოდ დინამიკური მწკრივის ემპირიული (ფაქტობრივი) დონეებიდან მოსწორებული დონეების გადახრების ავტოკორელაციის არსებითობას ზომავს.

დარბინ-უოტსონის კრიტერიუმის მნიშვნელობანი 5%-იანი არსებითობის დონეთათვის

ცხრილი № 45

<table>
<tr><th rowspan="2">დაკვირვების რიცხვი (n)</th><th colspan="2">$Q=1$</th><th colspan="2">$Q=2$</th><th colspan="2">$Q=3$</th></tr>
<tr><th>d_1</th><th>d_2</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>d_1</th><th>d_2</th></tr>
<tr><td>15</td><td>1.08</td><td>1.36</td><td>0.95</td><td>1.54</td><td rowspan="8">0.82
0.86
0.93
0.97
1.00
1.21
1.42</td><td>1.75</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1.10</td><td>1.37</td><td>0.98</td><td>1.54</td><td>1.73</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1.13</td><td>1.38</td><td>1.02</td><td>1.54</td><td>1.71</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1.16</td><td>1.39</td><td>1.05</td><td>1.53</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1.18</td><td>1.40</td><td>1.08</td><td>1.53</td><td>1.68</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1.20</td><td>1.41</td><td>1.00</td><td>1.54</td><td>1.68</td></tr>
<tr><td>30</td><td>1.35</td><td>1.49</td><td>1.28</td><td>1.57</td><td>1.65</td></tr>
<tr><td>50</td><td>1.50</td><td>1.59</td><td>1.76</td><td>1.63</td><td>1.67</td></tr>
</table>

გადახრათა შორის ავტოკორლაციის არსებობის ნულოვანი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად ცხრილში მოცემულია d კრიტერიუმის ქვედა და ზედა საზღვრები (d_1 და d_2). თუ ჩვენი გაანგარიშებული ფაქტობრივი მაჩვენებელი (d) $d > d_2$ ($4-d_2$ -მდე), ავტოკორელაციის არარსებობის ჰიპოტეზა მიღებულია. თუ $d < d_2$, დაშვებული ჰიპოთეზა უარიყოფა, თუ $d > (4\text{-}d_1)$, მაშინ არსებობს უარყოფითი ავტოკორელაცია. თუ $d_1 \le d \le d_2$, $(4-d_2) \le d \le (4-d_1)$ სიტუაცია გაურკვეველია და სხვა განტოლებით უნდა მოვასწოროთ დინამიკური მწკრივი, ვინაიდან როგორც ჩანს შერჩეულმა რეგრესიის განტოლებამ ადექვატურად ვერ ასახა დინამიკური მწკრივის განვითარების ტენდენცია.

ჩვენს მიერ მოტანილ მაგალითზე (ცხრილი №40) ვაჩვენოთ დარბინ-უოტსონის კრიტერიუმის გამოყენების წესი.

 331

დარბინ-უოტსონის კრიტერიუმის გასაანგარიშებელი მონაცემები

ცხრილი №46

წლები	დინამიკური მწკრივის დონეები y_t	t	yt	t^2	მოსწორებული დონეები ($\hat{y}_t$)	გადახრები მოსწორებული დონეებიდან $(y_t - \hat{y}_t)\lambda_t$	λ_{t-1}	λ_t^2	$\lambda_t - \lambda_{t-1}$	$(\lambda_t - \lambda_{t-1})^2$
1999	329.8	-2	-659.6	4	334.5	-4.7		22.1		
2000	367.7	-1	-367.2	1	364.2	3.5	-4.7	12.3	-1.2	1.44
2001	394.2	0	0	0	393.9	0.4	3.5	0.16	-3.1	9.6
2002	430.7	+1	430.7	1	423.6	7.1	0.4	50.4	6.7	44.9
2003	446.9	+2	893.8	2	453.3	-6.4	7.1	40.9	-13.5	182.3
Σ	1969.4	0	297.2	10	1969.5			125.9	-11.5	238.2

დაკვირვება დინამიკური მწკრივის დონეებზე მეტყველებს მასზედ, რომ ისინი დაახლოებით არითმეტიკული პროგრესიით იზრდება. ამიტომ მათ მოსასწორებლად გამოგვადგება წრფივი განტოლება $y = a_0 + a_2 t$. რადგან t-ს ათვლა ცენტრში გვაქვს გადატანილი, ამიტომ პარამეტრები $a_0 = \frac{\Sigma y}{n}$,

$a_1 = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2}$, $a_0 = \frac{1969.4}{5} = 393.9$, $a_1 = \frac{297.2}{10} = 29.7$ ხოლო მოსწორებული დონეები:

$$\hat{y}_1 = a_0 + a_1 t = 393.9 + 29.7(-2) = 334.5,$$
$$\hat{y}_2 = 393.9 + 29.7(-1) = 364.2,$$
$$\hat{y}_3 = 393.9 + 29.7(0) = 393.9,$$
$$\hat{y}_4 = 393.9 + 29.7(+1) = 423.6,$$
$$\hat{y}_5 = 393.9 + 29.7(-2) = 453.3.$$

ემპირიული (ფაქტობრივი) დონეებისა და მოსწორებული დონეების ჯამი თითქმის ერთმანეთს ემთხვევა: $\Sigma y_t = \Sigma \hat{y}_t$ ანუ $1969.4 = 1969.5$. განსხვავება 0.1 გამოწვეულია ციფრების დამრგვალებით.

332

ამ მონაცემებით დარბინ-უოტსონის კრიტერიუმის ფაქტობრივი მნიშვნელობა შეადგენს:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(\lambda_{t} - \lambda_{t-1}\right)^{2}}{\sum_{\lambda=1}^{n}\lambda_{t}^{2}} = \frac{238.2}{125.9} = 1.89$$

d კრიტერიუმის ცხრილური მონაცემები არ არსებობს დაკვირვების n=5 რიცხვისათვის. ამიტომ ვიღებთ დაკვირვების ცხრილურ 15 რიცხვს. 5%-იანი არსებითობის დონის და რეგრესიის განტოლების ორი ცვლადის პირობებისათვის ($y = a_0 + a_1 t$, აქ ცვლადებია a_0 და a_1) d_2 კრიტერიუმი შეადგენს 1.54-ს. ვინაიდან ფაქტობრივი კრიტერიუმი $1.89 > 1.54$, ამიტომ ვაკეთებთ დასკვნას იმის შესახებ, რომ გადახრათა შორის ავტოკორელაციის არარსებობის ჰიპოთეზა მიღებულია.

ყველაფერი ზემოთთქმული გამოიყენება საბაზრო ეკონომიკის პირობებში ეკონომიკაში, ბიზნესსადა მენეჯმენტში სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების განვითარების როგორც ანალიზში ისე პროგნოზირებაში.

10. ავტოკორელაციის აღმოფხვრა დინამიკურ მწკრივებში

სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების დროის მიხედვით განვითარების ანალიზსა და პროგნოზირებაში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება დინამიკური მწკრივების ავტოკორელაციის გავლენისაგან განთავისუფლებას. მაგალითად, თუ მოსავლიანობასა და სასუქების რაოდენობას შორის არსებულ რეალურ ურთიერთკავშირს განვიხილავთ, მაშინ უნდა ვივარაუდოთ, რომ ამ კავშირზე არა მარტო ნიადაგებში

შეტანილი სასუქების რაოდენობის გადიდება იმოქმედებს, არამედ თვით სასუქებისა და მოსავლიანობის განვითარების დინამიკური მწკრივის დონეების ავტოკორელაციური ფაქტორიც. ამ უკანასკნელს კი ასახავს დინამიკური მწკრივის ტრენდი, ანუ მოსწორებული დონეები. მასასადამე, თუ ჩვენ შევძლებთ ამ ტრენდის ანუ მოსწორებული დონეების გავლენა გამოვთიშოთ, მაშინ დავიანახავთ ავტოკორელაციის გავლენისაგან თავისუფალ ურთიერთკავშირს. სტატისტიკაში ამისათვის მრავალი მეთოდია შემუშავებული. მაგრამ აქედან ყველაზე მარტივი და ეფექტურია სამი მათგანი: 1. დინამიკური მწკრივის დონეებს შორის სხვაობათა კორელირების; 2. ფაქტიურ და მოსწორებულ დონეთა შორის სხვაობათა კორელირების და 3. დროის ფაქტორის გათვალისწინება რეგრესიის განტოლებაში.

ფაქტიური დონეები ზემოთ ჩვენ გამოვსახეთ განტოლებით: $y = f_t + \alpha_t$ სადაც y – ფაქტიური დონეა, f_t - მოსწორებული დონე ანუ ტრენდი (სხვაგვარად ის ზოგჯერ გამოისახება $\hat{y}$ -ით), α_t - შემთხვევითი გადახრებია. $\hat{y}$ –ტრენდი, როგორც ვიცით, გამოისახება რომელიმე მათემატიკური ფორმულით (წრფივი, პარაბოლა, ჰიპერბოლა,მაჩვენებლიანი და სხვ.). თუ წრფივი ფუნქციით არის დინამიკური მწკრივი მოსწორებული – მაშინ პირველი ფაქტიური დონე, სადაც $t = 1$ იქნება: $\hat{y}_1 = a_0 + a_1 1 + \alpha_1$, მეორე $(t = 2) - y = a_0 + a_1 2 + \alpha_2$, მესამე $(t = 3) - y = a_0 + a_1 3 + \alpha_3$ მეოთხე $(t = 4) - y = a_0 + a_1 4 + \alpha_4$ და ა. შ. მათ შორის პირველი რიგის სხვაობანია:

$$\Delta'_1 = y_2 - y_1 = (a_0 + 2a_1 + \alpha_2) - (a_0 + a_1 + \alpha_1) = a_1 + (\alpha_2 - \alpha_1),$$
$$\Delta'_2 = y_3 - y_2 = (a_0 + 3a_1 + \alpha_3) - (a_0 + 2a_1 + \alpha_2) = a_1 + (\alpha_3 - \alpha_2),$$
$$\Delta'_3 = y_4 - y_3 = (a_0 + 4a_1 + \alpha_4) - (a_0 + 3a_1 + \alpha_3) = a_1 + (\alpha_4 - \alpha_3). \quad (9.40)$$

334

როგორც ჩანს, წრფივი განტოლებით მოსწორებული დინამიკური მწკრივის დონეთა პირველი რიგის სხვაობების ცვალებადობაზე გავლენას საერთო განვითარების ტენდენცია ანუ ტრენდი ვერ მოახდენს, ვინაიდან აქედან მხოლოდ a_1 პარამეტრია შემორჩენილი სხვაობებში და ისიც ყველა მათგანში მუდმივია. ამიტომ ეს სხვაობანი განთავისუფლებულია ავტოკორელაციისგან.

თუ პარაბოლით ან მეორე ხარისხის პოლინომიითაა მოსწორებული დინამიკური მწკრივი, მაშინ დინამიკური მწკრივის ფაქტიური დონეები იქნება:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 1^2 + \alpha_1 \quad (t=1),\\
y_2 &= a_0 + a_1 \times 2 + a_2 \times 2^2 + \alpha_2 \quad (t=2),\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
y_n &= a_0 + a_1 \times n + a_2 \times n^2 + \alpha_n \quad (t=n).
\end{aligned}
\qquad (9.41)
$$

დონეთა შორის პირველი რიგის სხვაობანი იქნება:

$$\Delta_1' = y_2 - y_1 = (a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \alpha_2) - (a_0 + a_1 + a_2 + \alpha) = a_1 + 3a_2 + (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\Delta_2' = y_3 - y_2 = (a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \alpha_3) - (a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \alpha_2) = a_1 + 5a_2 + (\alpha_3 - \alpha_2).$$

როგორც ჩანს, ამ შემთვევაში (როცა დინამიკური მწკრივი მოსწორებულია მე-2 ხარისხის პოლინომით $y = a_0 + a_1t + a_2t^2$) პირველი სხვაობანი არაა თავისუფალი ძირითადი ტენდენციის ანუ ტრენდის გავლენისაგან, ვინაიდან მასში კიდევაა შემორჩენილი არამუდმივი სიდიდე a_2. ამიტომ საჭიროა მეორე რიგის სხვაობანი გავიანგარიშოთ. გვექნება:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1'' &= \Delta_2' - \Delta_1' = 2a_2 + \left(\alpha_3 + 2\alpha_2 + \alpha_1\right)\\
\Delta_1'' &= \Delta_3' - \Delta_2' = 2a_2 + \left(\alpha_4 + 2\alpha_3 + \alpha_2\right)
\end{aligned}
\qquad (9.42)
$$

 335

და ა.შ. ეს სხვაობანი უკვე თავისუფალია ავტოკორელაციის გავლენისაგან, ვინაიდან ძირითადი ტენდენციისაგან შემორჩენილია მხოლოდ a_2 და ისიც მუდმივი. მაშასადამე,

336

ავტოკორელაციის გავლენის აღმოსაფხვრელად დინამიკური მწკრივის დონეთა წრფივი განტოლებით მოსწორებისას, უნდა გავიანგარიშოთ პირველი რიგის სხვაობანი, პარაბოლის მიხედვით მოსწორებისას, მეორე რიგის სხვაობანი, ხოლო n-ური ხარისხის პარაბოლის მიხედვით მოსწორების შემთხვევაში n–ური რიგის სხვაობანი. ასეთი სხვაობანი თავისუფალია ავტოკორელაციისაგან. x და y მოვლენებს შორის კორელაციური ურთიერთკავშირის გარკვევისათვის საკმარისია ცალცალკე ვიანგარიშოთ როგორც x ფაქტორის, ისე y ფაქტორის მიხედვით დონეთა შორის შესაბამისი რიგის სხვაობანი და მხოლოდ ამ სხვაობებს შორის დავადგინოთ კორელაციის კოეფიციენტი, რაც იქნება ავტოკორელაციის გაველნისაგან თავისუფალი მაჩვენებელი, რომელიც შეგვიძლია გამოვიყენოთ x და y მოვლენებს შორის ურთიერთკავშირის ანალიზსა და პროგნოზირებაში. ამ შემთხვევაში სხვაობათაშორის კორელაციის კოეფიციენტს სტატისტიკაში განსაზღვრავენ შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$R_{\Delta x \Delta y} = \frac{\Sigma \Delta_x \Delta_y}{\sqrt{\Sigma \Delta^2{}_x \Sigma \Delta^2{}_y}} \qquad (9.43).$$

ეს ფორმულა გამომდინარეობს კორელაციის წრფივი კოეფიციენტის შემდეგი ფორმულიდან:

$$R_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

სადაც $R_{\Delta x \Delta y}$ და x და y შესაბამისად დინამიკური მწკრივების დონეთა სხვაობათაშორის კორელაციის კოეფიციენტია; Δx და Δy შესაბამისად x და y დინამიკურ მწკრივებში დონეთა შორის სხვაობანია. აღნიშნული ვაჩვენოთ შემდეგი სახის კონკრეტულ მაგალითზე:

337

სასუქების შეტანისა და მოსავლიანობის მაჩვენებლები ჩაის პლანტაციაში.

ცხრილი №47

წლები	შეტანილი სასუქების მოცულობა 1ჰ-ზე (კგ) x	ჩაის მოსავლიანობა 1ჰ-ზე ცენტნერობით y	$\Delta x = x_i - x_{i-1}$	$\Delta y = y_i - y_{i-1}$	Δx^2	Δy^2	$\Delta x \Delta y$
1998წ.	30	200	–	–	–	–	–
1999წ.	40	250	10	50	100	2500	500
2000წ.	35	220	-5	-30	25	900	150
2001წ.	50	250	15	30	225	900	450
2002წ.	60	280	10	30	100	900	300
Σ					450	5200	1400

შედეგად მივიღეთ კორელაციის კოეფიციენტი:

$$R_{\Delta x \Delta y} = \frac{1400}{\sqrt{450 \times 5200}} = 0.92$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ შეტანილი სასუქების რაოდენობის გადიდება ძლიერად მოქმედებს ჩაის პლანტაციებში ჩაის მწვანე ფოთლის მოსავლიანობის გადიდებაზე, რაც შეიძლება გათვალისწინებულ იქნას სოფლის მეურნეობის მართვისა და დაგეგვის პროცესში.

დინამიკურ მწკრივებში ავტოკორელაციის აღმოფხვრის **მეორე მეთოდი პირველი მეთოდის მსგავსია და გულისხმობს ფაქტობრივ დონეებსა და მოსწორებულ დონეებს შორის** სხვაობების კოლელირებას ანუ მათ შორის კორელაციური ურთიერთდამოკიდებულების განსაზღვრას ზემოთმოტანილი კორელაციის კოეფიციენტის დახმარებით:

$$R_{\Delta x \Delta y} = \frac{\Sigma \Delta_x \Delta_y}{\sqrt{\Sigma \Delta^2{}_x \Sigma \Delta^2{}_y}}$$

სადაც $\Delta y_{(i)} = y_i - \hat{y}_i$.

კოეფიციენტის გაანგარიშების წესები ვაჩვენოთ ზემოთმოტანილი ცხრილის მონაცემების მიხედვით

ცხრილი №48

წლები	სასუქების რაოდენობა 1ჰ-ზე (კგ)	მოსავლიანობა 1ჰ-ზე ცენტნერობით	$\Delta x = x_i - \hat{x}_i$	$\Delta y = y_i - \hat{y}_i$	Δx^2	Δy^2	$\Delta x \Delta y$
1998წ.	30	200	1	-8	1	64	-8
1999წ.	40	250	4	26	16	676	104
2000წ.	35	220	-8	-20	64	400	160
2001წ.	50	250	0	-6	0	36	-6
2002წ.	60	280	3	8	9	64	24
Σ	215	1200	0	0	90	1240	274

ცხრილის შესავსებად, პირველ რიგში საჭიროა x და y მონაცემების მოსწორება. როგორც ჩანს, ორთავე დინამიკური მწკრივის დონეების ცვალებადობა წლების მიხედვით დაახლოებით არითმეტიკული პროგრესიით ხორციელდება. ამიტომ ორთავეს მოსასწორებლად ანუ ტრენდის გასაანგარიშებლად გამოვიყენებთ წრფივ განტოლებებს: $x = a_0 + a_1 t; \quad y = a_0 + a_1 t$. გამოვიყენოთ a_0 და a_1 პარამეტრების გაანგარიშების გამარტივებული წესი, რისთვისაც t-ს ათვლა გადაგვაქვს ცენტრში. ამ შემთხვევაში პირველი დინამიკური მწკრივისათვის: $a_0 = \frac{\Sigma x}{n}, a_1 = \frac{\Sigma xt}{\Sigma t^2}$, მეორე დინამიკური მწკრივისათვის: $a_0 = \frac{\Sigma y}{n}, a_1 = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2}$, ხოლო

$$t = -2, -1, 0, +1, +2 \ \ (\Sigma t = 0 \ \ \Sigma t^2 = 10)$$

შევადგინოთ საანგარიშო ცხრილი:

ცხრილი №49

წლები	x	y	t	t^2	xt	yt	$\hat{x}$	$\hat{y}$
1998წ.	30	200	-2	4	-60	-400	29	208
1999წ.	40	250	-1	1	-40	-250	36	224
2000წ.	35	220	0	0	0	0	43	240
2001წ.	50	250	+1	1	50	250	50	256
2002წ.	60	280	+2	4	120	560	57	372
Σ	215	1200	0	10	70	160	215	1200

პირველი დინამიკური მწკრივისათვის გვექნება:

$$a_0 = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{215}{5} = 43, a_1 = \frac{\Sigma xt}{\Sigma t^2} = \frac{70}{10} = 7 \qquad \hat{x} = 43 + 7t$$

მეორესათვის:

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = 240, a_1 = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2} = \frac{160}{10} = 16 \qquad \hat{y} = 240 + 16t$$

თუ t-ს მნიშვნელობებს ($t = -2, -1, 0, +1, +2$) თანმიმდევრულად ჩავსვამთ ზემოთმოტანილ განტოლებებში ($\hat{x} = 43 + 7t$; $\hat{y} = 240 + 16t$) მივიღებთ შესაბამისად 1998, 1998, 1999, 2000, 2001, და 2002 წლების მოსწორებულ მნიშვნელობებს (რაც ნაჩვენებია ცხრილში).

ჩვენს მიერ მოსწორებული დონეების ჯამი ემთხვევა ემპირიული ანუ ფაქტობრივი დონეების ჯამს, რაც მეტყველებს წრფივი განტოლების სწორად შერჩევაზე.

ზემოთმოტანილი ცხრილის საფუძველზე კორელაციის კოეფიციენტი შეადგენს:

$$R_{\Delta x \Delta y} = \frac{\Sigma \Delta_x \Delta_y}{\sqrt{\Sigma \Delta^2{}_x \Sigma \Delta^2{}_y}} = \frac{274}{\sqrt{90 \times 1240}} = 0.82$$

ეს იმაზე მეტყველებს, რომ ამ გზითაც კორელაციური კავშირის სიმჭიდროვის ხარისხი ჩვენს მიერ მოტანილ ეკონომიკურ მაჩვენებლებს შორის ძალიან მჭიდროა.

დროის ფაქტორის ჩართვა რეგრესიის განტოლებაში შემოთავაზებულია ფიშერისა და ბოუს მიერ. ავტორთა აზრით თუ რეგრესიის ნებისმიერ განტოლებაში დამატებით ფაქტორად ჩავრთავთ დროს (t), მაშინ ის შეასრულებს ორ ფუნქციას ერთდროულად. აღმოფხვრის ავტოკორელაციას დინამიკურ მწკრივებში და ამასთან ერთად ასახავს ჩვენს მოდელში გაუთვალისწინებელი ყველა ფაქტორის გავლენას.

ამ შემთხვევაში წრფივი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y_{xt} = a_0 + a_1 x + a_2 t \;, \qquad (9.44)$$

 338

პარაბოლა: $\hat{y}_{x_1 t} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 t$ (9.45) და ა.შ.

ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა და პარამეტრების a_0, a_1, a_2, a_3 და ა. შ. გაანგარიშების წესი იქნება ისეთივე, როგორც ნაჩვენებია წინა საკითხების განხილვისას.

11. ტრენდი დინამიკურ მწკრივებში და მისი გამოყენება სეზონური წარმოების ბიზნესში

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების განვითარების მოკლევადიანი პროგნოზირებისათვის მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს დინამიკური მწკრივების განვითარების ტენდენციის შესწავლას.

სტატისტიკას გააჩნია მძლავრი მეცნიერული აპარატი დინამიკური მწკრივის საერთო დონის ცვალებადობის არსებითობის გამოსავლენად. თუ ეს ცვალებადობა არსებითია (ზოგჯერ მარტივად ამბობენ, რომ დონეთა შორის განსხვავება თუ 5%-ს აღემატება), მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ განვითარება არსებითია. საქმე გვაქვს ზრდის ან კლების ტენდენციასთან. მაგრამ განვითარების ერთი დონის ცვალებადობაზე მრავალი ფაქტორი მოქმედებს, რომელთა დიფერენცირებული ანალიზი სტატისტიკის ერთერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა. თავისი ზემოქმედების ხასიათის მიხედვით ეს ფაქორები შეიძლება დაიყოს ოთხ ჯგუფად: **სისტემატური, ციკლური, სეზონური და შემთხვევითი.**

სისტემატური ფაქტორები ევოლუციური ზემოქმედების ხასიათისაა. ასეთია, მაგალითად, ფასებზე მოქმედი მოთხოვნა-მიწოდება, მოსავლიანობაზე მოქმედი ნიადაგების ნაყოფიერება, მათი დამუშავების აგროტექნიკური ვადები, სასუქების შეტანა სასოფლო-სამეურნეო სავარგულებზე და სხვ. ამ ფაქტორთა ზემოქმედბა განაპირობებს მოვლენებისა და პროცესების განვითარების საერთო ცვალებადობას, ტენდენციას, რომელსაც

339

სტატისტიკაში **ტრენდი ეწოდება.**

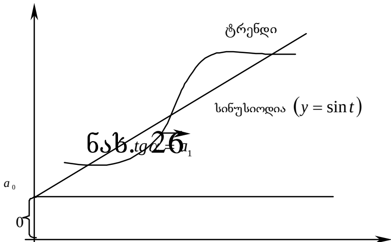
ციკლური ზემოქმედების ფაქტორები საშედეგო მოვლენის ცვალებადობას (ზრდას ან კლებას) პერიოდულად განაპირობებენ გარკვეული ციკლის განმავლობაში. მაგალითად, საქონლის საბაზრო ფასებზე მოქმედი მიწოდების ფაქტორი ციკლური ხასიათისაა, რომელიც დასაწყისში (დაბალი მიწოდება) ამაღლებს საქონლის საბაზრო ფასებს, გარკვეული პერიოდის გასვლის შემდეგ იწვევს მათ სტაბილიზაციას ბაზარზე და ბოლოს (მაღალი მიწოდება) ამცირებს მათ.

სეზონური ფაქტორები იწვევენ მოვლენის ზრდას ან კლებას (სრულიად განსაზღვრულ პერიოდებში (სეზონებში). ასეთია, მაგალითად ფასების ცვალებადობა აგრარულ ბაზრებზე სასოფლო-სამეურნეო პროდუქტბის დამზადების სეზონური ხასიათის გამო და ა.შ.

ბოლოს, შემთხვევითი ფაქტორებიც (ომები, ეკოლოგიური კატასტროფა, სეტყვა და სხვ.) **ეკონომიკაში მოქმედებს მოვლენებისა** და პროცესების განვითარებაზე.

შესაბამისად, როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები დინამიკის მწკრივს გამოსახავენ განტოლებით: $y_t = f_t + \alpha_t$ სადაც y_t – დინამიკური მწკრივის დონე t-ურ წელს; f - განვითარების სისტემური ფაქტორები, რომლებიც ძირითადი ტენდენციის (ტრენდის) მაჩვენებელია იგივე წელს; α_t – დანარჩენი ფაქტორების ზემოქმედებით გამოწვეული შემადგენელი ნაწილი.

ანალიტიკური ძირითადი ტენდენციის (ტრენდის) რაოდენობრივი მახასიათებელია დინამიკური მწკრივის მოსწორებული დონეები, ხოლო დამატებითი ნაწილის – დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა. გრაფიკულად ორივე ეს შემადგენელი ნაწილი ასე გამოისახება:



ნახ.26

დინამიკური მწკრივის განვითარების ანალიზი ტრენდის გამოვლენით იწყება. უამრავ მეთოდს ასახელებენ ამ მიზნის შესასრულებლად. მარამ ყველაზე მარტივია დინამიკური მწკრივის ორ ტოლ ნაწილად გაყოფა და შესაბამისი ნაწილების ანუ პირველი და მეორე ნაწილის საშუალო დონეების ურთიერთშედარება. ზოგჯერ ამბობენ, თუ ამ საშუალო დონეებს შორის განსხვავება 5%-ზე ნაკლებია, დინამიკურ მწკრივს განვითარების ტენდენცია (ზრდის ან კლების) არ გააჩნია და ამ საშუალო დონეებით შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოდ შესაბამისი მოვლენის განვითარება მომავლისათვის.

დინამიკური მწკრივის მონოტონურად კლებადი ან მონოტონურად მზარდი ტენდენციის შესწავლა წარმოებს ზემოთ აღწერილი რეგრესიულ განტოლებათა გამოყენებით. მათ შორისაა წრფივი, პარაბოლური, ჰიპერბოლური, ექსპონენციური, მაჩვენებლიანი განტოლებები და ა. შ.

შესაძლებელია დინამიკურ მწკრივებს ჰქონდეს არამონოტონური განვითარების ტენდენცია. ზოგჯერ ასეთი არამონოტონური განვითარება გამოისახება დინამიკური მწკრივის დონეების დასაწყისში ძალიან სწრაფი ზრდით, განსაზღვრულ ექსტრემალურ მაჩვენებლამდე მიღწევის შემდეგ შესაძლებელია გვქონდეს ზრდის შენელება ან პირიქით. ასეთი დინამიკური მწკრივების დამუშავება, მოსწორება შეიძლება ვაწარმოოთ **გომპერცის მრუდით,** რომელსაც შემდეგი სახე აქვს: $\hat{y}_t = K(a_0)^{a_1 t}$. გალოგარითმების შემდეგ შეიძლება მას მივცეთ წრფივი ფორმა: $\log \hat{y}_t = \log k + a_1 t \log a_0$.

341

ჩვენთვის უკვე ცნობილი მეთოდებით შეიძლება განტოლების პარამეტრების გაანგარიშება და დინამიკური მწკრივის მოსწორება. თუ უკუშებრუნებული სიდიდეებთან გვაქვს საქმე, მაშინ მათ შორის ურთიერთდამოკიდებულების მოდელირება შეიძლება ლოგისტიკური ფუნქციით:

$$\bar{y}_t = \frac{k}{1+10^{a_0+a_1 t}} \qquad (9.46).$$

როგორც ჩანს გამოყენებულია ათობითი ლოგარითმი 10 ფუძით.

განსაკუთრებული თავისებურებებით ხასიათდება განვითარების ტენდენციების დადგენა არამონოტონურ დინამიკურ მწკრივებში[1]. არამონოტონური ანუ განვითარების ჭრელი სურათის მქონე (ზრდა იცვლება კლებით ან პირიქით) დინამიკური მწკრივების მრავალი ტიპური მაგალითი შეიძლება მოტანილ იქნას ბიზნესში საქონლის სეზონური რეალიზაციის (მაგალითად, ზამთრის ან ზაფხულის ტანსაცმლის, ფეხსაცმლის, სასოფლო-სამეურენო პროდუქტების სეზონური წარმოების და სხვ.) სფეროდან. ამ საქონლის წლის მანძილზე (გაზაფხული, ზაფხული, შემოდგომა, ზამთარი) რეალიზაციის მაჩვენებლების ცვალებადობა მსგავსია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, სინუსისა და კოსინუსის მეოთხედების (I, II, III, IV) მიხედვით ცვალებადობისა, ანუ პერიოდულობისა (მაჩვენებლები პერიოდულად მეორდებიან). ამიტომ ასეთ შემთხვევაში დინამიკური მწკრივების მოსწორებისა და პროგნოზირებისათვის იყენებენ ფურიეს მწკრივებს, რომელთა დახმარებით თითოეული დონის მოსწორებული მნიშვნელობა გამოისახება შემდეგი განტოლებით:

[1]მონოტონური განვითარების ანუ გამოკვეთილი ზრდის ან კლების ტენდენციების მქონე დინამიკურ მწკრივებში განვითარების ტენდენციის ანუ ტრენდის დადგენის ხერხები, საშუალო წლიური ზრდისა და მატების ტემპების, საშუალო აბსოლუტური მატების, სრიალა საშუალოები, წრფივი განტოლების, არაწრფივი განტოლებების და სხვათა გამოყენება ჩვენ ზემოთ ვაჩვენეთ.

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos k + b_k \sin k\right), \qquad (9.47).$$

სადაც $\hat{y}_t$ – დინამიკური მწკრივის მოსწორებული დონეა;

t - დროის მაჩვენებელია, რომელიც შეიძლება გამოვსახოთ მნიშვნელობებით $(0,1,2. \; . \; . \; . \; n)$;

k - გარმონიკის[1] მაჩვენებელია $K = 0,1,2,...,m$, უცნობი a_0, a_k, b_k პარამეტრებია, რომელთა გასაანგარიშებლად ვიყენებთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდს:

$$\Sigma(y_t - \hat{y}_t)^2 = \min$$

სადაც y_t – ემპირიული ანუ ფაქტობრივი დონეებია;

$\hat{y}_t$ - მოსწორებული დონეები.

თუ $\hat{y}_t$-ს ნაცვლად ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას, გვექნება:

$$\Sigma\left[y_t - a_0 - \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cos k + b_k \sin k\right)\right]^2 = \min \qquad (9.48).$$

თუ მიღებულ გამოსახულებას გავაწარმოებთ a_0, a_k და b_k მიმართ, ე. ი. მოვნახავთ პირველი რიგის წარმოებულებს და თითოეულ მათგანს გავუტოლებთ 0-ს, მვიღებთ a_0, a_k და b_k პარამეტრების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n}; \; a_k = \frac{2\Sigma y \cos kt}{n}; \; b_k = \frac{2\sum y \sin kt}{n}. \qquad (9.48)$$

[1]როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ზოგიერთ შემთხვევაში დინამიკური მწკრივების დონეთა მნიშვნელობები სინუსისა და კოსინუსის ფუნქციების განმეორების მსგავსად პერიოდულად მეორდებიან, რასაც წარმოადგენენ სინოსოიდალური რხევადობის გზით. იმის გამო, რომ ასეთი ცვალებადობანი წარმოადგენენ გარმონიულ რხევადობებს, ამიტომ დინამიკური მწკრივის მოსწორების შედეგად მიღებულ სინუსოიდებს გარმონიკებს უწოდებენ.

ასეთი პარამეტრების გასაანგარიშებლად საჭიროა $\sin kt$ -ს და $\cos kt$ -ს მნიშვნელობათა დადგენა. ეს მნიშვნელობანი უნდა დავადგინოთ გარმონიკის მიხედვით. ჩვეულებრივად ფურიეს მწკრივების მიხედვით ანგარიშობენ ოთხ გარმონიკას. განსაზღვრავენ რომელი მათაგნი უფრო ადექვატურად ასახავს ემპირიული დონეების განვითარების სურათს. ფურიეს მწკრივს ექნება სახე:

$$k=1, \quad \hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t \ , \qquad (9.49),$$

I გარმონიკა

$$k=2, \quad \begin{matrix} \hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \\ + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t \end{matrix} \ , \qquad (9.50),$$

II გარმონიკა

$$k=3, \quad \begin{matrix} \hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + \\ + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t \end{matrix} , \ (9.51),$$

III გარმონიკა

$$k=4, \quad \begin{matrix} \hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \\ + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t + a_4 \cos 4t + b_4 \sin 4t \ , \end{matrix} \qquad (9.52).$$

IV გარმონიკა

t -ს მნიშვნელობანი I და II გარმონიკისთვის გაინგარიშება შემდეგი მაჩვენებლების გამოყენებით: 1) t -ს მნიშვნელობანი დინამიკური მწკრივის დონეების მიხედვით, როგორც ზემოთ დავინახეთ, იცვლება 0-დან n -მდე. თუ გვაინტერესებს წლის განმავლობაში ცალკეული პერიოდების მიხედვით რაიმე ეკონომიკური მაჩვენებლის სეზონური ან სხვა სახის ცვალებადობა, მაშინ თვეების მიხედვით t=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11. . ისე, რომ 0 აღნიშნავს იანვარს, 1 თებერვალს და ა.შ. თუ ცალკეულ პერიოდებს წრეხაზის სიგრძის ($2\Pi R$) ნაწილებით გამოვსახავთ, მაშინ თვის

344

რადიანული ზომა იქნება $\frac{2\Pi}{12}$[1]. მაშასადამე t-ს რადიანული სიდიდეები შესაბამისად იქნება: იანვარში– $\frac{2\Pi}{12}\times 0=0$, თებერვალში– $\frac{2\Pi}{12}\times 1=\frac{\Pi}{6}$, მარტში, $\frac{2\Pi}{12}\times 2=\frac{\Pi}{3}$, აპრილში $\frac{2\Pi}{12}\times 3=\frac{\Pi}{2}$ და ა. შ. მაშასადამე t-ს რადიანული მნიშვნელობანია:

$$t=0;\ \frac{\Pi}{6};\frac{\Pi}{3};\frac{\Pi}{2};\frac{2\Pi}{3};\frac{5\Pi}{6};\Pi;\frac{7\Pi}{6};\frac{4\Pi}{3};\frac{3\Pi}{2};\frac{5\Pi}{3};\frac{11\Pi}{6};$$

2) t -ს მნიშვნელობათა შესაბამისად საჭიროა კოსინუსისა და სინუსის მნიშვნელობანი დავადგინოთ.

ელემენტარული მათემატიკიდან ცნობილია, რომ ცენტრალური კუთხის **რადიანული ზომა ეწოდება შესაბამისი რკალის სიგრძის ფარდობას რადიუსთან.**

რადიანი არის ცენტრალური კუთხე, რომელიც დაყრდნობილია წრეწირის იმ რკალზე, რომლის სიგრძე ამ წრეწირის რადიუსის ტოლია. განსაზღვრის თანახმად 1რად. $=\frac{180}{\Pi}$ გრადუს $\approx 57^{0}17'45''$. ცხადია 1^{0}-ის რადიანული ზომა იქნება $\frac{\Pi}{180}\approx 0.01745$[2] რადიანი. α^{0}–ის რადიანული ზომა,

---

[1] 2Π–წრეხაზის სიგრძის რადიანული სიდიდეა, ვინაიდან წრეხაზის სიგრძე ($2\Pi R$) შეფარდებულია რადიუსთან (R).

[2] ა. ბუაძე და სხვ. მატემატიკა უმაღლესში შემსვლელსათვის, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბ., 1986, გვ. 164.

345

თუ მას ავღნიშნავთ a -თი, იქნება $a = \frac{\Pi}{180} \times \alpha$.

აქედან ვღებულობთ კუთხეების რადიანულ მნიშვნელობებს. პირდაპირ ვწერთ:

$$d = \frac{\Pi}{2};\ 30^0 = \frac{\Pi}{6};\ 60^0 = \frac{\Pi}{3};\ 45^0 = \frac{\Pi}{4};\ 135^0 = \frac{3\Pi}{4};\ 270^0 = \frac{3\Pi}{2};\ 180^0 = \Pi$$

და ა.შ.

თუ ამ მაჩვენებლებს გამოვიყენებთ და გავიხსენებთ ნახევარკუთხის, ორმაგი კუთხის და ა.შ. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მაშინ კოსინუსი და სინუსი შემდეგ მნიშვნელობებს მიიღებს:

ცხრილი №50

t	$\cos t$	$\cos 2t$	$\cos 3t$	$\cos 4t$	$\sin t$	$\sin 2t$	$\sin 3t$	$\sin 4t$
0	1	1	1	1	0	0	0	0
$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	0	-0.5	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\Pi}{3}$	0.5	-0.5	-1	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\Pi}{2}$	0	-1	0	1	1	0	-1	0
$\frac{2\Pi}{3}$	-0.5	-0.5	1	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\Pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	0	-0.5	0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Π	-1	1	-1	1	0	0	0	0
$\frac{7\Pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	0	-0.5	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\Pi}{3}$	-0.5	-0.5	1	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\Pi}{2}$	0	-1	0	1	-1	0	1	0
$\frac{5\Pi}{3}$	0.5	-0.5	-1	-0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\Pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	0	-0.5	-0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

346

მოვიტანოთ კონკრეტული მაგალითი (ციფრები პირობითია)

ცხრილი №51
ბიზნესში გაზის მოხმარება

თვეები	აირის მოხმარება (ათას $მ^3$) y_t	$y\cos t$	$y\sin t$	$\hat{y}_t$	$y\cos 2t$	$y\sin 2t$	$\hat{y}_t$
იანვარი	336.92	336.92	0.00	338.82	339.92	0.00	338.68
თებერვალი	339.30	294.00	169.66	338.60	169.66	294.00	338.22
მარტი	337.04	168.52	292.00	336.78	-168.52	292.00	336.56
აპრილი	332.24	.0.00	332.24	333.84	-332.24	0.00	333.98
მაისი	332.04	-166.02	287.62	330.58	-166.02	-287.62	330.96
ივნისი	328.46	-284.2	164.22	329.88	164.22	-284.20	328.10
ივლისი	332.08	-326.08	0.00	326.46	326.08	0.00	326.32
აგვისტო	326.06	-282.2	-163.04	328.68	163.045	282.20	326.3
სექტემბერი	329.06	-164.54	-225.00	328.15	-165.40	285.00	328.28
ოქტომბერი	330.92	0.00	-330.92	331.44	-330.92	0.00	331.58
ნოემბერი	335.26	167.64	-290.40	334.70	-167.64	-290.40	335.08
დეკემბერი	338.28	293.00	-163.14	337.40	169.14	-293.00	339.62
სულ	3991.66	37.04	7.24	3991.68	-0.82	-2.02	3997.68

ამ მონაცემების საფუძველზე პირველი გარმონიკის განტოლების პარამეტრები შეადგენს:

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{3991.66}{12} = 332.64$$

$$a_1 = \frac{2\Sigma y\cos t}{n} = \frac{2\times 37.04}{12} = 6.17$$

$$b_1 = \frac{2\Sigma\sin t}{n} = \frac{7.04\times 2}{12} = 1.21$$

აქედან გამომდინარე პირველი გარმონიკის წრფივი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\hat{y}_t = 332.64 + 6.17\cos t + 1.21\sin t$$

მეორე გარმონიკის განტოლების პარამეტრები:

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{3991.66}{12} = 332.64$$
$$a_1 = \frac{2\Sigma y \cos 2t}{12} = \frac{2 \times (-0.82)}{12} = -0.14$$
$$b_1 = \frac{2\Sigma \sin 2t}{n} = \frac{2 \times (-2.02)}{12} = -0.34$$

განტოლება მიიღებს ფურიეს მწკრივის შემდეგ სახეს:
$$\hat{y}_t = 332.64 + 6.17\cos t + 1.21\sin t - 0.14\cos 2t - 0.34\sin 2t$$

თუ პირველ განტოლებაში თვეების მიხედვით ჩავსვამთ $\cos t$ და $\sin t$, ხოლო მეორე განტოლებაში $\cos 2t$ და $\sin 2t$-ს მნიშვნელობებს, მივიღებთ აირის მოხმარების მოსწორებულ დონეებს ბშესაბამისად პირველი და მეორე გარმონიკების მიხედვით (ეს დონეები ასახულია 49-ე ცხრილში).

ასეთივე წესით შეიძლება დინამიკური მწკრივის მოსასწორებლად გამოვიყენოთ მესამე და მეოთხე გარმონიკების შესაბამისი განტოლებანი. თითოეულის მიხედვით დინამიკური მწკრივის მოსწორების შემდეგ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით $\left[\Sigma(y-\hat{y})^2 = \min\right]$ უნდა ვიანგარიშოთ მოსწორების სიზუსტის ხარისხი. ცხადია, იმ გარმონიკის მიხედვით მოსწორება უნდა ავირჩიოთ, რომლითაც განსხვავება ფაქტობრივი ანუ ემპირიული დონეებისა და მოსწორებული დონეების ჯამთა შორის იქნება მინიმალური. ჩვენ მხოლოდ ორი (პირველი და მეორე) გარმონიკების მიხედვით მოვასწორეთ დინამიკური მწკრივი. აღმოჩნდა, რომ როგორც ცხრილიდან ჩანს, ყველაზე ზუსტად დინამიკური მწკრივის განვითარების ტენდენციას ასახავს ფურიეს მწკრივის პირველი გარმონიკა, რადგან $\Sigma(y-\hat{y})^2 = (3391.66 - 3391.68)^2 = 0.02^2 = 0.0004$, რაც მხოლოდ ციფრების დამრგვალებითაა გამოწვეული.

ჩვენს მიერ გაანგარიშებული განტოლებანი ბიზნესში

348

შეიძლება გამოყენებულ იქნას პროგნოზირებაში ანუ წარსულში ტენდენციების მომავალ პერიოდზე გავრცელების ანუ ექსტრაპოლირების დროს. ეს მხოლოდ მაშინ იძლევა სასურველ ეფექტს, როცა წარსულში არსებული სიტუაციები უცვლელი დარჩება მომავალშიაც.

349

თავი X. შერჩევითი დაკვირვებანი ეკონომიკასა და ბიზნესში

1. შერჩევითი დაკვირვების ცნება და გამოყენების მიზეზები

ალბათობანი და შერცევითი დაკვირვბანი, რომლებიც ძალიან ფართოდ გამოიყენება საბაზრო ეკონომიკაში, აგრეთვე ბიზნესსა და მენეჯმენტში სტატისტიკის თეორიისა და პრაქტიკის ერთერთი მნიშვნელოვანი სფეროა.

შერჩევითი დაკვირვება არამთლიანი დაკვირვების ერთ-ერთი ნაირსახეობაა. მისი არსი ისაა რომ, მთლიანი ერთობლიობიდან შეირჩევა ნაწილი, შეისწავლება ის და შედეგები გავრცელდბა მთელს ერთობლიობაზე. მთლიან **ერთობლობას** ეწოდება **გენერალური**, ხოლო შერჩეულ ნაწილს, რომელზედაც ტარდება დაკვირვება – **შერჩევითი ერთობლიობა** ეწოდება.

მახასიათებლები, რომლებიც დადგინდება შერჩევითი ერთობლიობის შესწავლით და გავრცელდება გენერალურ ერთობლიობაზე, არის ორი სახის: საშუალო სიდიდეები (საშუალო ხელფასი, საშუალო მოსავლიანობა, საშუალო თანრიგი, საშუალო გამომუშავება და ა.შ.) და წილობრივი სიდიდე (ვაჟების ან ქალების ხვედრითი წილი, წუნდებული და ვარგისი პროდუქციის ხვედრითი წილი, ხარისხიანი პროდუქციის ხვედრითი წილი და ა.შ.).

შერჩევითი დაკვირვების გამოყენების აუცილებლობას სტატისტიკაში განაპირობებს შემდეგი ძირითადი მიზეზები: 1) დაკვირვების დროისა და სახსრების შემცირება. მართლაც, რადგან დაკვირვებას ექვემდებარება ერთობლიობის მხოლოდ ნაწილი, მცირდება როგორც დაკვირვების ჩატარებისთვის საჭირო დრო, ასევე შესაბამისი მატერიალური, შრომითი და ფინანსური რესურსები; 2) დაკვირვების თითოეული ერთეულის

დეტალური გამოკვლევის აუცილებლობა. მაგალითად, საოჯახო ბიუჯეტების გამოკვლევისას შემოსავლებისა და გასავლების დეტალური, დაწვრილებითი შესწავლაა საჭირო, ასეთი შესწავლა კი შეუძლებელია მოვახდინოთ ყველა ოჯახში, რის გამო გამოიყენება შერჩევითი დაკვირვება; 3) მატერიალური ფასეულობების დანაკარგების მინიმუმამდე დაყვანა. მაგალითად, ელექტრო ნათურების განათების ხანგრძლივობის დასადგენად საჭიროა მათი ფიზიკური განადგურება და სხვა; 4) გამოკვლევის უფრო მეტი სიზუსტის მიღწევა. ვინაიდან დაკვირვებას ექვემდებარება მთლიანი ერთობლიობის მხოლოდ ნაწილი, ამიტომ მცირდება დაშვებული შეცდომების რაოდენობაც და იზრდება მიღებული შედეგების სიზუსტის ხსრისხი.

2. შერჩევითი დაკვირვების სახეები და წესები

შერჩევითი დაკვირვება ორი სახისაა: **განმეორებითი** და **განუმეორებელი**. განმეორებითია ისეთი შერჩევითი დაკვირვება, რომლის დროსაც შერჩეული ნაწილი შესწავლის შემდეგ ისევ უბრუნდება გნერალურ ერთობლიობას და მონაწილეობას ღებულობს ახალ შერჩევაში. განუმეორებელი შერჩევისას კი პირიქით, შერჩეული ნაწილი აღარ უბრუნდება გენერალურ ერთობლიობას და ვერც მონაწილეობს მორიგ შერჩევაში.

შერჩევის წესებიდან აღსანიშნავია **ინდივიდუალური და სერიული;**

ინდივიდუალურის დროს შეირჩევა ცალკეული ერთეულები, ხოლო სერიულის დროს–მთელი პარტიები, სერიები. თავისთავდ ორივე მათგანი შეიძლება შეირჩეს საკუთრივ-შემთხვევითი, მექანიკური, ტიპური და სხვა წესებით. **საკუთრივ-შემთხვევითი** წესის დროს ერთობლიობა არაა დალაგებული რაიმე ნიშნის მიხედვით და შერჩევა ხდება წინასწარ რაიმე განზრახვის გარეშე. ასეთია, მაგალითად, ლატარიის გათამაშება და სხვა. **მექანიკური წესის** დროს ჯერ ერთობლიობას

რაღაც გარკვეული ნიშნით დაალაგებენ, შემდეგ მექანიკურად ამოიღებენ, ვთქვათ, ყოველ მეათეს (10 %-ნი შერჩევა) ან

352

ყოველ მეოთხეს (25 %-იანი შერჩევა) და ა. შ. ტიპური ანუ რაიონირებადი შერჩევის დროს საქმე გვაქვს არაერთტიპურ ერთობლიობასთან (გენერალურ ერთობლიობასთან). ამიტომ წინასწარ მას არსებითი ნიშნის მიხედვით დაჰყოფენ ერთტიპურ ნაწილებად. შემდეგ თითოეული ტიპური ჯგუფიდან საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური წესით შეირჩევა გარკვეული ნაწილი და მოხდება მასზე დაკვირვება.

უფრო მეტი სიზუსტისათვის ზოგჯერ მიმართავენ აღნიშნული წესების კომბინირებულ გამოყენებას. მაგალითად, სერიული შერჩევა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ტიპურთან ერთად, ტიპური მექანიკურთან და ა.შ. (დაწვრილებით შერჩევის წესები განხილულ იქნება ამ თავის მომდევნო პარაგაფებში).

3. შერჩევითი დაკვირვების მახასიათებლები და მათი გაანგარიშების მათემატიკური საფუძვლები

შერჩევითი დაკვირვების ჩატარება გაივლის შემდეგ ძირითად ეტაპებს: 1. შერჩევითი დაკვირვების მიზნისა და ამოცანების განსაზღვრა; 2. შერჩევითი დაკვირვების პროგრამის შედგენა; 3. სოციალურ-ეკონომიკური ინპორმაციის მოპოვება; 4. მიღებული შედეგების ანალიზი; 5. ძირითადი მახასიათებლების გაანგარიშება; 6. შერჩევის შეცდომების განსაზღვრა; 7. შერჩევითი მახასიათებლების გენერალურ ერთობლიობაზე გავრცელება დაშვებულ ცდომილებეთა გათვალისწინებით. შერჩევის ძირითადი მახასიათებლების აღსანიშნავად სტატისტიკა გამოიყენებს შემდეგი სახის პირობით აღნიშვნებს:

353

მახასიათებლების პირობით აღვნიშვნათა სიმბოლოები

ცხრილი №52

მახასიათებლების დასახელება	გენერალური ერთობლიობა	შერჩევითი ერთობლიობა
1.დაკვირვების რიცხვი	N	n
2.შესასწავლი ნიშნის საშუალო მნიშვნელობა	$\overline{X_0}$	$\tilde{X}$
3.შესასწავლი ნიშნის ხვედრითი წილი	$P(q=1-P)$	$W(1-W)$
4.დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა	(σ_0^2, σ_0)	$\sigma^2, \sigma.$

შერჩევითი დაკვირვების ბოლო ეტაპზე, როგორც ზემოთ დავინახეთ, წარმოებს შერჩევითი ერთობლიობის შესწავლის შედეგების გავრცელება გენერალურ ერთობლიობაზე. კითხვაზე თუ რამდენად გვაქვს ჩვენ ასეთი გავრცელების უფლება, პასუხს იძლევა შერჩევითი და გენერალური მახასსიათებლების გაანგარიშების მათემატიკური, აგრეთვე თეორიულ-მეთოდოლოგიური საფუძვლები. მათემატიკური საფუძვლებიდან საჭიროა შევიხსენოთ შემთხვევითი რიცხვის (X) ცნება და მათემატიკური ლოდინი (E).

ალბათობის თეორიაში შემთხვევითი სიდიდე (X) განმარტებულია როგორც ცვლადი, რომელსაც სხვადასხვა შემთხვევით გარემოებათა გავლენით შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობანი.

სოციალურ-ეკონომიკურ მოვლენებსა და პროპორციებში ასეთი შემთხვევითობანი ძალიან ხშირია და შესაბამისად ფართოდ გამოიყენება შემთხვევითი სიდიდეები და მათზე მოქმედებანი.

შემთხვევითი სიდიდის (X) სრული დახასიათებისათვის საჭიროა გვქონდეს არა მარტო მისი n რაოდენობის სხვადასხვა მნიშვნელობანი ($X_1, X_2, \ldots, X_n$), არამედ

ალბათობანიც ($A_1, A_2, ..., A_n$), რომლის ძალითაც თითოეული სიდიდე ღებულობს მხოლოდ და მხოლოდ მოცემულ მნიშვნელობას. ეს ორი მაჩვენებელი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ცხრილის სახით:

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ცხრილი

ცხრილი №53

მნიშვნელობა	X_1	X_2	. . . .	X_n
ალბათობა	A_1	A_2	. . . .	A_n

დავუშვათ, რომ ფირმაში მომუშავე 100 მუშიდან 20 იღებს თვეში ხელფასს 80 ლარის ოდენობით, 10,120 ლარის ოდენობით, 15, 150 ლარის, 25, 180 ლარის, ხოლო 30, 200 ლარის ოდენობით. ცხრილის სახით ეს მონაცემები ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

ფირმის მუშების განაწილება თვიური ხელფასის მიხედვით

ცხრილი№ 54

ხელფასი თვეში (ლარი) (X)	80	120	150	180	200
მუშების რიცხვი (f)	20	10	15	25	30
(A) (ალბათობა)	$\frac{20}{100} = 0.2$	0.1	0.15	0.25	0.3

კლასიკური განმარტების მიხედვით მოვლენის დადგომის ალბათობას განსაზღვრავს ამ მოვლენის ხელშემწყობ ხდომილებათა რიცხვის შეფარდება მთლიან ხდომილებათა რიცხვთან. ვინაიდან 80 ლარიანი თვიური ხელფასის მქონე მუშების რიცხვი ფირმის 100 მუშიდან 20-ია, ამიტომ ალბათობა

$A_1 = \frac{20}{100} = 0.2$, ამის მსგავსად: $A_1 = \frac{10}{100} = 0,1,$ $A_3 = \frac{15}{100} = 0,15,$

$$A_4 = \frac{25}{100} = 0{,}25, \quad A_5 = \frac{30}{100} = 0{,}3.$$

როგორც ჩანს ალბათობათა ჯამი ტოლია ერთის:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \sum_{i=1}^{5} A_i = 1 \qquad (10.1)$$

შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** (E) ეწოდება ამ შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა (X_i) მათ ალბათობაზე (A_i) ნამრავლთა ჯამს. ეს ასე ჩაიწერება:

$$E(X) = X_1A_1 + X_2A_2 .... X_nA_n = \sum_{i=1}^{n} X_iA_i$$

54- ე ცხრილის მონაცემების მიხედვით გვექნება:

$$E(X) = (80 \times 0.2) + (120 \times 0.1) + (150 \times 0.15) + (180 \times 0.25) + (200 \times 0.3) = 155{,}5$$

ამ შემთხვევაში ფირმის მუშების თვიური ხელფასის მათემატიკური ლოდინი ასახავს ხელფასის იმ მოცულობას, რომელსაც თითოეული მუშა მიიღებდა თვეში ხელფასის თვიური ფონდის ყველა მუშაზე თანაბარი განაწილების შემთხვევაში.

იგივე შედეგს მივიღებთ თუ ფირმის მუშათა საშუალო თვიური ხელფასის მოცულობას იგივე 54-ე ცხრილის მონაცემებით გავიანგარიშებთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი საშუალო შეწონილი არითმეტიკულის გამოყენებით. გვექნება:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{(80 \times 20) + (120 \times 10)(150 \times 15) + (180 \times 25) + (200 \times 30)}{20 + 10 + 15 + 25 + 30} = 155{,}5.$$

აქედან გამომდინარე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სხვა არაფერია თუ არა თვით ამ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო არითმეტიკული. ამიტომ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს ზოგჯერ მის საშუალო მნიშვნელობასაც უწოდებენ.

მათემატიკურ ლოდინს გააჩნია ზოგიერთი თვისება. მათ შორის:

1. მუდმივი რიცხვის მათემატიკური ლოდინი იგივე მუდმივი რიცხვია: $\mathrm{E}(a) = a \times 1 = a$; (10.2)

2. მუდმივი მამრავლი (K) შეიძლება გამოვიტანოთ მათემატიკური ლოდინის სიმბოლოს (E) გარეთ: $\mathrm{E}(\mathrm{KX}) = \mathrm{KEX}$ (10.3);

3. ჯამის მათემატიკური ლოდინი უდრის ამ შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინების ჯამს: $\mathrm{E}(\mathrm{X} + Y) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(Y)$; (10.4);

4. შემთხვევითი სიდიდეთა სხვაობის მათემატიკური ლოდინი უდრის ამ შემთხვევით სიდიდეთა მათემათიკური ლოდინების სხვაობას: $E(X - y) = E(X) - E(y)$; (10.5);

5. შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი უდრის ამ შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკურ ლოდინთა ნამრავლს: $\mathrm{E}(\mathrm{X}Y) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) \times \mathrm{E}(Y)$; (11.6)

6. შემთხვევითი სიდიდის მისი მათემატიკური ლოდინისაგან გადახრის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია: $\mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})] = 0$. (10.7);

მათემატიკური ეს თეორემა ჩვენს მიერ დამტკიცებულია საშუალო არითმეტიკულის თვისებებში, რომელიც ასე გამოითქმის: საშუალო არითმეტიკულიდან ვარიანტების მნიშვნელობების გადახრების ალგებრული ჯამი ნულის ტოლია.

შერჩევითი და გენერალური ერთობლიობის მახასიათებლების ურთიერთშედარებისათვის საჭიროა, აგრეთვე, გავიხსენოთ დისპერსიის მათემატიკური ინტერპრეტაცია. მათემატიკურ სტატისტიკაში მიიჩნევენ, რომ მათემატიკური ლოდინი ვერ ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის გადახრებს ანუ განბნევის ხარისხს. ეს კარგად ჩანს ორი სხვადასხვა შემთხვევითი სიდიდის მათემათიკურ ლოდინთა ურთიერთშედარებით, რომლებიც ზოგჯერ ერთმანეთის ტოლია. მაგალითად, ორი ფირმის მუშების განაწილებას ხელფასის მიხედვით თუ შევადარებთ ერთმანეთს მხოლოდ მათემატიკური

ლოდინით, შესაძლებელია ეს უკანასკნელი ერთნაირი აღმოჩნდეს ორივე ფირმისთვის. მხოლოდ ამ ინდიკატორით თუ ვიმსჯელებთ, მაშინ გამოდის, რომ ანაზღაურების დონე ერთნაირია ორივე ფირმაში, რაც არასაკმარისია მაღალი და დაბალი ანაზღაურების, ანუ საშუალო ხელფასიდან მკვეთრად განსხვავებული ანაზღაურების მქონე მუშების ხვედრითი წილის დასახასიათებლად. ამიტომ სტატისტიკაში იხილავენ საშუალოდან ანუ მათემატიკური ლოდონიდან შემთხვევითი სიდიდის ვარიანტების გადახრის კვადრატების საშუალოს, **რომელსაც დისპერსია და მისგან უშუალოდ გამომდინარე საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება.** თუ 53-ე ცხრილის მონაცემებში შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების $\left(X_{1,} X_{2,......,} X_n\right)$ ნაცვლად ჩავსვამთ თითოეულის მათი მათემატიკური ლოდონიდან გადახრების კვადრატებს, გვექნება:

ცხრილი №55

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობანი	$[X_1 - E(X)]^2$	$[X_2 - E(X)]^2$	. . . .	$[Xn - E(X_n)]^2$
ალბათობა	A_1	A_2	. . . .	An

1. ასეთი სხვაობის კვადრატის გარეშე განხილვა არ შეიძლება, ვინააიდან,როგორც ვიცით, მათემატიკური ლოდინის 6-ე თვისების თანახმად ის ნულს უდრის.

მივიღეთ ახალი შემთხვევითი სიდიდის $[X_i - E(X)]^2$ იგივე განაწილების ცხრილი, როგორიც გვქონდა 53-ე ცხრილში. თუ ამ ახალი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს განვიხილავთ, გვექნება

$$E[X - E(X)]^2 = [X_1 - E(X)]^2 A_1 + [X_2 - E(X)]^2 A_2 + ... + [X_n - E(X)]^2 A_n = \sum [Xi - E(X)]^2 A_i \quad (10.8)$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება დისპერსია, რომელსაც მათემატიკაში $D(X)$**–ით აღნიშნავენ, ხოლო სტატისტიკაში** $-\sigma^2$**–ით.** მაშასადამე მათემატიკურად **დისპერსია** ეწოდება

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინიდან გადახრების კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს და ჩაიწერება ასეთნაირად:

$$D(\mathrm{X}) = \mathrm{E}[\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})]^2 \qquad (10.9).$$

თუ 54-ე ცხრილის მონაცემებს გამოვიყენებთ, რომელთა მიხედვით $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 155{,}5$ ლარს, გვექნება:

$$D(X) = (80 - 155.5)^2\, 0.2 + (120 - 155.5)^2\, 0.1 + (150 - 155.5)^2\, 0.15 +$$
$$+ (180 - 155.5)^2\, 0.25 + (200 - 155.5)^2 = 1890 \text{ ლარი.}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ფირმის მუშების ხელფასთა შორის სხვაობა ძალიან მაღალია და ხასიათდება განბნევის დიდი ხარისხით. დისპერსიიდან ამოღებული კვადრატული ხარისხის ფესვი შეადგენს საშუალო კვადრატულ გადახრას (σ):

$$(\sigma) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{1890} = 43{,}4 \quad \text{ლარი.}$$

ესაც გადახრის ანუ ინდივიდუალური ხელფასების საშუალოდან ანუ მათემატიკური ლოდინიდან დაშორების საშუალო მაჩვენებელი ფირმაში 43,4 ლარია თვეში, რაც საკმაოდ მაღალია და საშუალო ხელფასის მიმართ ვარიაციის კოეფიციენტის სახით შეადგენს $V = \dfrac{\sigma \times 100}{\overline{\mathrm{X}}} = 28\%$ -ს.

ეს კი ხელფასების განბნევის ხარისხობრივი მაჩვენებელია და გვიჩვენებს მუშების ხელფასებს შორის განსხვავების მაღალ დონეს.

შერჩევითი მახასიათებლების ურთიერთთანაფარდობის გარკვევისათვის საჭიროა გავიხსენოთ დისპერსიების ზოგიერთი თვისება[1]. მათ შორის:

1. მუდმივი სიდიდის (a) დისპერსია ნულს უდრის:

$$D(a) = (a - a)^2 \times 1 = 0 \qquad (10.10);$$

[1]თვისებათა დამტკიცება იხ. მათემატიკურ სტატისტიკაში, კერძოდ À. È. Êàðàñåâ, îñíîâû ìàòåìàòè÷åñêîé ñòàòèñòèêè, Ðîñâóçèçäàò, 1962, გვ. 35-42

358

2. მუდმივი თანამამრავლი (K) შეიძლება გამოვიტანოთ დისპერსიის ნიშნის გარეთ მხოლოდ კვადრატში აყვანილი:

$$D(\mathrm{KX}) = \mathrm{K}^2 D(\mathrm{X}) \qquad (10.11);$$

3. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია უდრის ამ შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს გამოკლებული მათემატიკური ლოდინის კვადრატი:

$$D(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}) \qquad (10.12);$$

ამის მსგავსი ფორმულა ჩვენთვის უკვე ცნობილია ვარიაციის მაჩვენებლიდან $\sigma^2 = \overline{\mathrm{X}}^2 - \left(\overline{\mathrm{X}}\right)^2$;

4. ურთიერთდამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა (X, Y) ჯამის დისპერსია უდრის შესაკრებთა დისპერსიების ჯამს.

$$D(\mathrm{X}+Y) = D(\mathrm{X}) + D(Y) \qquad (10.13).$$

აქედან გამომდინარეობს შედეგი იმის შესახებ, რომ ასეთი შემთხვევითი სიდიდეების სხვაობის დისპერსია უდრის იგივე ამ შემთხვევით სიდიდეთა დისპრსიების ჯამს:

$$D(\mathrm{X}-Y) = D(\mathrm{X}) + D(Y) \qquad (10.14)$$

დამტკიცება ადვილია თუ $\mathrm{X}-Y$ გამოსახულებას წარმოვადგენთ $\mathrm{X}+(-1)Y$ გამოსახულების სახით. გვექნება:

$$D(\mathrm{X}-Y) = D(\mathrm{X}) + D(-1)Y;$$

თუ გამოვიყენებთ მე-2 თვისებას და -1-ს, როგორც მუდმივ თანამამრავლს გამოვიტანთ დისპერსიის გარეთ კვადრატში აყვანილს, გვექნება:

$$D(\mathrm{X}-Y) = D(\mathrm{X}) + (-1)^2 DY = D(\mathrm{X}) + D(Y)^1.$$

---

[1]მათემატიკურ სტატისტიკაში შედარებით რთული ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტების გამოყენებით მტკიცდება, აგრეთვე, თეორემები უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიების გაანგარიშების შესახებ. ჩვენ საშუალო არითმეტიკულის გაანგარიშება ინტერვალური ვარიაციული მწკრივებისათვის ვაჩვენეთ უწყვეტი ვარიაციული მწკრივების წყვეტილი ანუ დისკრეტიულ ვარიაციულ მწკრივებზე დაყვანის გზით. მსგავსი უმარტივესი მეთოდებით ეკონომიკაში ყოველთვის შეიძლება ავიცილოთ თავიდან რთული მათემატიკური გაანგარიშებანი, რის გამო არასაჭიროების გამო აქ არ მოგვაქვს რთული მათემატიკური გაამგარიშებანი.

როგორია შერჩევითი და გენერალური ერთობლიობის მახასიათებლების (საშუალო არითმეტიკული, წილობრივი ხვედრითი წილი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა) ურთიერთრაოდნობრივი თანაფარდობანი? შეგვიძლია თუ არა შერჩევითი მახასიათებლები გავავრცელოთ გენერალურზე ან კიდევ პირიქით, შესაბამის სტატისტიკურ ფორმულებში გენერალური მახასიათებლები შევცვალოთ შერჩევითი მახასიათებლებით? ამის უფლებას იძლევა მათემატიკურ სტატისტიკაში დამტკიცებული თეორემები იმის შესახებ, რომ ‘‘....საკუთრივ-შემთხვევითი შერჩევის შერჩევითი საშუალო ($\overline{X}$) წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მათემატიკური ლოდინია გენერალური საშუალო $\overline{X}_0$, ხოლო დისპერსია უდრის $\frac{\sigma_0^2}{n}$, სადაც σ_0^2 –გენერალური დისპერსიაა da n შერჩევის მოცულობა’’[1], ‘‘.... განუმეორებელი შერჩევის საშუალოს მათემატიკური ლოდინი ასევე გენერალური საშუალოს ტოლია‘‘[2], ხოლო ‘‘განუმეორებელი შერჩევის საკუთრივ-შემთხვევითი შერჩერვითი საშუალოს დისპერსია

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \text{ უდრის } \frac{\sigma_0^2}{n}\frac{N-n}{N-1} \qquad (10.15),$$

სადაც σ_0^2 –გენერალური დისპერსიაა;

N –გენერალური ერთობლიობის მოცულობა;

n –შერჩევის რიცხვი’’[3].

(10.15) ფორმულის გამარტივება შეიძლება თუ გავითვალისწინებთ, რომ დაკვირვების დიდი რიცხვის პირობებში ფორმულის მნიშვნელში N –ის შემცირება 1-ით შეიძლება უგულვებელვყოთ და ფორმულა მიიღებს სახეს:

[1]À. È. Êàðàñåâ, Îñíîâû ìàòåìàòè÷åñêîé ñòàòèñòèêè, Ðîñâóçèçäàò, 1962, გვ. 174
[2]იქვე, გვ.189
[3]იქვე, გვ.189

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right) \qquad (10.16).$$

მათემატიკურ სტატისტიკაში თანაფარდობას შერჩევით და გენერალურ დისპერსიათა შორის ასეთი თეორემით გამოსახავენ: ,,საკუთრივ შემთხვევითი განმეორებითი შერჩევის შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი ნიშნის საშუალო მნიშვნელობის განსაზღვრისას უდრის $\frac{n-1}{n}\sigma_0^2$, ხოლო ხვედრითი წილის პოვნის შემთხვევაში $\frac{n-1}{n}pq,$, სადაც n შერჩევის მოცულობაა, σ_0^2-გენერალური დისპერსია, $p-$ გენერალური ხვედრითი წილი და $q=1-p$ ‘‘[1]

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა: შერჩევითი დისპერსია $\sigma^2=\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{n}$ ჯერ წარმოვადგინოთ გაშლილი ფორმით:

$$\sigma^2=\frac{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\ldots\ldots+\left(X_n-\overline{X}\right)^2}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\ldots\ldots\left(X_n-\overline{X}\right)^2\right] \qquad (10.17).$$

საჭიროა ვიპოვოთ ამ გამოსახულების მათემატიკური ლოდინი. ამისათვის ჯერ რომელიმე შესაკრების, ვთქვათ პირველის მათემატიკური ლოდინი ვიპოვოთ და რადგან ასეთი შესაკრები სულ n რაოდენობისაა, ამიტომ მთლიანად დისპერსიის მათემატკური ლოდინი იქნება:

$$E\left(\sigma^2\right)=\frac{1}{n}\times nE\left(X_1-\overline{X}\right)^2 \qquad (10.18).$$

361

[1]À. È. Êàðàñåâ, îñíîâû ìàòåìàòè÷åñêîé ñòàòèñòèêè,
Ðîñâóçèçäàò, 1962, ȣȝ.198-199.

 362

$$E\left(X_1-\bar{X}\right)^2 = E\left[X_1^2 - 2X_1\bar{X} + \left(\bar{X}\right)^2\right] \qquad (10.19).$$

ვინაიდან $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n}{n}$, ამიტომ (10.19) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$E\left(X_1-\bar{X}\right)^2 = E\left[X_1^2 - \frac{2}{n}X_1^2 - \frac{2}{n}\left(X_1X_2 + X_1X_3 + \ldots + X_1X_n\right) + \left(\bar{X}\right)^2\right]$$

(10.20).

ვინაიდან შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მათემატიკური ლოდინი შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია, გვექნება:

$$E\left(X_1-\bar{X}\right)^2 = E\left(X_1\right)^2 - \frac{2}{n}E\left(X_1\right)^2 - \frac{2}{n}E\left(X_1X_2 + X_1X_3 + \ldots + X_1X_n\right) + E\left(\bar{X}\right)^2$$

(10.21)

განვიხილოთ (10.21) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წევრ-წევრად. დისპერსიების მე-3 თეორემის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$E\left(X_1\right)^2 = D\left(X_1\right) + E^2\left(X_1\right) = \sigma_0^2 + \left(\bar{X}_0\right)^2;$$

$$E\left(\bar{X}^2\right) = D\left(\bar{X}\right) + E^2\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma_0^2}{n} + \left(\bar{X}_0\right)^2.$$

(ვინაიდან შერჩევითი საშუალოს დისპერსია განმეორებითი შერჩევისას $\dfrac{\sigma_0^2}{n}$–ის, ხოლო X_1 - ის მათემატიკური ლოდინი

[1]აქვე შევნიშნავთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ამ შემთხვევაში შერჩევის ჩატარებისას თავისთავად ცალკეული ცდის დროს დადგენილი საშუალოებია, რომელთა დისპერსია, როგორც მათემატიკურ სტატისტიკაშია დამტკიცებული n-ჯერ ნაკლებია გენერალურ დისპერსიაზე, ხოლო მათემატიკური ლოდინი გენერალური საშუალოა $\left(\bar{x}_0\right)$ (ამის ნათელი

 363

დადასტურება იქნება შემდგომში მოტანილი პრაქტიკული მაგალითი).

364

გენერალური საშუალოს $\left(\overline{X}_0\right)$ ტოლია)[1].

მათემატიკური ლოდინის მე-5 თვისების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\mathrm{E}\left(X_1 X_i\right)=\mathrm{E}\left(X_1\right)\times\mathrm{E}\left(X_i\right)=\overline{X}_0\times\overline{X}_0=\left(\overline{X_0}\right)^2.$$

ეს მაჩვენებელი (10.21) ტოლობის მარჯვენა მხარეს ჯამის სახით ($n-1$) ჯერ მეორდება. ამიტომ (12.21) ტოლობა შეჯვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\mathrm{E}\left(X_1-\overline{X}\right)^2=\sigma_0^2+\left(\overline{X}_0\right)^2-\frac{2}{n}\left[\sigma_0^2+\left(\overline{X}_0\right)^2\right]-\frac{2(n-1)}{n}\left(\overline{X}_0\right)^2+\frac{\sigma_0^2}{n}+\left(\overline{X}_0\right)^2, \tag{10.22}$$

$$\mathrm{E}\left(X_1-\overline{X}\right)^2=\frac{n-1}{n}\sigma_0^2 \qquad (10.23).$$

თუ მიღებულ $\frac{n-1}{n}\sigma_0^2$ მნიშვნელობას ჩავსვავთ (10.18) ტოლობაში, გვექნება:

$$\mathrm{E}\left(\sigma^2\right)=\frac{1}{n}\times n\,\frac{n-1}{n}\sigma_0^2=\frac{n-1}{n}\sigma_0^2 \qquad (10.24).$$

ამის მსგავსად მტკიცდება, რომ შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი განუმეორებელი საკუთრივ-შემთხვევითი შერჩევისათვის გამოისახება შემდეგი თანაფარდობით:

$$\mathrm{E}\left(\sigma^2\right)=\frac{n-1}{n}\times\frac{N}{N-1}\sigma_0^2 \qquad (10.25).$$

შერჩევის საკმარისი, მით უმეტეს დიდი რიცხვის პირობებში (10.24) და (10.25) ფორმულებში კოეფიციენტები $\frac{n-1}{n}$ და $\frac{N}{N-1}$ ძალიან მცირედით განსხვავდებიან ერთისაგან. ამიტომ მათი გავლენა შეიძლება უგულებელვყოთ

და ვთქვათ, რომ შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი როგორც განმეორებითი ისე განუმეორებელი საკუთრივ-შემთხვევითი შერჩევისათვის არის გენერალური დისპერსია.

გენერალურ და შერჩევით დისპერსიებს შორის (10.24) და (10.25) ფორმულებით ნაჩვენები თანაფარდობანი უფრო მარტივად დისპერსიების შეკრების კანონით ძალითაც შეიძლება ვაჩვენოთ. ამ შემთხვევაში გენერალური დისპერსია, რომელიც ინდივიდუალურ მნიშვნელობებსა და გენერალურ საშუალოს შორის გადახრებს ($X-\overline{X}_0$) ზომავს, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორი დისპერსიის ჯამის სახით. აქედან ერთი დისპერსია ზომავს ცალკეული ინდივიდუალური მნიშვნელობების გადახრებს შერჩევითი საშუალოსაგან ($X-\tilde{X}$), ხოლო მეორე-შერჩევითი საშუალოს გადახრებს გენერალური საშუალოსაგან $\left(\tilde{X}-\overline{X}_0\right)$.

მათემატიკური ლოდინის სახით ეს ჯამი ასე წარმოგვიდგება:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}-\overline{\mathrm{X}}_0\right)^2=\mathrm{E}\left(\mathrm{X}-\tilde{\mathrm{X}}\right)^2+\mathrm{E}\left(\tilde{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{X}}_0\right)^2$$

$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}-\overline{\mathrm{X}}_0\right)^2-$ გენერალური დისპერსიაა $\left(\sigma_0^2\right)$,

$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}-\tilde{\mathrm{X}}\right)^2$ $-$ შერჩევითი დისპერსია σ^2,

$\mathrm{E}\left(\tilde{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{X}}_0\right)$ $-$ შერჩევითი საშუალოს დისპერსია, რომელიც n -ჯერ ნაკლებია გენერალურ დისპერსიაზე (σ_0^2).

გვექნება:

$$\sigma_0^2=\sigma^2+\frac{\sigma_0^2}{n},$$

აქედან

$$\sigma^2=\sigma_0^2-\frac{\sigma_0^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma_0^2. \qquad (10.26)$$

366

რაც გვინდოდა დაგვემტკიცებინა.

დაკვირვების დიდი რიცხვის პირობებში კოეფიციენტი $\frac{n-1}{n}$ 1 -ს, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

შერჩევითი და გენერალური მახასიათებლების ურთიერთშედარებისათვის მოვიტანოთ პირობითი კონკრეტული მაგალითი.

სიმარტივისათვის მოვიტანოთ მონაცემები ფირმის ოთხი მუშის თვიური ხელფასის შესახებ.

შერჩევითი და გენერალური მახასიათებლების საანგარიშო მონაცემები

ცხრილი №56

მუშების ნომრ-ები	თვი-ური ხელ-ფასი (ლარი)	შერჩეულ ერთეულ-თა ნომრები	შერჩევითი საშუალო (ლარი) $\tilde{x}_i$	შერჩეულ ერთეულ-თა ნომრები	შერჩევითი საშუალო (ლარი) i	შერჩეულ ერთეულ-თა ნომრები	შერჩევითი საშუალო (ლარი) i	შერჩეულ ერთეულ-თა ნომრები	შერჩევითი საშუალო $\tilde{x}_i$
1	80	1და1	80	2და1	90	3და1	90	4და 1	100
2	100	1და2	90	2და2	100	3და2	100	4და2	110
3	100	1და3	90	2და3	100	3და3	100	4და3	110
4	120	1და4	100	2და4	110	3და4	110	4და4	120

გენერალური ერთობლიობიდან (ფირმის მუშები), რომელთა რიცხვი შეადგენს 4-ს, $N=4$) განმეორებითი საკუთრივ-შერჩევითი წესით თითოეულ ცდაზე ამოიღება ორი მუშის ნომერი, $n=2$). შერჩეულ ერთეულთა ნომრები ასახავს ყოველგვარ ვარიანტს, რომელიც კი შესაძლებელია გვქონდეს შემთხვევითი შერჩევის პირობებში. თითოეული ცდის ანუ ამოღებული ვარიანტის ნომრების ხელფასების საფუძველზე დგინდება საშუალო ხელფასი, რომელსაც ეწოდება შერჩევითი საშუალო. მაგალითად, 1 და1 ნომრებით საშუალო ხელფასა იქნება $\frac{80+80}{2}=$ 80 ლარი, 1 ლარი და ა.შ.

367

და 4 –

$$\frac{80+120}{2} = 100$$

368

გენერალური საშუალო ანუ საშუალო თვიური ხელფასი გენერალურ ერთობლიობაში შეადგენს:

$$\overline{X}_0 = \frac{\sum X}{N} = \frac{80+100+100+120}{4} = 100 \quad \text{ლარს;}$$

გენერალური დისპერსია:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum\left(X-\overline{X}_0\right)^2}{N} = \frac{(80-100)^2+(100-100)^2}{4}$$

$$+\frac{(100-100)^2+(120-100)}{4} = 200 \quad \text{ლარი.}$$

შევადგინოთ შერჩევითი საშუალოს განაწილების ცხრილი.

ცხრილი №57

i	საშუალო ხელფასი შერჩევით ერთეულებში (ლარი) $\tilde{X}i$	შერჩევითი საშუალოს გადახრა გენერალური საშუალოდან $\left(\tilde{X}_i - \overline{X}_0\right)$	$\left(\tilde{X}_i - X_0\right)^2$	შერჩევითი საშუალოს სიხშირე f_i	შერჩევითი საშუალოს ალბათობა A_i
1	2	3	3	4	5
1	80	-20	400	1	0,0625
2	90	-10	100	4	0,2500
3	100	0	0	6	0,3750
4	110	+10	100	4	0,2500
5	120	+20	400	1	0,0625
სულ:			1000	16	1.000

როგორც ცხრილიდან ჩანს, შერჩევითი საშუალოს ყველაზე დიდი გადახრის (აბსოლუტური მნიშვნელობით, 20 ლარი.) დადგომის ალბათობა ყველაზე მცირეა, ხოლო ნულოვანი გადახრა ყველაზე დიდი ალბათობით გამოირჩევა. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს რაღაცა ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფვის ეს გადახრები. შერჩევითი სასუალოს მათემატიკური ლოდინი:

$$E(\tilde{X}) = (80\times 0.0625)+(90\times 0.2500)+(100\times 0.3750)+$$

$$+(110\times 0.2500)+(120\times 0.625) = 100 \quad \text{ლარი.}$$

ემთხვევა გენერალურ საშუალოს $\left(\overline{X}_0\right)$, რაც ერთხელ კიდევ

ადასტურებს იმას, რომ შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური ლოდინი გენეალური საშუალოა. 57-ე ცხრილის მონაცემებით გავიანგარიოშოთ შერჩევითი საშუალოს $\left(\tilde{X}\right)$ დისპერსია ანუ გენერალური საშუალოდან გადახრების კვადრატების მათემატიკური ლოდინი (საშუალო არითმეტიკული). გვექნება:

$$E\left(\tilde{X}-\overline{X}0\right)^2 = E\left[\left(\tilde{X}_1-\overline{X}0\right)^2+\left(.\tilde{X}_2-\overline{X}0\right)^2+........+\left(\tilde{X}_n-\underline{X}0\right)^2\right]=$$

$$=E\left(\tilde{X}_1-\overline{X}0^2\right)+E\left(\tilde{X}_2-\overline{X}0\right)^2.....+E\left(\tilde{X}_n-\underline{X}0\right)^2=$$

$$\left(\tilde{X}_1-\overline{X}0\right)^2 A_1+\left(\tilde{X}_2-\overline{X}0\right)^2 A_2+.........+\left(X_n-\overline{X}0\right)^2 A_n=$$

$$=400\times 0{,}0625+100\times o{,}2500+0+100\times 0{,}2500+$$

$$+400\times 0{,}0625=25+25+0+25+25=100$$

მაშასადამე, შერჩევითი საშუალოს დისპერსია შეადგენს 100 ლარს, რაც 2-ჯერ ანუ n-ჯერ (შერჩევითი დაკვირვების რიცხვი) ნაკლებია გენერალურ დისპერსიაზე (200 ლარი). ეს კიდევ ერთხელ ადასტურებს თეორემას იმას შესახებ, რომ შერჩევითი საშუალოს $\left(\tilde{X}\right)$ დისპერსია n-ჯერ ნაკლებია გენერალურ დისპერსიაზე.

თუ შერჩევითი საშუალოს დისპერსიიდან ამოვიღებთ კვადრატულ ფესვს მივიღებთ საშუალო კვადრატულ გადახრას, რომელსაც სტატისტიკაში შერჩევის საშუალო შეცდომას უწოდებენ და აღინიშნება μ (მიუ) სიმბოლოთი.

მაშასადამე შერჩევის საშუალო შეცდომა (μ) **ეწოდება შერჩევითი საშუალოს გენერალური საშუალოსაგან საშუალო კვადრატულ გადახრას** და გამოითვლე-ბა ფორმულით:

$$\mu=\sqrt{E\left(\tilde{X}-\overline{X}_0\right)^2}=\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \qquad (10.27)$$

როგორც წინა მასალაში ვაჩვენეთ შერჩევითი დისპერსიის (σ^2) მათემატილური ლოდინი განერალური დისპერსიაა $\left(\sigma_0^2\right)$.

370

ვინაიდან ჩვენთვის წინასწარ უცნობია გენერალური დისპერსია, ამიტომ გაანგარიშებებში ის ყველგან შეცვლილია შერჩევითი

371

დისპერსიით. მაშასადამე საბოლოოდ **შერჩევის საშუალო** შეცდომა მიიღებს სახეს:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \tag{10.28}$$

4. შერჩევითი დაკვირვების თეორიულ–მეთოდოლოგიური საფუძვლები

შერჩევითი დაკვირვება როგორც ზემოთ დავინახეთ გულისხმობს მთლიანი ერთობლიობიდან (გენერალური ერთობლიობა) გარკვეული ნაწილის (შერჩევითი ერთობლიობა) შერჩევას და ამ უკანასკნელის შესწავლის შედეგად მიღებული მახასიათებლების მთლიან ერთობლიობაზე გავრცელებას. აქ ისმის ბუნებრივი კითხვა. რამდენად ვართ ჩვენ უფლებამოსილნი გარკვეული ნაწილის მიხედვით ვიმსჯელოთ მთლიან ერთობლიობაზე? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მეცნიერების **თეორიული** (ეკონომიკური თეორია, მათემატიკური სტატისტიკა და სხვა) და **მეთოდოლოგიური** (ფილოსოფია, კერძოდ დიალექტიკა) საფუძვლები. **ეკონომიკური თეორია** სტატისტიკას აძლევს საზოგადოებრივ-ეკონომიკური მოვლენებისა პროცესების ცნებებს, განმარტებებს, ფუნდამენტალურ მასალას თეორიული მხარეების შესახებ. სტატისტიკა იყენებს მას საერთოდ და კერძოდ შერჩევითი დაკვირვების შემთხვევაშიაც. ამ საფუძველზე სტატისტიკა არკვევს ხომ არ იცვლება შერჩევითი დაკვირვების გამოყენებისას შესასწავლი ერთობლიობის თვისებრიობა და შემდეგ ავრცელებს შესწავლის შედეგბს გენერალურ ერთობლიობაზე.

372

იგივე ფილოსოფიური მეცნიერება გვასწავლის, ხომ არაა დაპირისპირებულნი ერთმანეთთან შერჩეული ერთობლიობის მახასიათებლები (როგორც შემთხვევითობანი) გენერალური ერთობლიობის შესაბამის მაჩვენებლებთან (როგორც აუცილებლობასთან). აქ ფილოსოფიის მიხედვით დამტკიცებულია, რომ შემთხვევითობა და აუცილებლობა

373

ურთიერთდაპირისპირებულნი კი არ არიან, არამედ იმყოფებიან დიალექტიკურ კავშირურთიერთობაში. ის რაც მტკიცდება აუცილებლობად, მიუთითებდა ფ. ენგელსი,- შედგება წმინდა შემთხვევითობებისაგან და ის რაც ითვლება შემთხვევითობად, წარმოადგენს ფორმას, რომელშიაც იმალება აუცილებლობა.

შერჩევითი მეთოდის გამოყენებას საფუძვლად უდევს, აგრეთვე დიდ რიცხვთა კანონის თეორიულ-მათემატიკური აპარატი. დიდ რიცხვთა კანონის ეკონომიკური შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ დაკვირვების მცირე რიცხვი ზოგჯერ არ იძლევა ეკონომიკურ-სტატისტიკური კანონზომიერებების გამოვლენის საშუალებას. ამიტომ დიდ რიცხვთა კანონი იმაზე მიანიშნებს, რომ საჭიროა შერჩევითი ერთობლიობის საკმარისი რიცხვის აღება. რაც უფრო დიდია ეს რიცხვი მით უფრო უახლოვდება შერჩეული ერთობლიობის მახასიათებლები გენერალური ერთობლიობის მახასიათებლებს და ნაკლებია დაშვებული შეცდომის სიდიდე. მსოფლიო სტატისტიკურ მეცნიერებას გააჩნია მათემატიკოსებისა და ეკონომისტ—სტატისტიკოსების ღირსეული წარმომა-დგენლები, რომელთა მეცნიერული, თეორიულ ნაშრომები საფიძვლად უდევს სოციალურ-ეკონომიკურ გამოკვლევებში შერჩევითი მეთოდის გამოყენებას. მათ შორისაა **ი. ბერნულის, პ. ჩებიშევის, ა. ლიაპუნივის,ა. მარკოვის, ს. პუასონის, პ. ლაპლასის, ა. ჩუპროვის, ე. ნეიმანის და სხვათა შრომები.**

ი. ბერნულის (1654-1705) თეორემა დიდ რიცხვთა კანონის შესახებ, გამოქვეყნდა 1713 წელს, რომელმაც საფუძველი ჩაუყარა ეკონომიკურ გამოკვლევებში დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენებას.

ი. ბერნულმა დაამტკიცა, რომ ერთთან ძალზე ახლომდგომი ალბათობისათვის (A), შესასწავლი ნიშნის ხვედრითი წილი შერჩევით ერთობლიობაში (w), შერჩევის საკმარისად დიდი რიცხვის პირობებში, ძალზედ მცირედით განსხვავდება იმავე ნიშნის გენერალურ ერთობლიობაში ხვედრითი წილისაგან (p) . მათემატიკრად ეს ასე ჩაიწერება:

$$A\left[\left|w-p\right|\le t\mu\right]\to 1 \qquad (10.29),$$
$$n\to\infty$$

სადაც, t- სტიუდენტის კრიტერიუმი ანუ ნდობის ინტერვალია;

μ-შერჩევის საშუალო შეცდომა.

შერჩევითი დაკვირვების თეორიასა და პრაქტიკაში ძალიან ფართოდ გამოიყენება სტიუდენტის კრიტერიუმი ანუ ნდობის ინტერვალი t. ამ მაჩვენებელს სტატისტიკაში ჩვეულებრივად ნორმირებულ გადახრას უწოდებენ და გაიანგარიაშება ფორმულით: $t=\dfrac{\mathrm{X}-\overline{\mathrm{X}}}{\sigma}$ (სადაც X-ვარიანტის მნიშვნელობაა ვარიაციულ მწკრივში, $\overline{\mathrm{X}}$-საშუალო არითმეტიკული, σ - საშუალო კვადრატული გადახრა). 1908 წელს ინგლისელმა მათემატიკოსმა **ვ. გოსეტმა** (რომელიც შრომებს აქვეყნებდა სტიუდენტის ფსევდონიმით) გახსნა მცირე შერჩევისათვის (როცა $n<30$) ნორმირებული გადახრისა და მისი შესაბამისი ალბათობებისათვის განაწილების კანონი. . ნორმირებული გადახრა (t) ამ შემთხვევაში სტიუდენტმა გაიანგარიშა ფორმულით: $t=\dfrac{\tilde{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{X}}_0}{\mu}$ (სადაც $\tilde{\mathrm{X}}$ - შერჩევითი საშუალო, $\overline{\mathrm{X}}_0$-გენერალური საშუალო, μ შერჩევის საშუალო შეცდომა). ამიტომ შერჩევის თეორიაში t-ს უწოდებენ სტიუდენტის კრიტერიუმს, $t\mu$-ს კი – საზღვრით შეცდომას და გარკვეული ალბათობით გვიჩვენებს რა საზღვრებში იმოძრავებს შერჩევის საშუალო შეცდომა μ.

მაგალითი: ვთქვათ ფირმის მიერ გამოშვებული კვების შესაბემისი სახის პროდუქციის ხარისხის შემოწმებისას აღმოჩნდა, რომ 150 ერთეულიდან წუნდებულია 54,9%. საჭიროა 0,954 ალბათობით განისაზღვროს საზღვრითი შეცდომა $t\mu=\Delta$ (დელტა). ამოცანის მონაცემებიდან ჩანს,

370

რომ $w = 0.549$, $p = 1 - W = 1 - 0,549$. შერჩევის რიცხვი $n = 150$ ერთეულს. სტიუდენტის კრიტერიუმი მოცემული ალბათობისათვის $(0,954)$ შეადგენს 2-ს (იხ. დანართი 2).

საზღვრითი შეცდომა შეადგენს:

$$\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2\sqrt{\frac{0,549(1-0,549)}{150}} = 2 \times 0,0406 = 0,0812 \text{ ე.ი. } 8,1\%.$$

მაშასადამე, 0,954 ალბათობით შეიძლება ვამტკიცოთ,რომ ფირმაში კვების პროდუქტების მოცემული სახეობის მიხედვით წუნის საზღვრითი შეცდომა არ გადააჭარბებს 8,1 %-ს.

შეიძლება ამოვხსნათ შებრუნებული ამოცანა:

მოცემულია შერჩევის საზღვრითი შეცდომა და გვინდა გავიგოთ რა ალბათობით იქნება ასეთი შეცდომა გარანტირებული. ამისათვის ჯერ უნდა გავიგოთ t-ს მნიშვნელობა $\left(t = \frac{\Delta}{\mu}\right)$. ჩვენს მაგალითზე $t = \frac{0,0812}{0,0406} = 2$ და შემდეგ იგივე ცხრილით $t = 2,0$ მნიშვნელობისათვის ვიპოვით $0,9545$ ლბათობას. დიდ რიცხვთა კანონის შემდგომ დამუშავებასა და გამოყენებაში დიდი წვლილი შეიტანეს რუსმა მათემატიკოსებმა **პ.ლ. ჩებიშევმა და ა.მ. ლიაპუნოვმა, აგრეთვე სტატისტიკოსებმა ა.ა. ჩუპროვმა, ა.გ. კოვალენსკიმ, ა.ი. ბოიარსკიმ და ბ.ს. იასტრემსკიმ.**

ა. ლ. ჩებიშევის თეორემა შერჩევითი მეთოდის მიმართ ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: **ერთთან ძალზედ ახლომდგომი ალბათობით,** შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ საკმარისად დიდი მოცულობის შერჩევის, აგრეთვე გენერალური ერთობლიობის შეზღუდული დისპერსიის პირობებში, განსხვავება შერჩევითი და გენერალური ერთობლიობის საშუალოთა შორის ძალიან მცირეა. მათემატიკურად ეს თეორემა ასე ჩაიწერება:

$$\mathrm{A}\left[\left(\tilde{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{X}}_0\right) \le \Delta\right] \to 1, n \to \infty \qquad (10.30),$$

სადაც, A – ალბათობა;

$\tilde{\mathrm{X}}$ – შერჩევითი ერთობლიობის საშუალო;

$\overline{X}_0$ – გენერალური საშუალო;

n – შერჩევის რიცხვი.

ა. მ. ლიაპუნოვმა დაამტკიცა,რომ გენერალური ერთობლიობის ნებისმიერი განაწილების პირობებშიაც კი შერჩევის მოცულობის გადიდების შესაბამისად შერჩევითი საშუალოსა ($\tilde{X}$) და მასთან დაკავშირებული საზღვრითი შეცდომის (Δ) დადგომის ალბათობათა განაწილება ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს. ეს განაწილება როგორც t–ფუნქცია აღიწერება **პ. ლაპლასის (1749–1827) ალბათობათა ინტეგრალის დახმარებით:**

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (10.31).$$

პ. ლაპლასის ალბათობათა ინტეგრალის მნიშვნელობანი t–ს შესაბამისად გაანგარიშებული და მოტანილია სპეციალურ ცხრილებში (იხ. დანართი 2).

$F(t)$ ფუნქციის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ სტატისტიკაში უწოდებენ **განაწილების სიმკვრივეს ნუ სიმჭიდროვეს,** რომელიც წარმოადგენს t ს მნიშვნელობათა შესაბამისად შერჩევითი საშუალოს ($\tilde{X}$) და მასთან დაკავშირებული საზღვრითი შეცდომის ალბათობათა განაწილების განსაზღვრის საფუძველს. მას გამოსახავენ შემდეგი სახის განტოლებით:

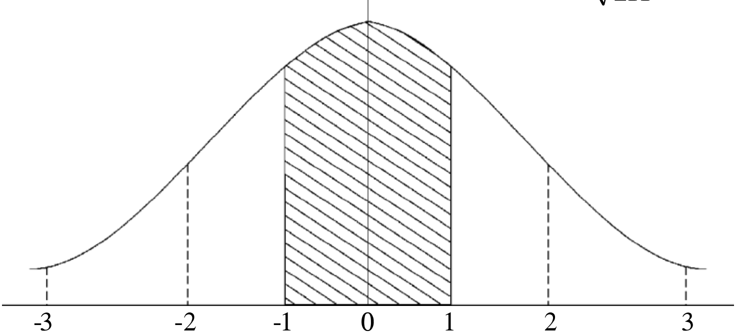
$$\varphi(t) = \mathrm{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \ell^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (10.32).$$

ამ ფუნქციის ალბათობანიც t-მნიშვნელობათა შესაბამისად გაანგარიშებული და მოცემულია სპეციალურ ცხრილებში (იხ. ანართი 1)

372

$\varphi(t)$ ფუნქციის მიხედვით ავაგოთ ნირმალური განაწილების მრუდის გრაფიკი (ნახ. 27) და ვაჩვენოთ ნახაზზე შერჩევითი საშუალოს ($\tilde{X}$) გენერალური საშუალოდან ($\overline{X}_0$) t – ჯერადი გადახრის ალბათობანი.

$$\varphi(t) = A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



ნახ. 27. ნორმალური განაწილების მრუდი

მთლიანი ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ნორმალური განაწილების მრუდსა და აბსისთა ღერძს შორის შეესაბამება გენერალური საშუალოდან $\left(\overline{X}_0\right)$ შერჩევითი საშუალოს $\left(\tilde{X}\right)$ ყველა შესაძლო გადახრის ალბათობათა ჯამს (ალბათობათა ჯამი, როგორც 54-ე ცხრილიდან კარგად ჩანს, ერთს უდრის). გენერალური საშუალოდან შერჩევითი საშუალოს გადახრა ანალიტიკურად ასე გამოისახება:

$$\overline{X}_0 - \tilde{X} = \pm\Delta = \pm t\sigma \cdot$$

სპეციალური ცხრილდან (იხ. დანართი 2) ჩანს, რომ როცა $t = 1$, შესაბამისი ალბათობა შეადგენს 0,683 –ს, როცა $t = 2$–ს – 0,954, ხოლო როცა $t = 3$ – 0,997-ს.

პირველ შემთხვევაში 68,3%-ით შეიძლება გარანტია ვიქონიოთ იმისა, რომ გენერალური საშუალოდან შერჩევითი საშუალოს გადახრა არ გადააჭარბებს ერთჯერად შერჩევის

საშუალო შეცდომას $(\Delta = t\sigma = t\mu)$. ნახაზზე -1-დან $+1$-მდე დაშტრიხული ფართობიც შეესაბამება 0,683 ალბათობას. ამავე ალბათობით შეიძლება ვივარაუდოთ რომ გენერალური საშუალო ($\overline{X}_0$) იმოძრავებს საზღვრებში $\overline{X}_0 = \tilde{X} \pm \sigma$, ანუ $(\tilde{X} - \sigma)$ დან $(\tilde{X} + \sigma)$ მდე, რაც იგივეა:

$$\tilde{X} - \sigma \leq \overline{X}_0 \leq \tilde{X} + \sigma \qquad (10.33).$$

ასევე შეიძლება ითქვას, რომ მეორე შემთხვევაში 0,954 ალბათობით ($t = 2$) გენერალური საშუალოდან შერჩევითი საშუალოს გადახრა არ გაცილდება ორჯერადი, ხოლო მესამე შემთხვევაში 0,997 ალბათობით ($t = 3$) $-$სამჯერადი შერჩევითი საშუალო შეცდომის ფარგლებს (რაც კარგად ჩანს 27-ე ნახაზიდან). ი.ბერნულის თეორემა გამოიყენება იმ შემთხვევებისათვის, როცა შერჩევითი პარტიების შესასწავლი ნიშნის ხვედრითი წილი არ იცვლება. მაგალითად, ფირმაში წუნდებული პროდუქციის ხვედრითი წილის გამოსავლენად ჩატარდა 10 ცდა (თითოეული ცდის დროს შესწავლას დაექვემდებარა პროდუქციის 50 ერთეული $-n = 50$) და ათივე ცდისას არასტანდარტული თვისებების მქონე პროდუქციის ხვედრითი წილი $w = 0{,}2$ ანუ 20% შეადგენს. მაშინ ასეთი შემთხვევებისათვის ი. ბერნულის თეორემა იძლევა დაკვირვების თორიულ საფუძვლებს. მაგრამ ასეთი შემთხვევა უფრო იშვიათია, ვიდრე ცდების მიხედვით შესასწავლი ნიშნის ცვალებადობა.

სოციალურ-ეკონომიკურ მოვლენებსა და პროცესებში ასეთი პირობებისათვის შერჩევითი დაკვირვების ჩასატარებლად ფრანგმა მათემატიკოსმა, **ს. პუასონმა** შეიმუშავა დიდ რიცხვთა კანონის შესაბამისი თეორემა, რომელიც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$\left\lceil (w - p) \leq t\sigma = t\sqrt{\frac{\overline{pq}}{n}} \right\rceil \to 1, n \to \infty \qquad (10.34).$$

სადაც $\overline{pq}$ – ალტერნატიული ნიშნის საშუალო დისპერსიაა.

5. საკუთრივ - შემთხვევითი შერჩევა

შერჩევითი დაკვირვების სახეობებისა და წესების მიხედვით განსხვავებულია დაშვებული შეცდომების რაოდენიბრივი მახასიათებლები. ამიტომ აუცილებელია ისინი განვიხილოთ ცალ-ცალკე და ვაჩვენოთ თითოეულის მიხედვით დაშვებული შეცდომები და მათი გაანგარიშების მეთოდოლოგია.

საკუთრივ–შემთხვევითი შერჩევა შერჩევითი დაკვირვებიდან ყველაზე ადრე დამუშავებული და კარგად აპრობირებული წესია, რომელიც როგორც ზემოთ დავინახეთ, გულისხმობს წინასწარ რაიმე ნიშნის დაულაგებელი ერთობლიობიდან სრულიად შემთხვევით გარკვეული წილის ამოღებას და მისი ჩვენთვის საინტერესო ნიშნით შესწავლის შედეგების გენერალურ ერთობლიობაზე გავრცელებას.

იმისათვის, რომ შერჩევითი ერთობლიობა იყოს რეპრეზენტანტული და თამამად შეგვეძლოს მისი შესწავლის შედეგების გენერალურ ერთობლიობაზე გავრცელება საჭიროა შესრულდეს ორი ძირითადი პირობა: ა) გენერალური ერთობლიობის ყველა ერთეულს ჰქონდეს შერჩევაში მოხვედრის თანაბარი შანსი ანუ ალბათობა; ბ) შერჩევა ანუ გენერალური ერთობლიობიდან ერთეულების შესასწავლად ამოღება განხორციელდეს სრულიად შემთხვევით. ამ უკანასკნელს აღწევენ ორი მეთოდის გამოყენებით. პირველის დროს გენერალური ერთობლიობის ერთეულებს ნომრავენ, თითოეულ ნომერს ჩაიწერენ ბარათებზე, კარგად აურევენ და აქედან სრულიად შემთხვევითი წესით ამოღებული ბარათების ნომრების შესაბამისი ერთეულები შეისწავლება ჩვენთვის საინტერესო ნიშნით. ასე ხდება როგორც **განმეოებითი** ისე **განუმეორებელი** შერჩევითი დაკვირვების ჩატარება.

განუმეორებელი შერჩევის დროს შერჩევის საშუალო შეცდომა ნაკლებია, ვიდრე განუმეორებელი შერჩევისას. ეს თავისთავად ცხადია, ვინაიდან თუ თავიდან ამოღებული რომელიმე ბარათის ნომრის შესაბამისი გენერალური ერთობლიობის ერთეული არაა სწორი, რეპრეზენტანტული წარმომადგენელი, მაშინ ის შესწავლის შემდეგ უკან დაბრუნებული შეიძლება განმეორებით მოხვდეს შერჩევაში და ამით ერთხელ დაშვებული შეცდომა კიდევ უფრო გადიდდება. ამიტომაა, რომ შერჩევითი საშუალოს დისპერსიისა და აქედან საშუალო კვადრატული გადახრის, ანუ შერჩევის საშუალო შეცდომის გასანგაარიშებელ ფორმულაში განუმეორებელი შერჩევისათვის შემოღებულია კოეფიციენტი $\left(1-\frac{n}{N}\right)$, რომელიც ამცირებს განმეორებითი შერჩევის შესაბამის მაჩვენებელს.

არსებობს, აგრეთვე, გენერალური ერთობლობიდან შერჩევითი ერთეულების შემთხვევითი წესით ამოღების მეორე, **მ. კადიროვის** წესი. ეს წესი ეყრდნობა სპეციალური ცხრილების გამოყენებას. ცხრილი შედგება ოთხნიშნა რიცხვებისაგან, რომელთა თანმიმდევრობა არაა განპირობებული რაიმე კანონზომიერებით. ცხრილის თითოეულ გვერდზე ყველა რიცხვი 10 სვეტშია განლაგებული. სვეტში მოთავსებული 50 რიცხვი დაყოფილია ჯგუფებად (თითოეული ჯგუფი ხუთ რიცხვს მოიცავს). მაშასადამე ნებისმიერ გვერდზე გვაქვს 500 ოთხნიშნა (10×50) ანუ 2000 ერთნიშნა (500×4) რიცხვი, რომლებიც 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ციფრებიდან შემთხვევითაა შედგენილი. ამ ცხრილის შედგენის შემთხვევითობა იმაშიაც მდგომარეობს, რომ თითოეული ეს ციფრი (0, 1, 2, ...9) ცხრილის ერთ გვერდზე გვხვდება ერთი და იგივე რაოდენობით (ანუ დაახლოებით 200 ჯერ). მოტანილი შემთხვევით სიდიდეთა ცხრილის საფუძველზე შერჩევითი ერთობლიობის შესაქმნლად მიმართავენ ცხრილის ნებისმიერ

376

გვერდს და შესაბამისი სვეტიდან ან სტრიქონიდან თანმიმდევრულად ამოიწერენ იმდენ რიცხვს, რამდენი ერთეულიცაა შერჩევით ერთობლიობაში (შერჩევითი ერთეულების რაოდენობა უდრის შერჩევის რიცხვს, რომელიც როგორც ვიცით, აღინიშნება n სიმბოლოთი და წინასწარ დგინდება შერჩევითი დაკვირვების პროგრამის მიხედვით). თუ ერთეულთა რიცხვი გენერალურ ერთობლიობაში სამნიშნიანია, მაშინ შერჩეული ოთხნიშნა რიცხვებიდან უკუაგდებენ პირველ ან ბოლო რიცხვს. ამის შემდეგ ამოარჩევენ რიცხვებს, რომლებიც არ აღემატებიან გენერალური ერთობლიობის რიცხვს. პროცესს ვაგრძელებთ მანამ, სანამ ასეთი სახის რიცხვებს არ მივიღებთ n რაოდენობით. საბოლოოდ შერჩეული რიცხვების შესაბამის ნომრებს ამოვიღებთ გენერალური ერთობლიობის წინასწარ დანომრილი ვარიანტებიდან და ეს იქნება **შერჩევითი ერთობლიობა.**

მაგალითი. ვთქვათ გენერალური ერთობლიობა მოიცავს 500 ერთეულს ($N = 500$). შერჩევის პროგრამის შესაბამისად უნდა ჩავატაროთ 10%-ანი შერჩევა ანუ შერჩევის რიცხვი $n = 50$ -ს. შემთხვევით რიცხვთა ცხრილის რომელიმე სვეტიდან ან სრტიქონიდან სულ უნდა ავიღოთ 50 რიცხვი.

ვთქვათ ესენია: 3470, 2700, 5600, 3158, 4358 და ა.შ. (სულ 50 რიცხვი). ვინაიდან გენერალური ერთობლიობის რიცხვია 500 ანუ სამნიშნა რიცხვი, ამიტომ თითოეული შერჩეული რიცხვებიდან საჭიროა უკუვაგდოთ პირველი ან ბოლო ციფრი (ვთქვათ პირველი). დაგვრჩება რიცხვები: 470, 700, 600,158, 358 და ა.შ. როგორც ჩანს გენერალური ერთობლიობის რიცხვზე მეტია 700 და 600. ამიტომ ისინი ამოვარდება შერჩეული რიცხვებიდან. გენერალური ერთობლიობიდან შერჩევაში მოხვდა 470, 158, 358 და ა.შ. ნომრიანი ერთეულები.

საკუთრივ-შერჩევითი დაკვირვების ჩატარებისას დიდ გამოყენებას პოულობს შერჩევის საშუალო და საზღვრითი შეცდომების გაანგარიშების ფორმულები. ეს ფორმულები

377

განსხვავებულია შესასწავლი ნიშნის საშუალო და წილობრივი მნიშვნელობებისათვის. იმ შემთხვევაში, როცა ვანგარიშობთ ნიშნის საშუალო მნიშვნელობას (საშუალო ხელფასი, საშუალო მოსავლიანობა, საშუალო შემოსავლები, საშუალო დანახარჯები და ა.შ.) შერჩევის საშუალო და საზღვრითი შეცდომები განისაზღვრება ფორმულებით:

1) განმეორებითი შერჩევისათვის:

ა) $$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \qquad (10.35),$$

ბ) $$\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}. \qquad (10.36).$$

2)განუმეორებელი შერჩევისათვის

ა) $$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}; \qquad (10.37),$$

ბ) $$\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} \qquad (10.38).$$

იმ შემთხვევაში, როცა ვსწავლობთ წილობრივ ნიშანს (წუნდებული პროდუქციის ხვედრითი წილი, ვარგისი ანუ ხარისხიანი პროდუქციის ხვედრითი წილი, ქალებისა და მამაკაცების ხვედრითი წილი მოსახლეობის საერთო რიცხოვნობაში და ა.შ.), მაშინ შერჩევის საშუალო და საზღვრითი შეცდომები საკუთრივ-შემთხვევითი შერჩევისათვის გაიანგარიშება ფორმულით:

1) განმეორებითი შერჩევისათვის:

ა) $$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \qquad (10.39),$$

ბ) $\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$ (10.40).

2) განუმეორებელი შერჩევისათვის:

ა) $\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$ (10.41),

ბ) $\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$, (10.42):

სადაც μ და $\Delta-$ საშუალო და საზღვრითი შეცდომებია: σ^2 და $w(1-w)$ შერჩევითი ერთობლიობის დისპერსიაა საშუალო და წილობრივი ნიშნებისათვის;

n და N –შესაბამისად შერჩევითი და გენერალური ერთობლიობის რიცხვია;

t-სტიუდენტის კრიტერიუმი ანუ ნდობის ინტერვალია, რომელიც გვიჩვენებს გარკვეული ალბათობით რა საზღვრებში იმოძრავებს შერჩევითი მახასიათებლები.

პირობითი მაგალითი. შერჩევითი გამოკვლევებით დადგინდა, რომ ქ. თბილისის ბენზინის ბიზნესში მომუშავეთა საშუალო თვიურმა შემოსავალმა შეადგინა $\tilde{X} = 250.0$ ლარი, საშუალო კვადრატულმა გადახრამ $\sigma = 13,8$ ლარი.

0,997 ალბათობით განვსაზღვროთ საზღვრები, რომელშიაც იმოძრავებს გენერალური ერთობლიობის ანუ მთელი ქალაქის ბენზინის ბიზნესში დასაქმებულთა საშუალო თვიური ფულადი შემოსავალი, თუ გამოკითხულთა რაოდენობა შეადგენს 15%-ს. $n = 300,$ $N = 2000$. ასეთი მაგალითის ამოხსნისათვის ჯერ გავიხსენოთ გენერალური ერთობლიობის საშუალოს($\overline{X}_0$) მოძრაობის საზღვრების ფორმულა: $\overline{X}_0 = \tilde{X} \pm \Delta,$ რაც იგივეა

$\tilde{X}-\Delta \le \overline{X}_0 \le \tilde{X}+\Delta, \quad \tilde{X}=250$ ლარს, ხოლო საზღვრითი შეცდომა განუმეორებელი შერჩევის შემთხვევაში, როცა ვანგარიშობთ ნიშნის საშუალო მნიშვნელობას განისაზღვრება (10.37) ფორმულით:

$$\Delta = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$$

სტიუდენტის კრიტერიუმი t 0,997 ალბათობით უდრის 3-ს (იხ დანართი 2), საშუალო კვადრატული გადახრა σ=13,8 ლარს, n=300, $\frac{n}{w}$ შეადგენს 0,15 ანუ 15%-ს. თუ ამ მონაცემებს შევიტანთ (10.37) ფორმულაში, გვექნება:

$$\Delta = t\sigma = 3\sqrt{\frac{13.8^2}{300}(1-0.15)} = 0.54 \quad \text{ლარს.}$$

მაშასადამე, თვიური ფულადი შემოსავალი იმოძრავებს $\tilde{X}-\Delta \le \overline{X}_0 \le \tilde{X}+\Delta$ ანუ $250-249.26\times 3 \le \bar{X}_0 \le 250+0.73\times 3$ ე.ი.250.73 ლარიდან 0.73 ლარამდე.

პირობითი მაგალითი. ქ.თბილისის ბაზრობებზე საკუთრივ-შემთხვევითი განუმეორებელი შერჩევითი წესით შეამოწმეს კვების პროდუქტების სტანდატრულობის საკითხი. შემოწმებას დაექვემდებარა 1550 სინჯი $(n=1550)$, რომელთაგან 54,9%-ის შემთხვევაში კვების პროდუქტი იყო უხარისხო, არასტანდარტული და ჯანმრთელობისათვის საშიში. 0,954 ალბათობით განვსაზღვროთ წუნდებული კვების პროდუქტების ხვედრითი წილის მოძრაობის საზღვრები მთლიანად ქ. თბილისის ბაზრობებისათვის, თუ ცნობილია, რომ სრული დაკვირვებისას უნდა აგვეღო 6200 სინჯი. ამოცანის პირობის თანახმად შერჩევაში 54,9% წუნდებულია, ე.ი. $w=0,549, n=1550, \mathrm{E}|w-p| = t\mu = 0,954$ ალბათობით

380

$t = 2$ (იხ.დანართი 2), $N = 6200,$

გვექნება:

$$\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{0.549(1-0.549)}{1550}\left(1-\frac{1550}{6200}\right)} = \pm 0.0218$$

ე.ი. $\Delta = 2,2\%$

მაშასადამე ქ. თბილისის მთელს ბაზრობებზე წუნდებული კვების პროდუქტების ხვედრითი წილი იმოძრავებს $54,9\% - 2,2\% \leq \overline{X}_0 \leq 54,9\% + 2,2\%$, ე.ი. 52,7%-დან 57,1%-მდე.

6. მექანიკური შერჩევა

შერჩევითი საკუთრივ-შერჩევითი წესი უმთავრესად გენერალური ერთობლიობის ერთეულთა სრული ჩამონათვალის პირობებში გამოიყენება. დანარჩენ შემთხვევებში და საერთოდ სოციალურ-ეკონომიკურ მოვლენებსა და პროცესებში უფრო ფართოდ შერჩევის მექანიკერი წესია გავრცელებული. მაგრამ მექანიკური შერჩევის გამოყენების აუცილებელი პირობაა რაიმე ნიშნით მოწესრიგებული, დალაგებული ერთობლიობის არსებობა. ასეთი შემთხვევები კი ძალიან ხშირია სოციალურ-ეკონომიკურ სფეროში. მაგალითად, მოწესრიგებული და დალაგებულია მოწაფეების, სტუდენტთა და ასპირანტთა ერთობლიობანი ალფავიტური სიების ჩამონათვალით, ფირმაში მომუშავეთა სატაბელო ნომრები, საცხოვრებელი სახლების ნომრები ქალაქისა და ქალაქის ტიპის დასახლების ქუჩებში, თვით საცხოვრებელ სახლებში ბინების ნომრები და .შ. ამიტომ ასეთი სახის სტატისტიკური გენერალური ერთობლიობიდან მექანიკურად

381

ყოველი მე-5 (20%-ანი შერჩევა), ან კიდევ ყოველი მე-10 (10%-ანი შერჩევა) ერთეულის ამოღება და ა.შ. წარმოქმნის **რეპრეზენტატულ** შერჩევით ერთობლიობას, რომლის ჩვენთვის საინტერესო ნიშნებით შესწავლა ამაღლბს კვლევის შედეგების საიმედობის ხარისხს.

სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენების და პროცესების გენერალური ერთობლიობანი ზოგჯერ შესასწავლი ნიშნის მიხედვით დალაგებულია ჯგუფებად. მაგალითად, შინამეურნეობანი შემოსავლების ან დანახარჯების ნიშნით მოიცავს სხვადახვა ჯგუფს. მათ შორის ვთქვათ, თვეში 0-დან 20 ლარამდე შემოსავლით, 20 ლარიდან 40 ლარამდე და ა.შ. ასეთ შემთხვევებში მექანიკურად ყოველი მე-5, მე-10, მე-15, და ა.შ. ერთეულების შესასწავლად ამოღებამ შესაძლებელია შერჩევისათვის დამახასიათებელი რეპრეზენტატიული შეცდომის გარდა, დამატებით წარმოშვას სისტემატიური შევდომაც. ამ უკანასკნელს განაპირობებს შერჩევაში უმთავრესად დაბალშემოსავლიანი ან უმთავრესად მაღალშემოსავლიანი შინამეურნეობების მექანიკური მოხვედრა. ამიტომ საჭიროა ინტერვალური ვარიაციული მწკრივები დავიყვანოთ დისკრეტულ ვარიაციულ მწკრივზე და ინტერვალების საშუალო შემოსავლის (ინტერვალის ზედა და ქვედა მნიშვნელობათა ჯამის ორზე შეფარდებით) მიხედვით გავანაწილოთ შინამეურნეობანი. ეს იმაზე მეტყველებს, რომ მექანიკური შერჩევისათვის აუცილებელია წინასწარ მოვაწესრიგოთ გენერალური ერთობლიობანი.

მექანიკური შერჩევისათვის წინასწარ უნდა განისაზღვროს ერთეულთა ამორჩევის პროპორცია. პროპორციას განსაზღვრავს შერჩევითი და გენერალური ერთობლიობის ურთიერთშეფარდება. მაგალითად, თუ შერჩევითი ერთობლიობის რიცხვია 5000 ერთეული, ხოლო გენერალურის 50 000, მაშინ პროპორცია იქნება $\frac{5000}{50000} = \frac{1}{10}$.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დალაგებული და მოწესრიგებული

382

გენერალური ერთობლიობიდან უნდა ამოვიღოთ ყოველი მე-10, 10%-იანი შერჩევა, და ა.შ.

თავისი ბუნებით მექანიკური შერჩევა განუმეორებელი შერჩევითი დაკვირვებაა, რადგანაც მექანიკურად შერჩეული ერთეულები აღარ უბრუნდება გენერალურ ერთობლიობას და არ მონაწილეობს ახალ შერჩევაში. ამიტომ აქ შერჩევის საშუალო, აგრეთვე, საზღვრითი შეცდომების გასაანგარიშებლად როგორც საშუალო ისე წილობრივი ნიშნებისათვის გამოიყენება საკუთრივ-შემთხვევითი წესით შერჩევისათვის წინა პარაგრაფში დადგენილი ფორმულები.

7. ტიპური შერჩევა

ტიპური შერჩევა ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი წესია შერჩევით დაკვირვებაში, რომელიც გულისხმობს წინასწარ გენერალური ერთობლიობის რაიმე ნიშნით (უმთავრესედ ჩვენთვის საინტერესო, შესასწავლი ნიშნით) დაყოფას ერთტიპურ ჯგუფებად, თითოეული ჯგუფიდან საკუთრივ–შემთხვევითი ან მექანიკური წესით განსაზღვრული რაოდენობის ერთეულთა ამორჩევას, მათ შესწავლას და შესწავლის შედეგების მთელს გენერალურ ერთობლიობაზე გავრცელებას. იმის გამო, რომ გენერალური ერთობლიობა დანაწილებილია თვისებრივად ერთგვაროვან ჯგუფებად, ამიტომ ტიპური შერჩევა გაცილებით უფრო ზუსტ შედეგებს იძლევა, ვიდრე სხვა შერჩევის რომელიმე წესი. სოციალურ-ეკონომიკური ნიშნები, რომელთა მიხედვით წარმოებს გენერალური ერთობლიობის ერთტიპურ ჯგუფებად დანაწევრება, შეიძლება იყოს სხვადასხვაგვარი. თანამედროვე, საბაზრო ეკონომიკაზე გარდამავალ პერიოდში, შეიძლება საწარმოთა მთლიანი ერთობლიობიდან გამოვყოთ, მაგალითად, სახელმწიფო და არასახელმწიფო საწარმოები, რომლებშიაც განსხვავებულია შრომის ანაზღაურების დონე, ან კიდევ წვრილი,

383

საშუალო და მსხვილი საწარმოები,რომლებშიაც განსხვავებულია პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულება, რენტაბელობა და ა.შ.

მოვიტანოთ კონკრეტული პირობითი მაგალითი, რომლის მიხედვით ადვილი გახდება ტიპური შერჩევის თეორია და პრაქტიკა. ვთქვათ საქართველოში ფირმების მიერ გამოშვებული პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულების(დანახარჯები სასაქონლო პროდუქციის ერთ ლარზე) შესასწავლად ჩავატაროთ 2 პროცენტიანი განუმეორებელი ტიპური შერჩევა, რომლის შედეგები შემდეგ სურათს იძლევა:

ტიპური შერჩევითი დაკვირვების მონაცემები

ცხრილი №58

ფირმების დასახელება	ფირმების რიცხვი (N_i)	შესასწავლი ფირმების რაოდენობა (n_i)	დანახარჯები სასაქონლო პტოდუქციის 1 ლარზე (ლარობით) (x_i)	საშუალო კვადრატული გადახრა (σ_i)
მსხვილი	2500	50	0,80	0,15
საშუალო	12000	240	0,85	0,25
წვრილი	20000	400	0,95	0,20
სულ	34500	690		

ცხრილში გენერალური ერთობლიობის რიცხოვნობა ფირმების მიხედვით აღნიშნულია N_i სიმბოლოთი, $(N_1 + N_2 + N_3 = N)$ (10.43), ხოლო თითოეული ჯგუფიდან საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური წესით შერჩეული ფირმების რაოდენობა n_i სიმბოლოთი $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$, დანახარჯები სასაქონლო პროდუქციის ერთ ლარზე x_i–ით (როგორც ჩანს მსხვილ ფირმებს სასაქონლო პროდუქციის ერთი ლარის გამოშვება უჯდებათ 80 თეთრი, საშუალო ფირმებს–85 თეთრი, ხოლო წვრილ ფირმებს–95 თეთრი),

საშუალო კვადრატული გადახრა თითოეულ ჯგუფში σ_1–ით.

როგორც ცხრილიდანაა (ცხრ. 58) ცხადი, შერჩეული ერთობლიობა ყალიბდება თითოეული ტიპური ჯგუფიდან შერჩევის საერთო რიცხვიდან გამომდინარე შესასწავლი ერთეულების არჩევით. ამიტომ დაკვირვების შედეგების სიზუსტისა და საიმედოობის ხარისხის თვალსაზრისით პრინციპული მნიშვნელობა ენიჭება ამ ერთეულთა შერჩევის წესს. ასეთი თეორიული საკითხები ტიპური შერჩევის მიმართ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად დამუშავებულ იქნა გასული საუკუნის 20–იან წლებში ჯერ **ა. ა. ჩუპროვის,** ხოლო, ცოტა მოგვიანებით, 30–იან წლებში—**ე. ნეიმანოვის** მიერ. ამ თეორიულ საფუძვლებზე სტატისტიკაში ჩამოყალიბდა ჯგუფების სიდიდის განმსაზღვრელი სამი წესი. აქედან ყველაზე მარტივია თითოეული ჯგუფიდან ერთეულთა თანაბარი რაოდენობის შერჩევა, ცხადია თუ დაკვირვების საერთო რიცხვი n -ს შეადგენს, ხოლო გენერალური ერთობლიობა დაყოფილია m ჯგუფად, მაშინ ასეთ შემთხვევაში $n_i = \dfrac{n}{m}$ (10.44).

ეს წესი მხოლოდ იმ შემთხვევაში განაპირობებს შედეგების მაღალ სიზუსტესა და საიმედოობას, თუ ჯგუფები თავიანთი სიდიდით ერთმანეთის ტოლია ($N_1 = N_2 = N_3 ....N_m$), წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ საწინააღმდეგო ანუ არაზუსტ შედეგებს. ამიტომ სტატისტიკაში გამოიყენებენ მეორე წესს, რომელსაც ეწოდება **პროპორციული ფორმირების** წესი. ეს იმას ნიშნავს, რომ თითოეული ტიპური ჯგუფიდან შესასწავლად უნდა ავიღოთ ჯგუფების სიდიდის პროპორციული ერთეულების რაოდენობა, რაც მიიღწევა შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$n_i = \frac{N_i}{N} \times n \qquad (10.45).$$

ჩვენს პირობით მაგალითზე (ცხრ. 58) ფირმების რაოდენობა

(50, 240, 400) ჯგუფების მიხედვით სწორედ ასეთი წესითაა გაანგარიშებული. ეს წესი სხვა არაფერია, თუ არა შერჩევის რიცხვის (n) განაწილება თითოელი ჯგუფის მოცულობის გენერალური ერთობლიობის საერთო რიცხოვნიბაში ხვედრითი წილის პროპორციულად.ჩვენს პირობით მაგალითში (ცხრ. 58) მსხვილ საწარმოებს უჭირავს $\frac{2500}{34500} = 0{,}073$ ანუ 7,3%, %, საშუალო ზომის ფირმებს–0,346 ანუ 34,6 %, ხოლო წვრილს–0,579 ანუ 57,9 %. ვინაიდან, სულ შერჩევითი ერთობლიობის რიცხვი 690 ერთეულია ანუ 690 ფირმაა, ამიტომ მისი ნამრავლი თითოიეული ჯგუფის ხვედრით წილზე გვაძლევს შესასწავლი ფირმების რაოდენობას.

მსხვილი ფირმებიდან $50=690 \times 0{,}073$;

საშუალო ფირმებიდან $240=690 \times 0{,}348$;

წვრილი ფირმებიდან $400=690 \times 0{,}579$.

პროპორციული წესით შერჩევითი ერთობლიობის ფორმირება უფრო მარტივად შეიძლება იმის მიხედვით თუ რამდენპროცენტიან შერჩევით დაკვირვებას ვაწარმოებთ.

ჩვენს მაგალითზე (ცხრილი №58) ვახდენთ 2 %-იან დაკვირვებას. ამიტომ გენერალური ერთობლიობისა და მისი ცალკეული ჯგუფების მოცულობის მიმართ გაანგარიშებული 2 % იგივე მაჩვენებლებს გვაძლევს.

ჯგუფების მოცულობის პროპორციული წესის მიხედვით გაანგარიშების გამოყენებაც შეზღუდულია, განსაკუთრებით მაშინ, თუ ჯგუფების მიხედვით შესასწავლი ნიშნის ვარიაცია მკვეთრადაა განსხვავებული. ამიტომ სტატისტიკაში ცნობილია აგრეთვე, შესასწავლ ერთეულთა ჯგუფების მიხედვით **ოპტიმალური განაწილების წესიც.**

აქ განაწილებისას გაითვალისწინება არა მარტო ერთეულთა ჯგუფების განსხვავებული მოცულობანი, არამედ ვარიაციას ხარისხებიც. ვარიაციის ხარისხის გათვალისწინება შეიძლება თითოეული ჯგუფის საშუალო კვადრატული გადახრის (σ_i)

საშუალო ჯგუფურ ვარიაციასთან ($\overline{\sigma}_i$) შეფარდების კოეფიციენტის $\left(\frac{\sigma_i}{\overline{\sigma}_i}\right)$ გამოყენების გზით.

ეს კოეფიციენტი გვიჩვენებს თუ რა ხვედრითი წილი უჭირავს i –ური ტიპური ჯგუფის ვარიაციას საშუალო ჯგუფურ ვარიაციაში. ამიტომ შერჩევის რიცხვის ჯგუფების მოცულობისადმი პროპორციული განაწილების მაჩვენებელს თუ დამატებით გადავამრავლებთ ასეთ კოეფიციენტზე, მივიღებთ შერჩევითი დაკვირვების საერთო რიცხვის (n) არა მარტო ჯგუფების მოცულობისადმი, არამედ ჯგუფების შიგნით შესასწავლი ნიშნის ვარიაციისადმი პროპორციულ განაწილებას. გვექნება:

$$n_i = n\frac{N_i}{N}\times\frac{\sigma_i}{\overline{\sigma}i} \quad . \qquad (10.46).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$N = \sum N_i, \overline{\sigma}_i = \frac{\sum \sigma_i N_i}{\sum N_i} \qquad (10.47)$$

და აღნიშნულ გამოსახულებებს შევიტანთ (10.46) ფორმულაში, გვექნება:

$$n_i = n\frac{N_i}{\sum N_i}\times\frac{\sigma_i}{\frac{\sum \sigma_i N_i}{\sum N_i}} = \frac{nN_i\sigma_i}{\sum \sigma_i N_i} \quad . \qquad (10.48)$$

ჯგუფებიდან შერჩევითი ერთეულების თანაბარი, აგრეთვე ჯგუფების მოცულობის პროპორციული შერჩევის შემთხვევაში, შერჩევის საშუალო შეცდომა განისაზღვრება ფორმულებით:

1) შესასწავლი ნიშნის საშუალოს განგარიშების

შემთხვევაში:

ა)განმეორებითი შერჩევისას:

$$\mu = \sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}}; \qquad (10.49)$$

ბ) განუმეორებელი შერჩევისას:

$$\mu = \sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}; \qquad (10.50)$$

2) შესასწავლი ნიშნის ხვედრითი წილის გაანგარიშების შემთხვევაში:

ა) განმეორებითი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\overline{p_i q_i}}{n}} = \sqrt{\frac{\overline{w_i(1-w_i)}}{n}} \qquad (10.51),$$

ბ) განუმეორებელი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\overline{w_i(1-w_i)}}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \qquad (10.52)$$

სადაც n–შერჩევითი ერთობლიობის საერთო რიცხოვნობაა;

N –გენერალური ერთობლიობის რიცხვი;

w_1 –შესასწავლი ნიშნის მქონე ერთეულთა ხვედრითი წილია i-ურ ტიპურ ჯგუფში;

$\overline{p_i q_i}$ –ჯგუფური დისპერსიების საშუალოა, წილობრივი ნიშნისათვის, იგივეა რაც $w_i(1-w_i)$.

$\overline{\sigma_i^2}$ –ჯგუფური დისპერსიების საშუალოა ნიშნის საშუალოს გაანგარიშებისას.

ამ უკანასკნელი მაჩვენებლით შეცვლილია შერჩევითი

საშუალო დისპერსია (σ^2), რაც გამოყენებული გვქონდა შერჩევის საშუალო შეცდომების გასაანგარიშებლად. ამ შეცვლის უფლებას გვაძლევს დისპერსიების შეკრების კანონის ფორმულის გარდაქმნა ტიპური შერჩევისათვის. დისპერსიების შეკრების კანონის ძალით საერთო დისპერსია (σ^2) უდრის საშუალო ჯგუფურ დისპერსიას $\left(\overline{\sigma_i^2}\right)$ მიმატებული ჯგუფთაშორისი დისპერსია $\left(\delta^2\right)$ $\left(\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2\right)$. სტატისტიკოსები ამტკიცებენ, რომ „...ტიპური შერჩევის ჩატარებისას ჯგუფთაშორისი დისპერსია (δ^2) არ ატარებს შემთხვევითი ვარიაციის ხასიათს, ვინაიდან ჯგუფები ფორმირებულია შერჩევითი გამოკვლევის დაწყებამდე".[1]

ვინაიდან მუდმივი რიცხვის დისპერსია ნულის ტოლია, ამიტომ დისპერსიების შეკრების ფორმულიდან

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2 = \overline{\sigma_i^2} + 0., \qquad \sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} \qquad (10.53).$$

განსხვავებულია შერჩევის საშუალოს გასაანგარიშებელი ფორმულები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ჯგუფებიდან შერჩევითი ერთეულების შერჩევა წარმოებს, როგორც ჯგუფის მოცულობის, ასევე შიგაჯგუფური ვარიაციის პროპორციულად, როგორც ეს ნაჩვენები იყო (10.46) და (10.48) ფორმულებში. ამ შემთხვევაში ჯგუფური დისპერსიების საშუალოს $\left(\overline{\sigma_i^2}\right)$გასაანგარიშებლად ვიყენებთ ჯგუფური საშუალო კვადრატულის საშუალოს (10. 47) ფორმულას:

$$\overline{\sigma_i} = \frac{\sum \sigma_i N_i}{\sum N_i} \qquad (10.54).$$

თუ მოცემული ტოლობის ორივე მხარეს ავიყვანთ

---

[1]იხ. მაგალითად, Òåîðèÿ ñòàòèñòèêè, ó÷åáíèê ïîä ðåäàêöèåé ïðîô. Ã. Ë. Ãðîìûêî, ÈÍÔÐÀ-Ì, Ìîñêâà, 2002, ñòð 153.

კვადრატში, გვექნება:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum N_i^2 \sigma_i^2}{\sum N_i^2} \qquad (10.55)$$

თუ $(10.49)-(10.52)$ ფორმულებში ნიშნის საშუალო მნიშვნელობის გაანგარიშების შემთხვევში $\overline{\sigma_i^2}$ -ის ნაცვლად შევიტანთ მის (10.55) მნიშვნელობას, ხოლო წილობრივი ნიშნისათვის $w_i(1-w_i)$ მნიშვნელობას, მივიღებთ ჯგუფების მოცულობისა და ვარიაციის ხარისხის პროპორციული განაწილებისათვის შერჩევის საშუალო შევდომის გასაანგარიშებელ ფორმულბს.

1) შესასწავლი ნიშნის საშუალო მნიშვნელობის გაანგარიშების შემთხვევისათვის:

ა) განმეორებითი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{\sum \sigma_i^2 N_i^2}{\sum N_i^2}}{n = \sum n_i}} = \sqrt{\frac{\sum \sigma_i^2 N_i^2}{\sum N_i^2 \times \sum n_i}} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum \frac{N_i^2 \sigma_i^2}{n_i}}$$

(ვინაიდან $\sum N_i = N$) (10.56).

ბ) განუმეორებელი შერჩევისას

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\sum\left[\frac{\sigma_i^2 N_i^2}{n_i}\left(1-\frac{n_i}{N_i}\right)\right]} \qquad (10.57).$$

2) წილობრივი ნიშნისათვის:

ა) განმეორებითი შერჩევისას

$$\mu = \frac{1}{N}\sqrt{\sum \frac{w_i(1-w_i)N_i^2}{n_i}} \qquad (10.58),$$

ბ) განუმეორებელი შერჩევისას

$$\mu = \frac{1}{N}\sqrt{\sum\left[\frac{w_i(1-w_i)}{n_i}\left(1-\frac{\eta}{N_i}\right)\right]} \qquad (10.59).$$

58-ე ცხრილის მონაცემებით საშუალო დანახარჯები სასაქონლო პროდუქციის ერთ ლარზე შერჩევითი ერთობლიობისათვის შეადგენს:

$$\tilde{X} = \frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i} = \frac{(0,80\times 50)+(0,85\times 240)+(0,95\times 400)}{50+240+400} = 0,90 \text{ ლარს.}$$

როგორია გენერალურ ერთობლიობაში ამ მაჩვენებლის (ე.ი. სასაქონლო პროდუქციის ერთ ლარზე 90 თეთრი იხარჯება) მოძრაობის საზღვრები? ამისათვის საჭიროა გარკვეული ალბათობით (ვთქვათ $E(X)=0,9749$) მოვნახოთ t –ს მნიშვნელობა. ამ ალბათობით $t = 2,24$ (იხ. დანართი 2). საჭიროა, აგრეთვე,ჯგუფური დისპერსიების საშუალო:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{(0,15^2\times 50)+(0,25^2\times 240)+(0,20^2\times 400)}{50+240+400} = 0,046.$$

ახლა შეგვიძლია გავიანგარიშოთ შერჩევის საშუალო შეცდომა. ვინაიდან შერჩევა განუმეორებელია, ამიტომ მისი გაანგარიშებისათვის ვიყენებთ ფორმულას:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{0.046}{690}\left(1-\frac{690}{34500}\right)} = 0.008\,.$$

საზღვრითი შეცდომა :

$$\Delta = t\mu = 2,24\times 0,008 = \pm 0,0179 \qquad \text{ლარი.}$$

შერჩევითი საშუალოს მოძრაობის საზღვრები გენერალურ ერთობლიობაში იქნება:

$$\tilde{X}-\Delta \le \overline{X} \le \tilde{X}+\Delta,$$

$$\text{ანუ}\quad 0,90-0,0179 \le 0,90 \le 0,90+0,0179,$$

391

ე.ი. $0,882$ ლარი $\leq 0,90$ ლარი $\leq 0,917$ ლარი.

ახლა ვნახოთ როგორია შერჩევის საზღვრითი შეცდომა ფირმების საერთო რაოდენობიდან 2 %-იანი შერჩევით განსაზღვრული შერჩევითი ერთობლიობის (690 ფირმა $= \frac{34500\times 2}{100}$) მსხვილი, საშუალო და წვრილი ფირმებიდან ფირმების რაოდენობისა და შიგაჯგუფური ვარიაციის პროპორციულად განაწილების შემთხვევაში.

(10. 48) ფორმულის მიხედვით მსხვილი ფირმებიდან დაკვირვება უნდა მოვახდინოთ

$$34\left(n_1 = \frac{nN_1\sigma_1}{\sum N_i\sigma_i} = \frac{690\times 2500\times 0,15}{7375}\right)$$

საშუალო ფირმებიდან

$$283\ \left(n_2 = \frac{nN_2\sigma_2}{\sum N_i\sigma_i} = \frac{690\times 12000\times 0,25}{7375}\right)$$

ხოლო წვრილი ფირმებიდან

$$373\left(n_3 = \frac{nN_3\sigma_3}{\sum N_i\sigma_i} = \frac{690\times 20000\times o,20}{7375}\right)$$ ფირმაზე.

ამ შემთხვევაში შერჩევის საშუალო შეცდომა

$$\mu = \frac{1}{N}\sqrt{\sum\frac{\sigma_i^2 N_i^2}{n_i}\left(1-\frac{n_i}{N_i}\right)} = \frac{1}{34500}\sqrt{\frac{2500^2\times 0.15^2}{34}\left(1-\frac{34}{2500}\right)+\frac{12000^2\times 0.25^2}{283}\times}$$

$$\times\sqrt{\left(1-\frac{283}{12000}\right)+\frac{20000^2\times 0.20^2}{373}\left(1-\frac{373}{20000}\right)} = 0.003$$ ლარი.

მაშასადამე თუ შერჩევითი რიცხვის მხოლოდ ჯგუფების მოცულობის პროპორციულად განაწილების შემთხვევაში შერჩევის საშუალო შეცდომა $\mu = 0,008$ ლარი იყო, ჯგუფების მოცულობასთან ერთად ვარიაციის ხარისხის პროპორციული

 392

განაწილების შემთხვევაში საშუალო შეცდომა $\mu = 0{,}003$ ლარია, ანუ გაცილებით ნაკლები.

393

ტიპური შერჩევის ერთერთი ნაირსახეობაა **რაიონირებადი** შერჩევა. ამ შემთხვევაში ერთობლიობა ყალიბდება ადმინისტრაციულ-ტერიტორიული წარმონაქმნებიდან არჩეული ერთეულების საფუძველზე. ასეთი შერჩევა ფართოდ შეიძლება გამოყენებულ იქნას შინამეურნეობათა შემოსავლებისა და დანახარჯების შესწავლისა და სხვა მრავალი სოციალური საკითხის კვლევისათვის.

8. სერიული შერჩევა

სოციალურ-ეკონომიკურ მოვლენებსა და პროცესებში ძალიან ხშირია შემთხვევები, როცა გენერალური ერთობლიობა შერჩევითი დაკვირვების ჩატარებამდე თავისთავადაა დანაწილებული გარკვეულ სერიებად, ბუდეებად. ასეთია კომერციულ საქმიანობაში შეფუთული საქონელი (თითოეულ შეფუთვაში საქონლის მრავალი ერთეულია მოთავსებული), ან კიდევ მაცხოვრებლები ცალკეული ტერიტორიული ერთეულებისა და პუნქტების მიხედვით. ასეთ შემთხვევებში, მაგალითად, საქონლის ხარისხის შემოწმება, მოსახლეობის დემოგრაფიული ნიშნების შესწავლა, ან კიდევ წლიური შემოსავლებისა და დანახარჯების დადგენა უმჯობესია ვაწარმოოთ ე.წ. ს ე რ ი უ ლ ი (ბუდობრივი) შერჩევითი დაკვირვებით. ასეთი შერჩევის არსი მდგომარეობს მასში,რომ გენერალური ერთობლიობიდან შეარჩევენ არა ცალკეულ ერთეულებს, არამედ სერიებს (ბუდეებს) და თითოეულ სერიაში არსებული ყველა ერთეულების მთლიანი გამოკვლევის შედეგებს ავრცელებენ გენერალურ ერთობლიობაზე.

შერჩევას აწარმოებენ თანაბარი სიდიდის ან არათანაბარი სიდიდის სერიებით. თუმცა არათანაბარი სიდიდის სერიების შერჩევისას სარგებლობენ თანაბარი სიდიდის სერიების შერჩევისათვის დადგენილი წესებითა და საანგარიშო ფორმულებით. თუ საქმე გვაქვს თანაბარი სიდიდის სერიებთან და გენერალური ერთობლიობა მოიცავს N ერთეულს, მაშინ R

რაოდენობის სერიების არსებობის პირობებში თითოეული სერია შეიცავს $\frac{N}{R}$ ერთეულს. გენერალურ ერთობლიობაში სერიების რაოდენობა განიხილება როგორც დამოუკიდებელი ელემენტები და აქედან საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური წესით შესასწავლად შეირჩევა რაღაც r რაოდენობის სერიები. რადგან შესასწავლი ნიშნის მიხედვით შეისწავლება შერჩეული სერიების ყველა ერთეული მთლიანად, ამიტომ თავისუფლად შეგვიძლია დავადგინოთ შერჩევითი საშუალოები სერიების მიხედვით: $\overline{\mathrm{X}}_1, \overline{\mathrm{X}}_2, \ldots\ldots\ldots, \overline{\mathrm{X}}_Z$, ვინაიდან გვაქვს სულ R რაოდენობის სერია გენერალურ ერთობლიობაში, ამასთან ყოველ მათგანს შერჩევაში მოხვედრის თანაბარი შანსი გააჩნია და როგორც წესი სერიული შერჩევა განუმეორებელია, ცხადია, რომ შერჩევითი საშუალოების ალბათობა თანაბარია და უდრის $\frac{1}{R}$ -ს.

აქედან შემთხვევითი სიდიდის $\left(\overline{\mathrm{X}}_i\right)$ განაწილების კანონი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

შერჩევითი საშუალოს მნიშვნელობა	$\overline{\mathrm{X}}_1$	$\overline{\mathrm{X}}_2$	. . . . . .	$\overline{\mathrm{X}}_R$
ალბათობა	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	. . . . . .	$\frac{1}{R}$

მოცემული შემთხვევითი სიდიდის ($\overline{\mathrm{X}}_i$) მათემატიკური ლოდინი $\mathrm{E}\left(\overline{\mathrm{X}}_i\right)$ტოლია ამ შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა მათ ალბათობაზე ნ ა მ რ ა ვ ლ თ ა ჯ ა მ ი ს ა. გვექნება:

$$\mathrm{E}\left(\overline{\mathrm{X}}_i\right) = \sum_{i=1}^{R} \overline{\mathrm{X}}_i\, p_i = \overline{\mathrm{X}}_1 \frac{1}{R} + \overline{\mathrm{X}}_2 \frac{1}{R} + \ldots\ldots\ldots + \overline{\mathrm{X}}_R \frac{1}{R} = \frac{\overline{\mathrm{X}}_1 + \overline{\mathrm{X}}_2 + \ldots\ldots \overline{\mathrm{X}}_R}{R} = \overline{\mathrm{X}}_0 \ , \tag{10.60}$$

ე. ი. გენერალური ერთობლიობის საშუალოს ტოლია.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, როგორც ცნობილია,

არის ამ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო არიტმეტიკულიდან გადახრის კვადრატის მათემატიკური ლოდინი. აქედან გამომდინარე გვექნება:

$$D(\overline{X}_i) = E(\overline{X}_i - \overline{X}_0)^2 = (\overline{X}_1 - \overline{X}_0)^2 \frac{1}{R} + (\overline{X}_2 - \overline{X}_0)^2 \frac{1}{R} +$$

$$+ \ldots + (\overline{X}_R - \overline{X}_0)^2 \frac{1}{R} = \frac{\sum_{i=t}^{R} (\overline{X}_i - \overline{X}_0)^2}{R} = \delta^2_{\overline{x}} \qquad (10.61).$$

მაშასადამე, მოცემული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია არის სერიათაშორისი (ჯგუფთაშორისი) დისპერსია. ამიტომ სერიული შერჩევის პირობებში საშუალო შეცდომას ანგარიშობენ შემდეგი ფორმულების გამოყენებით:

1) რაოდენობრივი ნიშნის საშუალო მნიშვნელობისათვის:

ა) განმეორებითი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{r}} \qquad (10.62);$$

ბ) განუმეორებელი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \qquad (10.63).$$

2) ალტერნატიული (წილობრივი) ნიშნისათვის:

ა) განმეორებითი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta_w^{\ 2}}{r}} \qquad (10.64);$$

ბ) განუმეორებელი შერჩევისას

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta_w^{\ 2}}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \qquad (10.65).$$

სადაც r –შესასწავლად შერჩეული სერიების რიცხვია,

396

$R-$ სერიების რიცხვი (რაოდენობა) გენერალურ ერთობლიობაში,

397

δ^2 — სერიათა შორისი (ჯგუფთაშორისი) დისპერსიაა რაოდენობრივი ნიშნისთვის, რომელიც გაიანგარიშება ფორმულით:

$$\delta^2 = \frac{\sum\left(\overline{X}_i - \tilde{X}\right)^2}{r} \qquad (10.66),$$

სადაც $\overline{X}_i - i -$ური სერიის საშუალოა,

$\tilde{X} -$ შერჩევითი სერიებისათვის საშუალო არითმეტიკულია $\tilde{X} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_r}{r}$

(როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ (10.60) ეს მაჩვენებელი გენერალური საშუალოს ($\overline{X}_0$) ტოლია),

$\delta^2 w$ −სერიათაშორისი (ჯგუფთაშორისი) დისპერსიაა წილობრივი (ალტერნატიული) ნიშნისათვის, რომელიც გაიანგარიშება ფორმულით:

$$\delta_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r}\left(w_i - \overline{w}\right)^2}{r}, \qquad (10.67)$$

სადაც $\overline{w}$ − მთლიანი შერჩევითი ერთობლიობისათვის (r სერიებისათვის) შესასწავლი ნიშნის ხვედრითი წილის საშუალო მნიშვნელობაა $\overline{w} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i}{r}$, w_i −შესასწავლი ნიშნის ხვედრითი წილია i−ურ სერიაში.

მაგალითი. კარტოფილის ბიზნესის მწარმოებელი 20 რეგიონიდან საქართველოში 5 რეგიონი შეირჩა, რომლებშიაც კარტოფილის საშუალო წლიურმა მოსავლიანობამ (ციფრები პირობითი) შეადგინა 70/ჰა, 80, 100, 85, 75, ც/ჰაზე. ვიპოვოთ 0,954 ალბათობით კარტოფილის საშუალო წლიური

მოსავლიანობა:

ჯგუფთაშორისი, სერიათშორისი საშუალო:

$$\tilde{X} = \frac{70+80+100+85+75}{5} = 82 \quad ც/ჰა$$

ჯგუფთაშორისი (სერიათა შორისი) დისპერსია:

$$\delta^2 = \frac{(70-82)^2 + (80-82)^2 + (100-82)^2 + (85-82)^2}{5} = 106 \quad ც/ჰა.$$

ამ საფუძველზე შერჩევის საზღვრითი შეცდომა (0,954 ალბათობით $t=2$) განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = t\mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)} = 2\sqrt{\frac{106}{5}\left(1-\frac{5}{20}\right)} \approx 4 \quad ც/ჰა.$$

მაშასადამე, 0,954 ალბათობით საქართველოში კარტოფილის საშუალო წლიური მოსავლიანობა იმოძრავებს $82-4 \le \overline{X} \le 82+4 = 78$ ცენტნერიდან 86 ცენტნერამდე.

9. სამომენტო შერჩევითი დაკვირვებანი

სამომენტო დაკვირვება შერჩევითი გამოკვლევის ერთ-ერთი ნაირსახეობაა, რომელიც 1938 წელს შეიმუშავა ტიპეტმა და გავრცელებულია მუშებისა და საწარმოო მოწყობილობის ცვლის შიგა მოცდენების შესასწავლად. ამჟამად ის ფართოდ შეიძლება გამოყენებულ იქნას საბაჟო შემოსავლების, აგრეთვე, ნებისმიერ ბიზნესის სფეროში საგადასახადო შემოსავლების კონტროლის საქმეში. ს ა მ ო მ ე ნ ტ ო შერჩევითი დაკვირვება გულისხმობს დასაკვირვებელი ერთეულის მდგომარეობის დაფიქსირებას წინასწარ საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური შერჩევის წესით დადგენილი დროის მომენტების მიხედვით.

საწარმოო მოწყობილობისა და მუშების მუშაობის დროის ფონდის შესწავლა ცვლაში გულისხმობს შერჩეული დროის მომენტების მიხედვით მოცდენების დაფიქსირებას მიზეზების

(ნედლეულის უქონლობა, მოწყობილობის უწესივრო მდგომარეობა, ინსტრუმენტის გატეხვით მოცდენა, ელექტროენერგიის გამორთვა, პირადი საუბარი მეზობელ მუშასთან და სხვა) ჩვენებით. ასეთი მონაცემების შეგროვება ფირმების, ფაბრიკების, ქარხნების და სხვა საწარმოო ობიექტებზე ქრონომეტრაჟისა და სამუშაო დღის ფოტოგრაფიის[1] გზით მოითხოვს დროის მნიშვნელოვან დანახარჯებს. სამომენტო შერჩევითი დაკვირვება კი მარტივია და დაკვირვების ჩასატარებლად არ მოითხოვს დროის დიდ დანახარჯებს.

დაკვირვების ჩასატარებლად დაკვირვების დროის მომენტების შერჩევა წარმოებს ორი წესით: მომენტების (საათი, წუთი) არჩება საკუთრივ – შემთხვევითი წესით **მ. კადიროვის** შემთხვევით რიცხვთა ცხრილის გამოყენებით (ამ ცხრილის გამოყენების შესახებ იხ. წინა პარაგრაფში) ან პერიოდული **სამომენტო დაკვირვებით.** ეს უკანასკნელი გულისხმობს დაკვირვების ჩატარებას მექანიკური არჩევის წესით განსაზღვრული დროის პერიოდების მიხედვით. ამ შემთხვევაში დაკვირვების მომენტების პერიოდების ჯამი წარმოადგენს შერჩევით ერთობლიობას, ხოლო მუშისა და საწარმოო მოწყობილობის ცვლაში მუშაობის დროის ფონდი გენერალურ ერთობლიობას.

[1]ქრონომეტრაჟი და სამუშაო დღის ფოტოგრაფია ფირმებში, ქარხნებსა და ფაბრიკებში საწარმოო მოწყობილობის მუშაობის დროის ფონდის გამოყენებაზე დაკვირვების გავრცელებული ფორმებია. ქრონომეტრაჟი უმთავრესად საწარმოო ოპერაციის ხანგრძლივობის დასადგენად გამოიყენება. ის გულისხმობს სხვადასხვა მუშის მიერ ამა თუ იმ სახის ოპერაციის შესრულებაზე დროის დანახარჯების გაზომვას და შემდეგ საშუალო მაჩვენებლის დადგენას. სამუშაო დღის ფ ო ტ ო გ რ ა ფ ი ა მთელი ცვლის განმავლობაში, ცვლის დასაწყისიდან დამთავრებამდე, მუშის მიერ დროის დანახარჯების ჩანაწერებია. მოიცავს როგორც სასარგებლო, ისე უნაყოფო დროის დანახარჯებს. ბიზნესმენებსა და მენეჯერებს ასეთი მასალა უნაყოფო დროის დანახარჯების აღმოფხვრისა და სასარგებლო დროის დანახარჯების ხვედრითი წილის გადიდების გათვალისწინებით აძლევს წარმოებაში შრომის ნაყოფიერების ამაღლებისა და პროდუქციის თვითღირებულების შემცირების შესაძლებლობებს.

400

საწარმოო მოწყობილობისა და მუშის მუშაობის დროის ფონდის გამოყენების შესწავლის დაკვირვების მიზანია მუშაობის მთლიანი დროის ფონდში მოცდენების ხვედრითი წილის დადგენა.

ამიტომ ხდება წილობრივი ნიშნის (w) გაანგარიშება.

თუ $w-$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ მოცდენების ხვედრით წილს ცვლის მუშაობის დროის ფონდში, მაშინ $1-w$ იქნება სასარგებლო მუშაობის დროის დანახარჯების ხვედრითი წილი.

სამომენტო შერჩევითი დაკვირვების ჩატარებისათვის პირველ რიგში განსაზღვრავენ მომენტების რიცხვს (რაოდენობას), რომელთა მიხედვით იწარმოებს პროცესის (ამ შემთხვევაში მუშაობის) მდგომარეობის ფიქსაცია, ცდება მოწყობილობა და მუშა თუ მუშაობს. ამისათვის იყენებენ საზღვრითი შეცდომის (Δ) ფორმულას:

$$\Delta = t\mu = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$ განმეორებითი შერჩევისათვის (10.68).

თუ ტოლობის ორივე მხარეს ავიყვანთ კვადრატში და აქედან განვსაზღვრავთ შერჩევითი დაკვირვების რიცხვს (n), გვექნება:

$$n = \frac{w(1-w)t^2}{\Delta^2_{\text{აბს.}}} \qquad (10.69).$$

სადაც Δ —შერჩევითი ხვედრითი წილის საზღვრითი შეცდომის აბსოლუტური მნიშვნელობაა.

ამ მაჩვენებლის (საზღვრითი შეცდომის) მნიშვნელობას ზოგჯერ ანგარიშობენ პროცენტობით წილობრივი ნიშნის (w) მიმართ. კერძოდ $\Delta_{\text{შეფ.}} = \frac{\Delta_{\text{აბს.}}100}{w}$ (10.70). აქედან განვსაზღვრავთ $\Delta_{\text{აბს.}}$ და შევიტანთ (10.69) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$n = \frac{t^2(1-w)}{\Delta^2_{\text{შეფ.}}}100^2 \qquad (10.71).$$

401

თუ მაგალითად, სახარატო ჩარხების უბანზე დადგმული და სამუშაოდ გამართულია 30 ჩარხი, წინა პერიოდში სამუშაო დღის ფოტოგრაფიის მასალებით დადგენილია, რომ მათი ექსტენსიური[1] დატვირთვის კოეფიციენტი შეადგენს 0,8-ს ($w = 0,8$), და შეფარდებით საზღვრითი შეცდომა $\Delta_{\text{შეფ.}} = \pm 10\%$, მაშინ გამოკვლევის შედეგების 0,9973 ალბათობით ($t = 3$, იხ. დანართი 2) გარანტიის პირობებისათვის გამოკვლევათა (მომენტების) რიცხვი შეადგენს:

$$n = \frac{t^2(1-w)}{\Delta^2_{\text{შეფ.}}w}100^2 = \frac{3^2(1-0,8)}{10^2 \times 0,8}100^2 = 225$$

მაშასადამე, დასაკვირვებელი მომენტების რაოდენობა შეადგენს 225-ს. აქედან ცხადია,რომ თითოეულ მოწყობილობაზე (ჩარხზე) მოდის 7,5 ($\frac{225}{30}$) მომენტი ანუ შემოვლათა რაოდენობა. თუ იმასაც გავითვალისწინებთ, რომ თითოეული ჩარხის მდგომარეობისა და მოცდენის შემთხვევაში სათანადო მიზეზის დაფიქსირებას დაახლოებით 5 წუთი დასჭირდება, მთლიანად დაკვირვების ჩატარებისათვის საჭირო იქნება 1125 წუთი, რაც 480 წუთიანი (8×60) ცვლის ხანგრძლივობის პირობებში შეადგენს 2,3 ცვლას. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება გამოვყოთ არა ერთი, არამედ 4 დამკვირვებელი, რომლებიც ნახევარ ცვლაში $\left(\frac{1125}{4} = 281\text{წუთს}\right)$ დაამთავრებენ მოცემულ სამუშაოს. თუ დაკვირვებით სახარატო

[1]ექსტენსიური დატვირთვის კოეფიციენტი მოწყობილობის დროის მიხედვით გამოყენების მაჩვენებლია. ის გაიანგარიშება ცვლაში ფაქტიურად ნამუშევარი დროის შეფარდებით მუშაობის გეგმიურ დროსთან. თუ, მაგალითად, ცვლაში უნდა ემუშავა 480 ჩარხ/საათი და ფაქტიურად იმუშავა 400 ჩარხ/საათი, ექსტენსიური დატვირთვის კოეფიციენტი შეადგენს $\frac{400}{480} = 0,833$ ანუ 83,3 %-ს.

 402

ჩარხების მოცდენებმა 1125 წუთის განმავლობაში შეადგინა 281 წუთი, მაშინ შერჩევაში მოცდენების ხვედრითი წილი (w) უდრის 0,25 $\left(\frac{281}{1125}\right)$ ანუ 25%. ამ საფუძველზე შეგვიძლია დავადგინოთ შერჩევის საშუალო შეცდომა (μ). იმის გამო, რომ რამდენიმე შემოვლის მიხედვით წარმოებს დაკვირვება სახარატო ჩარხებზე თავისი ბუნებით შერჩევა განმეორებითი დაკვირვებაა (ვინაიდან ერთი და იგივე ჩარხი შეიძლება რამდენიმეჯერ მოხვდეს დაკვირვებაში), რის გამო ვიყენებთ მექანიკური წესით განმეორებითი შერჩევითი დაკვირვების საშუალო შეცდომის ფორმულას:

$$\mu = \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{225}} = \pm 0,028 \qquad \text{ანუ } 2,8\%.$$

აქედან საზღვრითი შეცდომა:

$$\Delta = 3(\pm 0,028) = 0,084 \qquad \text{ანუ } \pm 8,4\%.$$

მაშასადამე 0,997 ალბათობით შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ სახარატო ჩარხების უბანზე მოწყობილობის მოცდენები ცვლაში მერყეობს $0,25 \pm 0,084$ ფარგლებში ანუ 16,6%-დან 33,4%-მდე. ეს კი ცხადჰყოფს, რომ მოწყობილობა დროში დატვირთულია მხოლოდ 66,6–83,4%-ის ფარგლებში, რაც საკმარისად დაბალი მაჩვენებელია. სამომენტო შერჩევითი დაკვირვება ფართოდ შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა სახის სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების შესწავლის საქმეშიაც. მათ შორის დიდ მნიშვნელობას იძენს საბაჟო ტვირთების მოძრაობის, აგრეთვე საბაჟო შემოსავლების დადგენისა და კონტროლისათვის ასეთი სახის შერჩევითი დაკვირვების გამოყენება, რომელიც არ მოითხოვს დროისა და სახსრების დიდ დანახარჯებს.

10. კომბინირებული შერჩევითი დაკვირვებანი

ზემოთ განხილული შერჩევითი დაკვირვებანი პრაქტიკაში იშვიათად გამოიყენება დამოუკიდებელი, ‘‘სუფთა’’ სახით. სოციალურ-ეკონომკური მოვლენებისა და პროცესების შესწავლისას ისინი უმთავრესად კომბინირებული სახით პოულობს გამოყენებას. მაგალითად, სერიული და ტიპური შერჩევა გამოიყენება საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური წსების კომბინაციაში და ა.შ. ამ შემთხვევაში გენერალური ერთობლიობა ჯერ სერიებად ან ტიპურ ჯგუფებად დალაგდება და შემდგომ თითოეული, ვთქვათ, სერიიდან შემთხვევითი ან მექანიკური წესით შეირჩევა ცალკეული ერთეულები. **ასეთ შერჩევას ორ საფეხურიანი კომბინირებული შერჩევითი დაკვირვებანი ეწოდება.** საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური წესით უშუალოდ პირველივე ეტაპზე შესასწავლი ერთეულების ამორჩევისას საქმე გვაქვს ერთსაფეხურიან შერჩევასთან.

კომბინირებული შერჩევითი დაკვირვებანი შეიძ;ლება იყოს, აგრეთვე, **მრავალსაფეხურიანი**. მაგალითად, გლეხურ შინამეურნეობათა საბიუჯეტო გამოკვლევები ხშირად ორსაფეხურიანი შერჩევით წარმოებს. პირველ საფეხურზე საკუთრივ-შემთხვევითი წესით ხდება რაიონების შერჩევა, მეორეზე-გელეხების შერჩევა მექანიკური წესით წარმოებს. ტიპური შერჩევისაგან განსხვავებით, რომლის პირობებში შერჩევით ერთობლიობაში ყველა ტიპური ჯგუფი ხვდება, მრავალსაფეხურიანი შერჩევის დროს ჯგუფების მთლიანი რაოდენობიდან მხოლოდ გარკვეული ნაწილის შერჩევა წარმოებს.

მრავალსაფეხურიანი კომბინირიბული შერჩევითი დაკვირვებებისაგან განსხვავებით გამოიყენება, აგრეთვე, ე.წ. **მრავალფაზური კომბინირებული** შერჩევითი დაკვირვებანი. მრავასაფეხურიანი კომბინირებული შერჩევითი დაკვირვების დროს დაკვირვების ერთული თითოეულ საფეხურზე

განსხვავებულია, ხოლო მისგან განსხვავებით მრავალფაზური კომბინირებული დაკვირვების დროს ყველა საფეხურზე ერთსა და იგივე ერთეულზე ხდება დაკვირვება. ასეა, მაგალითად, მოსახლეობის სრული და არასრული აღწერის შემთხვევაში, როცა ერთი სახეობის აღწერის მასალები გამოიყენება შემდგომ ეტაპზე, სხვა სახის აღწერის მასალების დასაზუსტებლად და ა.შ.

მრავალსაფეხურიანი კომბინირებული შერჩევითი დაკვირვების საშუალო შეცდომას (μ) განსაზღვრავს თითოეულ საფეხურზე დაშვებული შეცდომის სიდიდე და საფეხურთა რაოდენობა. მაგალითად, თუ ორსაფეხურიანი კომბინირებული შერჩევითი დაკვირვების პირველ ეტაპზე წარმოებს სერიების გამოყოფა, ხოლო მეორეზე-თითოეული სერიიდან საკუთრივ-შემთხვევითი ან მექანიკური წესით დასაკვირვებელი ერთეულების ამორჩევა, საშუალო შეცდომა განისაზღვრება სერიული და საკუთრივ-შემთხვევითი საშუალო შეცდომების ჯამით. კერძოდ, რაოდენობრივი ნიშნის საშუალო მნიშვნელობისათვის:

1) განმეორებითი შერჩევისას (10.35) და (10.62) ფორმულების საფუძველზე გვექნება:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\delta^2}{r}} \qquad (10,72),$$

1) განუმეორებელი შერჩევისას (10.37) და (10.63) ფორმულების საფუძველზე

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\delta^2}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \qquad (10.73).$$

წილობრივი ნიშნისათვის:

1) განმეორებითი შერჩევისას (10.39) და (10.64) ფორმულების საფუძველზე,

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \frac{\delta_w^{\ 2}}{r}} \qquad (10.74),$$

1) განუმეორებელი შერჩევისას (10.41) და (10.65) ფორმულების საფუძველზე.

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right) + \frac{\delta_w^{\ 2}}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)} \qquad (10.75).$$

11. შერჩევის საჭირო რიცხვის განსაზღვრა

საშუალო და საზღვრითი შეცდომების განხილვიდან ნათლად ჩანს, რომ შერჩევითი ერთობლიობის რეპრეზენტატულობისა და დაშვებული შეცდომების ხარისხი დიდადაა დამოკიდებული შერჩევის რიცხვზე. შერჩევის მცირე რიცხვი ვერ უზრუნველჰყოფს გენერალური ერთობლიობის ადექვატურად ამსახველი მაჩვენებლების მაღალი სიზუსტის ხარისხს. ეს უკანასკნელი მიიღწევა შერჩევის რიცხვის გადიდების გზით. მაგრამ მეტისმეტად დიდი რიცხვის პირობებში, სამაგიეროდ იზრდება დაკვირვების დროისა და დანახარჯების რაოდენობა. ამიტომ შერჩევითი დაკვირვების მოსამზადებელ ეტაპზე დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა ენიჭება შერჩევის ოპტიმალური რიცხვის დადგენას. სტატისტიკაში შერჩევის საჭირო, საკმარისად აუცილებელ, ოპტიმალურ რიცხვს განსაზღვრავენ შერჩევის საზღვრითი შეცდომის

ფორმულებიდან, რომელთა შესაბამისი განტოლებანი ამოიხსნება n-ის ანუ შერჩევის რიცხვის, როგორც უცნობის მიმართ.

საკუთრივ-შემთხვევითი და მექანიკური წესებით ჩატარებული შერჩევის დროს საზღვრითი შეცდომები (10.36), (10.38), (10.40) და (10.42) ფორმულებით განისაზღვრება. თუ ამ ფორმულების შესაბამის ტოლობათა ორივე მხარეს

კვადრატში ავიყვანთ და ელემენტალურ გარდაქმნებს მოვახდენთ, მივიღებთ შერჩევის რიცხვის გასაანგარიშებელ ფორმულებს.

მაგალითად, (10.36) ტოლობის მიმართ გვექნება:

$$\Delta = t\sigma = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \qquad \Delta^2 = \frac{t^2\sigma^2}{n}.$$ აქედან

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}. \qquad (10.76).$$

ასეთი წესებით მიიღება ოპტიმალური შერჩევის რიცხვის გასაანგარიშებელი ფორმულები დანარჩენი სახეობისა და წესების შერჩევითი დაკვირვებისათვის. თუ ამ ფორმულებს წარმოვადგენთ ცხრილის[1] სახით, გვექნება:

შერჩევის ოპტიმალური რიცხვის განმსაზღვრელი ფორმულები

ცხრილი №59

შერჩევის წესები	შესაფასებელი პარამეტრი	განმეორებითი შერჩევა	განუმეორებელი შერჩევა
შაკუთრივ–შემთხვევითი და მექანიკური	საშუალო	$n = \frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}$	$n = \frac{Nt^2\sigma^2}{N\Delta^2 + t^2\sigma^2}$
	ხვედრითი წილი	$n = \frac{t^2 pq}{\Delta^2}$	$n = \frac{Nt^2 pq}{N\Delta^2 + t^2 pq}$
ტიპური	საშუალო	$n = \frac{t^2\overline{\sigma_i}^2}{\Delta^2}$	$n = \frac{Nt^2\overline{\sigma_i}^2}{N\Delta^2 + t^2\overline{\sigma_i}^2}$
	ხვედრითი წილი	$n = \frac{t^2\overline{p_i q_i}}{\Delta^2}$	$n = \frac{Nt^2\overline{p_i q_i}}{N\Delta^2 + t^2\overline{p_i q_i}}$
სერიული	საშუალო	$r = \frac{t^2\delta^2}{\Delta^2}$	$r = \frac{Nt^2\delta^2}{N\Delta^2 + t^2\delta^2}$
	ხვედრითი წილი	$r = \frac{t^2\delta^2 w}{\Delta^2}$	$r = \frac{Nt^2\delta_w^2}{N\Delta^2 + t^2\delta_w^2}$

სერიული შერჩევის პირობებში ამოირჩევა არა ცალკეული ინდივიდუალური ერთეულები, არამედ სერიები. ამიტომ

[1] ცხრილი მოტანილია წიგნიდან: Òåîðèÿ ñòàòèñòèêè: ó÷åáíèê ïîä ðåäàêöèåé ïðîô. Ã. Ë. Ãðîìûêî.- Ì! ÈÍÔÐÀ-Ì Ìîñêâà, 2002, ñòð 163.

სერიული შერჩევის ოპტიმალური რიცხვია არა n, არამედ r - შერჩეული სერიების რიცხვი, ხოლო გენერალური სერიების რაოდენობაა N.

როგორც ჩანს, შერჩევის საჭირო რიცხვის გასაანგარიშებლად საჭიროა პარამეტრები:

t–სტიუდენტის კრიტერიუმი, ნდობის ინტერვალი, მოიძებნება განსაზღვრული ალბათობით შესაბამის ცხრილში (იხ. დანართი 2);

N - გენერალური ერთობლიობის რიცხვი, რომელიც წინასწარაა ცნობილი;

σ , pq ან რაც იგივეა $w(1-w)$–დისპერსიაა შესაბამისად საშუალო და წილობრივი ნიშნებისათვის.

ეს უკანასკნელი მაჩვენებლები შერჩევამდე ჩვენთვის უცნობია, მაგრამ შერჩევის საჭირო რიცხოვნობის გასაანგარისებლად სტატისტიკაში მიღებულია ავიღოთ ისინი წინასწარ საცდელი წესით ჩატარებული გამოკვლევის ან მთლიანი დაკვირვების მონაცემების საფუძველზე. მაგალითად, თუ წინასწარი მთლიანი გამოკვლევებით ცნობილია ვარიაციის კოეფიციენტი, მაშინ მის საფუძველზე გაანგარიშებული დისპერსია იქნება:

$$\sigma^2 = \frac{V^2\left(\overline{X}\right)^2}{100^2}, \qquad (10.77).$$

ამის გარდა შესასწავლი ნიშნის გენერალურ ერთობლიობაში ნორმალური განაწილების კანონის შესაბამისი განაწილების შემთხვევაში დადგენილია, რომ ვარიაციის გაქანება (R) 6-ჯერ მეტია საშუალო კვადრატულ გადახრაზე (σ) ე.ი. $R = 6\sigma$.

R - გენერალურ ერთობლიობაში კი წინასწარაა ცნობილი,

საიდანაც $\sigma^2 = \left(\frac{R}{6}\right)^2$.

წილობრივი ნიშნის შემთხვევაში დისპერსია $pq = w(1-w)$

 406

თითოეული ალტერნატიული ნიშნის მაქსიმალური ხვედრითი წილის (0,5) გათვალისწინებით 0,25-ს უდრის. ეს სავარაუდო მაჩვენებლები გამოიყენება შერჩევის საჭირო რიცხვის დასადგენად სხვადასხვა წესისა და სახის შერჩევითი დაკვირვების ჩასატარებლად გაწეული საორგანიზაციო პერიოდის საწყის ეტაპზე.

მაგალითი: რეგიონში 15000 შინამეურნეობაა, რომელთა წლიური შემოსავლების მიხედვით ვარიაციის კოეფიციენტმა შეადგინა 80%.

რამდენი შინამეურნეობა უნდა შევისწავლოთ წლიური შემოსავლების დადგენის მიზნით მთლიანად მთელს რეგიონში თუ 0,9973 ალბათობით საზღვრითმა შეცდომამ (Δ) არ უნდა გააჭარბოს 5%-ს?

0,9973 ალბათობით სტუდენტის კრიტერიუმი $t=3-$ს (იხ. დანართი 2). თუ ჩვენ ჩავატარებთ განმეორებით შერჩევას, მაშინ დასაკვირვებელი ერთეულების რიცხვი შეადგენს:

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}=\frac{3^2\times 80^2}{5^2}=2304 \text{ ერთეულს.}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში შერჩევა 15,4%-იანია $\left(\frac{2304}{15000}\right)$, რაც უზრუნველყოფს მიღებული შედეგების მაღალი სიზუსტისა და საიმედობის ხარისხს.

12. მცირე შერჩევა

ამ თავის მე-3 და მე-4 პარაგრაფებში **ი. ბერნულის, პ. ჩებიშევის, ა. ლიაპუნოვის, პ. ლაპლასისა** და სხვათა გამოკვლევების ბაზაზე ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ დაკვირვების დიდი რიცხვის პირობებში შერჩევითი მახასიათებლები (საშუალო არითმეტიკული, დისპერსია და სხვა) ძალიან მცირედით განსხვავდებიან გენერალური ერთობლიობის

 407

შესაბამისი მახასიათებლებისაგან. ამიტომ თამამად შეგვიძლია შერჩევის საფუძველზე ვიმსჯელოთ მთლიან სტატისტიკურ ერთობლიობაზე. მაგრამ სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების შესწავლის პრაქტიკაში ,,დიდ'' შერჩევებთან ერთად, როდესაც დაკვირვების რიცხვი 100-ს აჭარბებს, დროისა და სახსრების ეკონომიის მიზნით ძალიან ხშირად მცირე შერჩევებიც გამოიყენება.

მცირე შერჩევას სტატისტიკაში ისეთ შერჩევით გამოკვლევებს უწოდებენ, რომლის პირობებში მთლიანი ერთობლიობის არა უმეტეს 30 ერთეული შეისწავლება $(n \leq 30)$. ვინაიდან შერჩევის რიცხვი მცირეა, ამიტომ ,,დიდი'' შერჩევისაგან განსხვავებით ვერ ვიტყვით, რომ შერჩევითი დისპერსია შეიძლება გამოვიყენოთ გენერალური დისპერსიის შესაფასებლად. ამასთან ერთად თუ ,,დიდ'' შერჩევებში შერჩევითი საშუალოს $(\tilde{X})$ გენერალური საშუალოსაგან $(\tilde{X}_0)$

ნორმირებული გადახრის $\left(t = \dfrac{\tilde{X} - \overline{X}}{\sigma}\right)$ დადგომის ალბათობა

ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს, იმის მიუხედავად თუ როგორია გენერალურ ერთობლიობაში ერთეულთა განაწილება, მცირე შერჩევებში გენერალურ ერთობლიობაში ერთეულთა განაწილების ხასიათი გამოკვეთილად ზემოქმედებს საშუალო შეცდომის დადგომის ალბათობაზე. ამიტომ საჭირო იყო მცირე შერჩევებისათვის მეცნიერებას შეემუშავებინა შესაბამისი თეორია, რაც მნიშვნელოვან პრაქტიკულ გამოყენებას ჰპოვებდა. ასეთი თეორია შეიმუშავა ინგლისელმა მათემატიკოსმა **ვ. გოსეტმა** (სტიუდენტის ფსევდონიმით), რომელმაც 1908 წელს მცირე შერჩევებისათვის შერჩევითი საშუალოს გენერალური საშუალოსაგან ნორმირებული გადახრისა (t) და შესაბამისი ალბათობების განაწილების კანონი შეიმუშავა. ამ კანონს **სტიუდენტის განაწილების** სახელი ჰქვია. შემდგომში მცირე შერჩევის თეორია განავითარა **რ. ფიშერმა.**

სტიუდენტის[1] განაწილების კანონის მიხედვით შერჩევითი საშუალოს ($\tilde{x}$) გენერალური საშუალოსაგან $\left(\overline{X}_0\right)$ ნორმირებული გადახრის $\left(t = \dfrac{\tilde{X} - \overline{X}_0}{\sigma}\right)$ განაწილების სიმჭიდროვე (სიმკვრივე) განისაზღვრება ფორმულით:

$$S(t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\sqrt{\Pi(n-1)} \times \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \qquad (10.78),$$

სადაც $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$ და $\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ ე.წ. გამა-ფუნქციებია;

n – შერჩევის რიცხვი.

მათემატიკურ სტატისტიკაში მტკიცდება, რომ ნებისმიერი n დადებითი რიცხვისათვის გამა-ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} X^{n-1} e^{-X} dX = (n-1)! \qquad (10.79).$$

კერძო შემთხვევებში:

$\Gamma(1) = 1; \Gamma(2) = 1; \Gamma(3) = 2!; \Gamma(4) = 3! = 6$ და ა.შ.

გამა-ფუნქციის თვისებებია:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi}$$

409

$$1)\quad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n); \qquad\qquad 2)\quad \begin{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

ამიტომ გამა-ფუნქციის პირველი კერძო შემთხვევა და პირველი მისი თვისება იძლევა $\Gamma(1)=0!=1$.

[1]È. Ã. Âåíöêèé, Ã. Ñ. Êèëüäèøåâ, Òåîðèÿ âåðîÿòíîñòåé è ìàòåìàòè÷åñêàÿ ñòàòèñòèêà, Ì: “Ñòàòèñòèêà” 1975, ñòð. 247-248.

 410

გამა-ფუნქციის თვისება საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ $\Gamma(n)$ $\frac{1}{2}$–ის ჯერადი n-ის შემთხვევაში. მაგალითად.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\Pi}}{2}.$$

აქედან შეიძლება ვთქვათ, რომ თუ (10.79) ფორმულაში n-ის ნაცვლად ჩავსვავთ თანმიმდევრულად $\frac{n}{2}$ და $\frac{n-1}{2}$, მივიღებთ გამა-ფუნქციის მნიშვნელობებს.

მათემატიკურ სტატისტიკაში მტკიცება[1], აგრეთვე, თეორემა იმის შესახებ, რომ "ალბათობა იმისა, შემთხვევითი სიდიდე ინტერვალში (a, b) მიიღებს რომელიმე მნიშვნელობას, უდრის ამ ინტერვალში გავრცელებული ალბათობის სიმკვრივის განსაზღვრულ ინტეგრალს:

$$p(a \le \mathrm{X} \le b)=\int_a^b \varphi(\mathrm{X})dx \qquad (10.80)$$

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ შერჩევითი საშუალოს გენერალური საშუალოსაგან ნორმირებული გადახრის (t) ალბათობა განისაზღვრება ინტეგრალით:

$$S(t)=\int_{\infty}^{+t}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\Pi(n-1)}}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\Pi(n-1)}}\int_{\infty}^{+t}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}dt$$

(10.81).

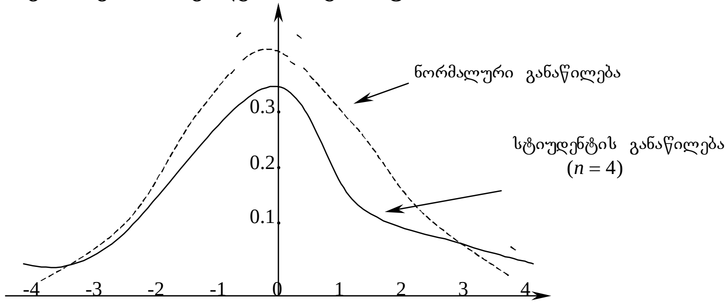
 411

[1]À. È. Êàðàñåâ, îñíîâû ìàòåìàòè÷åñêîé ñòàòèñòèêè, Ðîñâóçèçäàò, 1962, ñòð. 53

 412

სადაც $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\Pi(n-1)}}$ არის მუდმივი თანამამრავლი.

თუ ნორმალურ და სტიუდენტის განაწილებას გრაფიკულად გამოვსახავთ, მივიღებთ ასეთ სურათს ($n=4$)



ნახ. 28. ნორმალური და სტიუდენტის განაწილების მრუდეები ($n=4$-ის შემთხვევაში).

როგორც ნახაზიდან ჩანს შერჩევითი რიცხვის (n) გადიდებასთან ერთად სტიუდენტის განაწილების მრუდი თანდათან უახლოვდება ნორმალური განაწილების მრუდს.

(10.81) ფორმულით სტიუდენტის განაწილების ალბათობათა გაანგარიშებანი ერთობ რთული პროცესია. მაგრამ ამ გაანგარიშებათა თავიდან აცილების მიზნით სტიუდენტის განაწილება t და n პარამეტრების მნიშვნელობათა შესაბამისად ტაბულირებულია. მოვიტანთ ზოგიერთი მათგანის ამონაბეჭდს:

413

ალბათობათა განაწილება მცირე შერჩევის პირობებში ნდობის ინტერვალისა (t) და შერჩევის მოცულობის (n) შესაბამისად[1]

ცხრილი №60.

t \ n	5	10	15	20	∞
0,5	0,356	0,372	0,376	0,378	ო,383
0,8	0,532	0,556	0,564	0,566	0,576
1,0	0,626	0,656	0,666	0,670	0,683
1,5	0,792	0,832	0,844	0,850	0,866
2,0	0,884	0,924	0,934	0,940	0,954
2,6	0,940	0,972	0,980	0,982	0,991
3	0,960	0,984	0,990	0,992	0,997

როგორც ცხრილიდან ჩანს, შერჩევის მოცულობის (n) გადიდებასთან დაკავშირებით ალბათობანი დიდდება და უახლოვდება ნორმალური განაწილების კანონის შესაბამის პარამეტრებს.

მაგალითი. ვთქვათ შერჩევითი დაკვირვება ჩავატარეთ 10 საწარმოში, რომლებშიაც პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულაბამ ლარებში შეადგინა: 5,6; 6,0; 2,5; 4,0; 3,5; 3,2; 3,0;5,0; 4,5; 3,5.

ვიპოვოთ საშუალო თვითღირებულება:

$$\tilde{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Xi}{n} = \frac{5{,}6 + 6{,}0 + 2{,}5 + 4{,}0 + 3{,}5}{10} +$$

$$+ \frac{3{,}2 + 3{,}0 + 5{,}0 + 4{,}5 + 3{,}5}{10} = 4{,}08 \quad \text{ლარი.}$$

[1]ამონაბეჭდი მოტანილია წიგნიდან: À. È. Êàðàñåâ, Îñíîâû ìàòåìàòè÷åñêîé ñòàòèñòèêè, Ðîñâóçèçäàò, 1962, ñòð. 354 ($n = \infty$-თვის ალბათობანი მოტანილია ნორმალური განაწილების კანონის შესაბამისად)

 414

შერჩევითი დისპერსია

$$\sigma_{\tilde{x}}^2 = \frac{(5.6-4.08)^2+(6-4.08)^2+(2.5-4.08)^2}{10} +$$

$$+\frac{(4.0-4.08)^2+...+(3.5-4.08)^2}{10} = 1.18 \quad \text{ლარი.}$$

აქედან მცირე შერჩევის საშუალო შეცდომა, რომელიც განსხვავებით ‘‘დიდი’’ შერჩევების საშუალო შეცდომისაგან, განისაზღვრება ფორმულით $\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,18}{10-1}} = 0,362$ ლარი.

60-ე ცხრილიდან, მაგალითად, ნდობის კოეფიციენტია $t = 0.5$და შერჩევის რიცხვის $n = 10$ პირობებში ალბათობა $S(t)$ უდრის 0,372-ს. მოცემული ალბათობით $(0,372)$ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ განსხვავება შერჩევითი ერთობლიობისა და გენერალურ ერთობლიობის საშუალოებს შორის იმოძრავებს $-0,5\mu$–დან $+0.5\mu$-მდე, ანუ თავისი აბსოლუტური მნიშვნელიბით არ გადააჭარბებს 0,181 $(0,5\times 0,362)$ ლარს. შესამჩნევად იცვლება ეს საზღვრები ნდობის ინტერვალის გადიდება – შემცირებასთან დაკავშირებით. მაგალითად, $t=3$ პირობებში, როგორც 60-ე ცხრილიდან ჩანს, ალბათობა შეადგენს 0,984-ს. ამ შემთხვევაში შერჩევით და გენერალურ საშუალოებს შორის აბსოლუტური სხვაობა 0,984 ალბათობით არ გადააჭარბებს $(0,362\times 3)$ 1,08 ლარს. მაშასადამე მთელს მცირე საწარმოებში პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულება იმოძრავებს

$\left[\tilde{X} - \Delta(t\mu)\right] \le \overline{X}_0 \le \left[\tilde{X} + \Delta(t\mu)\right] = (4,08-1,08)$-დან

$(4,08+1,08)$-მდე ანუ 3 ლარიდან 5,11 ლარამდე.

ცხრილში მოცემული $S(t)$ ალბათობანი გვიჩვენებს, რომ

სხვაობანი შერჩევით და გენერალურ საშუალოებს შორის არ გადააჭარბებს t –ჯერად $(t\mu)$ შერჩევის საშუალო შეცდომას. შეიძლება დაისვას საწინააღმდეგო მოვლენის დადგომის ალბათობის საკითხიც. მაგალითად, ალბათობა იმისა, რომ ეს სხვაობანი გადააჭარბებს t –ჯერად შერჩევის საშუალო შეცდომას. ცხადია ასეთი ალბათობა უდრის $1-S(t)$.ჩვენს მაგალითზე ალბათობა იმისა, რომ მთლიანად მცირე საწარმოებში პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულებასა და შერჩევით საწარმოებში პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულებას შორის განსხვავებანი გადააჭარბებს $(t\mu)=3\times 0{,}362=$ ლარს, შეადგენს 1-0,9 84=0,0016-ს.
1,08

მაგალითი. საქართველოში განუბაჟებელი ტვირთის შესწავლის მიზნით მცირე შერჩევის გზით საკუთრივ-შემთხვევითი წესით ავარჩიეთ 10 საბაჟო, სადაც დადგინდა, რომ კონტრაბანდული ტვირთის მოცულობამ შეადგინა 20%. განვსაზღვროთ იმის ალბათობა, რომ გენერალურ ერთობლიობაში ანუ საქართველოს ყველა საბაჟო-გამშვებ პუნქტში განუბაჟებელი ტვირთის ხვედრითი წილი არ იქნება 20%-ზე ნაკლები და არ გადააჭარბებს 30%-ს. როგორც ჩანს ამოცანის პირობიდან მოცემულია, საზღვრითი შეცდომა $\Delta=t\mu=10\%$ ანუ 0,10-ს კოეფიციენტის სახით. შერჩევის საშუალო შეცდომას არ ვანგარიშობთ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე. ვინაიდან განუბაჟებელი ტვირთის მოცულობის ხვედრითი წილი შერჩევაში 20%-ია, ამიტომ $w=0{,}20$, ხოლო განბაჟებული ტვირთის ხვედრითი წილი იქნება 80% ანუ 0,8. საშუალო შეცდომა

$$\mu=\sqrt{\frac{w(1-w)}{n-1}}=\sqrt{\frac{0{,}2\times 0{,}8}{10-1}}=0{,}13$$

(10.40) ფორმულიდან $\Delta=t\mu$ განვსაზღვროთ t.

416

$$t = \frac{\Delta}{\mu} = \frac{0,10}{0,13} = 0,77$$

417

60-ე ცხრილიდან $0{,}77 \approx 0{,}8 = t$ და $n = 10$ მახასიათებლების ალბათობა შესაბამისი სვეტისა და სტრიქონის გადაკვეთაში უდრის 0,556, ე.ი. $S(t) = 0{,}556$. მაშასადამე, საქართველოს ყველა საბაჟო პუნქტზე განუბაჟებელი ტვირთის ხვედრითი წილის ცვალებადობის 20%-დან 30%-მდე ვარაუდი მხოლოდ 0,556 ალბათობით შეგვიძლია. აქედან ცხადია, რომ $1 - S(t)$ ანუ 1–0,556=0,444 ალბათობით, ე.ი. 44,4%-ით ის შეგვიძლია გავითვალისწინოთ, რომ განუბაჟებელი ტვირთის ხვედრითი წილი საქართველოს საბაჟო გამშვებ პუნქტებში გაცდება აღნიშნულ საზღვრებს და შეიძლება გადააჭარბოს 30%-ს.

13. შერჩევითი მახასიათებლების გენერალურ ერთობლიობაზე გავრცელების ხერხები

შერჩევითი ერთობლიობის საფუძვლიანი შესწავლის ბოლო ეტაპზე საჭიროა მიღებული შედეგების გენერალურ ერთობლიობაზე გავრცელება. ამისათვის პირველ რიგში კიდევ ერთხელ უნდა შევამოწმოთ, ხომ არ შეიცვალა რაიმე ისეთი გენერალურ ერთობლიობაში, რომელიც არარეპრეზენტანტულს ხდის გაანგარიშებულ მაჩვენებლებს. მაგალითად, თუ გვინდა ადმინისტრაციულ–ტერიტორიული რაიონის რაიმე სასოფლო-სამეურნეო კულტურის წლიური საერთო მოსავლის დადგენა და ამისათვის მოსავლიანობა შევისწავლეთ შერჩევითი დაკვირვების რამდენიმე რეგიონში, საჭიროა დაკვირვების დამთავრების მომენტისათვის შევამოწმოთ ხომ არ შეიცვალა რაიონის საზღვრები, ან კიდევ ხომ არ დააზიანა სასოფლო-სამეურნეო სავარგულები სტიქიურმა მოვლენებმა (სეტყვა, კოკისპირული წვიმები, წყალდიდობანი და ა.შ.) და სხვა.

გულდასმით შემოწმების შემდეგ შეგვიძლია შერჩევითი დაკვირვების შესწავლის შედეგები გავავრცელოთ გენერალურ ერთობლიობაზე. ამ მიზნით სტატისტიკაში გამოიყენება ორი

418

მეთოდი: **პირდაპირი გადაანგარიშებისა და კოეფიციენტების მეთოდები.** პირდაპირი გადაანგარიშების მეთოდი გულისხმობს შერჩევითი მახასიათებლის (მაგალითად, საშუალო მოსავლიანობა, საშუალო წველადობა და სხვა) გამრავლებას გენერალური ერთობლიობის ერთეულთა რაოდენობაზე. მაგალითად, თუ შერჩევითი გამოკვლევით დადგინდა, რომ ხორბლის საშუალო მისავლიანობა 120 ც/ჰა-ს ანუ 12 ტონას უდრის და რაიონში სულ 40000 ჰექტარი ხორბლის ნათესებია, მაშინ გამართლებულია ვარაუდი იმის შესახებ, რომ მოცმულ რაიონში ხორბლის საერთო წლიურმა მოსავალმა უნდა შეადგინოს $\left(\frac{40000 \times 120}{100}\right) = 480000$ ტონა.

შეიძლება აგრეთვე, გენერალური ერთობლიობის საერთო საძიებელი მაჩვენებელი დავადგინოთ გარკვეულ საზღვრებში, ინტერვალში. ჩვენს შემთხვევაში თუ საზღვრითი შეცდომა (Δ) ერთ ტონას შეადგენს, მაშინ საშუალო მოსავლიანობა გენერალურ ერთობლიობაში იმოძრავებს $\tilde{X} \pm \Delta = (12 \pm 1)$ ტონის საზღვრებში. მაშასადამე რაიონში განსაზღვრული ალბათობით მოცემულ წელს უნდა მივიღოთ $440000(40000 \times 11)$ ტონიდან $520000(40000 \times 13)$ ტონანდე ხორბალი. ზოგადად გენერალური ერთობლიობის საერთო მაჩვენებლის მოძრაობის საზღვრები ასე ჩაიწერება:

$$N\left(\tilde{X} - \Delta\right) \leq N\overline{X} \leq N\left(\tilde{X} + \Delta\right) \qquad (10.82)$$

სადაც N –გენერალური ერთობლიობის რიცხვი,

$\tilde{X}$ –შერჩევითი საშუალო,

Δ –საზღვრითი შეცდომა.

კოეფიციენტების მეთოდი გამოიყენება მთლიანი დაკვირვების შედეგების დასაზუსტებლად. ამ მეთოდს

ხშირად მიმართავენ მოსახლეობის აღწერების ჩატარებისას. თუ მაგალითად, მთლიანი აღწერით მოსახლეობის რიცხოვნობამ რაიონში შეადგინა 10000 კაცი, ხოლო იმავე რაიონში შერჩევითმა დაკვირვებამ აჩვენა სულ 9000 კაცი, მაშინ კოეფიციენტით (0,9) $K_{\text{შესწ.}} = \frac{9000}{10000} = 0{,}9$ უნდა შესწორდეს სხვა რაიონების მთლიანი დაკვირვების მონაცემებიც.

თავი XI. ინდექსები ეკონომიკასა და ბიზნესში

1. ინდექსების ცნება და გამოყენება ეკონომიკურ გამოკვლევებში

ინდექსები ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკაში, ბიზნესსა და მენეჯმენტში. რა არის ინდექსი და რისთვის გამოიყენება ის? ამის ახასნელად საჭიროა ეკონომიკაში, ბიზნესსა და მენეჯმენტში გავარჩიოთ ორი სახის ერთობლიობა: ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი ელემენტებისაგან შედგენილი ერთობლიობანი. ერთგვაროვან ელემენტებს მოიცავს, მაგალითად, ნათესი ფართობების ერთობლიობა, პირუტყვის ერთობლიობა და ა.შ. ასეთი ერთობლიობის ელემენტები პირდაპირ იკრიბება და მათი დინამიკა შეიძლება დავახასიათოთ მთელი ნაკრები ერთობლიობის ან ერთობლიობის ერთ ერთეულზე მათი საშუალოს მეშვეობით. ამისათვის საჭიროა მოცემული პერიოდის (საანგაროშო პერიოდი) მაჩვენებელი შევაფარდოთ წინა შესაბამისი პერიოდის (საბაზისო პერიოდი) მაჩვენებელს. მაგრამ მეორე სახის ერთობლიობა, რომელიც სხვადასხვა სახის (არაერთგვაროვან) ელემენტებს შეიცავს (წარმოებული ან მოხმარებული პროდუქციის საერთო რაოდენობა, გაყიდული საქონლის საერთო მოცულობა და ა.შ.), პირდაპირ არ შეიძლება შევადაროთ წინა პერიოდების მონაცემებს, ვინაიდან ასეთი ერთობლიობის არაერთგვაროვანი ელმენტების შეკრება არ შეიძლება. შეუძლებელია, მაგალითად, გაყიდული სხვადასხვა სახის საქონლის (ფეხსაცმელი, ტანსაცმელი, ავეჯი და ა.შ.) შეკრება. სწორედ ასეთი არაერთგვაროვანი ერთობლიობის დინამიკის დახასიათებისთვის გამოიყენება ინდექსები ეკონომიკაში. **ინდექსი ლათინური სიტყვა "Index"–ისგანაა წარმოშობილი და მაჩვენებელს ნიშნავს.** ზემოთმოყვანილი არაერთგვაროვანი ელემენტების შეკრება არ შეიძლება იმის გამო, რომ მათ სხვადასხვა ნივთობრივ-

444

ნატურალური სახე აქვს. მაგრამ ყველა მათ აერთიანებს ის, რომ ისინი შრომის პროდუქტებია, რაც თავის გამოხატულებას პოულობს ღირებულებაში.

ამრიგად, ღირებულებით, ფასობრივ გამოსახულებაში არაერთგვაროვანი პროდუქტების დინამიკა შეიძლება ადვილად გავიგოთ საანგარიშო პერიოდის საბაზისოსთან შედარებით. მაგრამ ღირებულებითი გამოსახულება მიიღება პროდუქციის ფიზიკური რაოდენობის მათ ფასებზე გადამრავლებით. აქედან, ცხადია ასეთი მაჩვენებლების დინამიკა ორი ფაქტორით განისაზღვრება: პროდუქციის ფიზიკური მოცულობით (ფეხსაცმელების რაოდენობა წყვილებში, ავტომობილების რაოდენობა ცალებში და ა.შ.) და ერთეულის ფასებით. ამიტომ ერთ-ერთი ფაქტორის გავლენის გასაზომავად საჭიროა მეორე ფაქტორი დავტოვოთ უცვლელად. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტას ემსახურება **ინდექსების გამოყენება ეკონომიკაში, ბიზნესსა და მენეჯმენტში.**

2. ინდექსების სახეები

ინდექსების ასაგებად სტატისტიკაში გამოყენებულია შესაბამისი სიმბლოები. მათ შორის q_1 და q_0–შესაბამისად საანგარიშო და საბაზისო პერიოდების პროდუქციის ან საქონლის ფიზიკური მოცულობა; p_1 და p_0–პროდუქციის ან საქონლის ერთეულის ფასი საანგარიშო და საბაზისო პერიოდებში; c_1 და c_0 პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულება; t_1 და t_0 პროდუქციის ერთეულის შრომატევადობა საანგარიშო და საბაზისო პერიოდებში; J საერთო ინდექსი; i–ინდივიდუალური ინდექსი.

ინდექსები არის ორი სახის: ინდივიდუალური და საერთო. ინდივიდუალური ინდექსები ახასიათებს ამა თუ იმ ერთობლიობის ცალკეული ელემენტების დინამიკას. ასეთია

 445

მაგალითად, პროდუქციის ფიზიკური მოცულობის ინდივიდუალური ინდექსი.

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}, \qquad (11.1).$$

ფასების ინდივიდუალური ინდექსი:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}, \qquad (11.2).$$

თვითღირებულების ინდივიდუალური ინდქსი:

$$i_c = \frac{c_1}{c_0}, \qquad (11.3).$$

შრომატევადობის ინდივიდუალური ინდქსი:

$$i_t = \frac{t_1}{t_0}, \qquad (11.4).$$

ან მისი მეშვეობით შრომის ნაყოფიერების ინდივიდუალური ინდქსი:

$$t_w = \frac{t_0}{t_1}, \qquad (11.5).$$

საერთო ინდექსის ასაგებად, რომლის ძირითადი ფორმა არის აგრეგატული (**agregoro**–ლათინური სიტყვაა და გაერთიანებას ნიშნავს), გამოიყენება ორი მაჩვენებელი: საინდექსო და თანაზომადობის სიდიდეები. **საინდექსო ეწოდება იმ სიდიდეს**, რომლის დინამიკასაც ვზომავთ, ხოლო თანაზომადობის მაჩვენებელია, რომლის საშუალებითაც იკრიბება საინდექსო სიდიდე. მაგალითად, თუ გვინდა ავაგოთ პროდუქციის ღირებულების, საქონელბრუნვის საერთო ინდექსები, პროდუქციის და საქონლის ფიზიკური რაოდენობა არის საინდექსო სიდიდე, ხოლო, პროდუქციის ან საქონლის ერთეულის ფასი – თანაზომადობის მაჩვენებელი. ინდექსები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$J_{qp} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}, \qquad (11.6)$$

სადაც $\sum q_1 p_1$ და $\sum q_0 p_0$ საანგარიშო და საბაზისო პერიოდების პროდუქციის ან საქონლის ღირებულებაა.

პროდუქციის ფიზიკური მოცულობის აგრეგატული ინდექსი:

$$J_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \qquad (11.7)$$

ფასების აგრეგატული ინდექსი:

$$J_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}, \qquad (11.8).$$

თვითღირებულების აგრეგატული ინდექსი:

$$J_c = \frac{\sum q_1 c_1}{\sum q_1 c_0}, \qquad (11.9).$$

შრომის ნაყოფიერების აგრეგატული ინდექსი:

$$J_w = \frac{\sum q_1 t_0}{\sum q_1 t_1}, \qquad (11.10).$$

ზოგჯერ ანგარიშობენ ფასების შემცირებით მიღებულ ეკონომიას, რაც მიიღება ფასების აგრეგატული ინდექსის მრიცხველსა და მნიშვნელს შორის სხვაობით;

$$\in = \sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 \qquad (11.11)$$

როგორც ჩანს, საინდექსო სიდიდე (პროდუქცია ან საქონელი), ფასების აგრეგატულ ინდექსში—ფასები და ა.შ.) ცვალებადი, ხოლო მეორე, თანაზომადობის მაჩვენებელი უცვლელია რომელიმე პერიოდის (საანგარიშო ან საბაზისო) დონეზე. ამასთან, თუ თანაზომადობის მაჩვენებელი რაოდენობრივია, მოცულობითია, მაშინ, ის უცვლელად დარჩება საანგარიშო პერიოდის დონეზე, ხოლო თუ ხარისხობრივია (თვითღირებულება, ფასი,შრომატევადობა), დარჩება უცვლელად

საბაზისო პერიოდის დონეზე.

აქედან გამომდინარეობს საერთო ანუ აგრეგატული ინდექსის ორი ფუნქცია: **სინთეთიკური და ანალიტიკური.** პირველი ფუნქცია იმაში მდგომარეობს, რომ ერთსა და იგივე ინდექსში ერთიანდება (სინთეზირდება) უშუალოდ არათანაზომადი მოვლენები და პროცესები. მაგალითად, სხვადასხვა სახის საქონლის ფიზიკური რაოდენობა (ხორცი, რძე, ტანსაცმელი, ფეხსაცმელი და სხვა) ან ფასები, რომლებიც არ ხასიათდებიან ადიტიურობითა (შეჯამების) და მულტიპლიკატურობის (ერთმანეთზე გადამრავლების) თვისებებით.

მეორე ფუნქცია—ანალიტიკური ფუნქცია, გამომდინარეობს აგრეგატული ინდექსების ურთიერთ-კავშირიდან. ეს იმაში გამოიხატება, რომ თითოეული საერთო ანუ აგრეგატული ინდექსი შეიძლება დაიშალოს ორ ინდექსად, რომელთაგან თითოეული საერთო მოვლენის განვითარებაზე ამა თუ იმ ფაქტორის ზემოქმედებას ზომავს. (იხ. პარაგრაფი 5) ამ საფუძველზე წარმოებს მოვლენებს შორის ურთუერთკავშირის სტატისტიკური ანალიზი.

3. საშუალო ინდექსები

სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების რაოდენობრივი მხარეების, მათი დროსა და სივრცეში ცვალებადობის შესასწავლად ძალიან ხშირად სტატისტიკა იყენებს საშუალო ინდექსებს. მათ შორის შეიძლება გამოვყოთ საშუალო **არითმეტიკული და საშუალო ჰარმონიული** ინდექსები.

ზოგჯერ მოცემულია ინდივიდუალური ინდექსები და მათ საფუძველზე საჭიროა გავიანგარიშოთ საერთო, აგრეგატული ინდექსი. მაგალითად, საბაზისო პერიოდში საქონელბრუნვამ შეადგინა ხორცზე 120,0 ათასი ლარი, ყველზე 50,0 ათასი ლარი და კარტოფილზე – 32,0 ათასი ლარი. საანგარიშო პერიოდში საბაზისოსთან შედარებით ხორცის ფასები

448

შემცირდა 20%-ით, ყველის გაიზარდა 10% -ით, კარტოფილის ფასი დარჩა უცვლელი. საკითხავია, როგორ შეიცვალა საშუალოდ საქონლის ფასები? აი სწორედ ასეთი შემთხვევებისათვის ვიყენებთ საშუალო არითმეტიკული ინდექსის ფორმულას:

$$J_{\text{საშ. შეწ.}} = \frac{\sum iq_0 p_0}{\sum q_0 p_0}, \qquad (11.12)$$

ჩვენს მაგალითზე:

$$J_{\text{საშ. შეწ.}} = \frac{(120.0\times 0.8)+(1.1\times 50.0)+(32.0\times 1.0)}{120+50+32} = 0.90 .$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ საშუალოდ ფასები საანგარიშო პერიოდში საბაზისოსთან შედარებით შემცირებულია 10%-ით.

სტატისტიკაში ცნობილია აგრეთვე, **სტრუმილინის** შრომის ნაყოფიერების საშუალო შეწონილი ინდექსი, რომელიც გაიანგარიშება ფორმულით:

$$J = \frac{\sum\left(\frac{q_1}{T_1} : \frac{q_0}{T_0}\right) T_1}{\sum T_1},$$ სადაც T_1, q_1 ღირებულების გამოშვებაზე

დახარჯული დროის დანახარჯები; $T_0 - q_0$ ღირებულების პროდუქციის გამოშვებაზე დახარჯული დრო.

ზემოთ მოყვანილი საშუალო შეწონილი არითმეტიკული ინდექსის ფორმულა (11.12) მიიღება საქონელბრუნვის ფიზიკური მოცულობის აგრეგატული ინდექსისაგან:

$$J_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \qquad (11.13),$$

სადაც q_0-ის ნაცვლად ჩასმულია მისი მნიშვნელობა განსაზღვრული ინდივიდუალური ინდექსისაგან:

$$i = \frac{q_1}{q_0};\ q_1 = iq_0 \qquad (11.14),$$

თუ q_0-ის მნიშვნელობას განვსაზღვრავთ პროდუქციის ფიზიკური მოცულობის ინდივიდუალური ინდექსიდან და ჩავსვავთ აგრეგატული ინდექსის მნიშვნელში, გვექნება:

$$J = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum \frac{1}{i} q_1 p_0}, \qquad (11.15).$$

რომელსაც ეწოდება **საშუალო ჰარმონიული ინდექსი.**

4. ინდექსების მწკრივები უცვლელი და ცვალებადი წონებით

ერთ რომელიმე ინდექსში, როგორც ზემოთ დავინახეთ, თანაზომადობის მაჩვენებელი მრიცხველსა და მნიშვნელში ერთი და იგივეა. თუ ინდექსების მწკრივებს ავაგებთ რამდენიმე წლისათვის, მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ ინდექსები ცვალებადი და უცვლელი წონებით. მაგალითად, თუ ხარისხობრივი მაჩვენებლის ინდექსებს ავაგებთ, მაშინ მივიღებთ ინდექსების მწკრივებს ცვალებადი წონებით, ვინაიდან თითოეულ ინდექსში წონა, ანუ თანაზომადობის მაჩვენებელი ყოველთვის საანგარიშო პერიოდის დონეზე აიღება და საანგარიშო პერიოდი კი ცვალებადია თითეული ინდექსისათვის. მაგრამ თუ რაოდენობრივი მაჩვენებლების ინდექსების მწკრივებს ავაგებთ, აქ ხარისხობრივი მაჩვენებელი, როგორც თანაზომადობის სიდიდე, საბაზისო პერიოდის დონეზეა და შეგვიძლია დავტოვოთ რომელიმე ერთი უცვლელი პერიოდის მაჩვენებლები. ამოტომ მივიღებთ ინდექსების მწკრივებს უცვლელი წონებით. ინდექსები ცვალებადი წონებით სხვაგვარად წოდებულია ჯაჭვურ ინდექსებად, ხოლო უცვლელი წონებით–საბაზისო ინდექსებად. ჟაჭვური ინდექსების ნამრავლი უდრის საბაზისო ინდექსს.

450

ინდექსების მწკრივები შეიძლება ავაგოთ აგრეთვე, ცვალებადი და უცვლელი ბაზებით. მაგალითად, გვაქვს საინდექსო

451

სიდიდეები: $p_{0,}, p_{1,} p_2, ...p_n$, წონები: $q_{0,}, q_{1,} q_2, ..., q_n$.

ჯაჭვური ინდექსები იქნება:

მუდმივი წონებით:

$$J_{1/_0} = \frac{\sum p_1 q_n}{\sum p_0 q_n}, J_{2/_1} = \frac{\sum p_2 q_n}{\sum p_1 q_n}, ..., J_{n/_{n-1}} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_{n-1} q_n} \qquad (11.16)$$

ცვალებადი წონებით

$$J_{1/_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}, J_{2/_1} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2}, ..., J_{n/_{n-1}} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_{n-1} q_n} \qquad (11.17)$$

საბაზისო ინდექსები:

უცვლელი წონებით:

$$J_{1/_0} = \frac{\sum p_1 q_n}{\sum p_0 q_n}, J_{2/_0} = \frac{\sum p_2 q_n}{\sum p_0 q_n}, ..., J_{n/_0} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} \qquad (11.18).$$

ცვალებადი წონებით:

$$J_{1/_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}, J_{2/_0} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2}, ..., J_{n/_0} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} \qquad (11.19).$$

452

5. ინდექსების ურთიერთკავშირი და მისი გამოყენება ეკონომიკურ ანალიზში

საერთო ინდექსი, რომელიც აგებულია ორი ფაქტორის გავლენით, უდრის თითოეული ფაქტორის მიხედვით აგებული ინდექსების ურთიერთნამრავლს. ეს გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} \qquad (11.20),$$

 453

ან კიდევ

$$\frac{\sum q_1c_1}{\sum q_0c_0}=\frac{\sum q_1c_1}{\sum q_0c_0}\times\frac{\sum q_1c_1}{\sum q_1c_0} \qquad (11.21).$$

და ა.შ.

მაშასადამე, თუ გვაქვს მოცემული ორი მათგანი, შეგვიძლია გავიგოთ მესამე ფაქტორის ცვალებადობა. მაგალითად, როგორ შეიცვალა საშუალოდ ფასები, თუ პროდუქციის ფიზიკური მოცულობა გაიზარდა 20%-ით და საერთო ღირებულება 10%-ით?

მაშასადამე, მოცემულია, რომ

$J_q = 1.2$ და $J_{qp} = 1.1$

და რადგან

$$J_{qp} = J_q \times J_p$$

აქედან

$$J_q = \frac{J_{qp}}{J_q} = \frac{1.1}{1.2} = 0.92$$

მაშასადამე ფასები საშუალოდ შემცირებულია 8%-ით

6. ცვალებადი, ფიქსირებული და სტრუქტურული შემადგენლობის ინდექსები.

ეკონიმიკური მოვლენებისა და პროცესების დასახასიათებლად ხშირად მივმართავთ საშუალო მაჩვენებლის დინამიკის გაზომვას. ასეთია მაგალითად, ფირმაში საშუალო ხელფასის, შრომის ნაყოფიერებისა და სხვა მაჩვენებლების დინამიკის დახასიათება წლების მიხედვით. თითოეული მაჩვენებლის დინამიკაზე მოქმედებს არა მარტო საშუალო მაჩვენებლის სიდიდიდე ერთობლიობის ცალკეულ ობიექტებში, არამედ ამ ობიექტების ხვედრითი წილის ანუ სტრუქტურის ცვალებადობაც. მაგალითად, ბიზნესში

 454

დასაქნებულ მუშაკთა საშუალო ხელფასის ცვალებადობა დამოკიდებულია ამ ბიზნესში შემავალი ცალკეული ქარხნების მუშაკთა საშუალო ხელფასსა და ამ ქარხნების ხვედრით წილზე მუშაკთა რაოდენობის მიხედვით. მოვიყვანოთ ასეთი მაგალითი:

საშუალო ხელფასის ინდექსები ორი ფირმის მიხედვით

ცხრილი №65

ფირმების № რიგზე	მუშაკთა რიცხოვნობა ათასი კაცი		ხელფასის ფონდი ათასი ლარი		საშუალო ხელფასი ლარი		საშუალო ხელფასის ინდექსი პროცენტებში
	საბაზისო პერიოდი	საანგარიშო პერიოდი	საბაზისო პერიოდი	საანგარიშო პერიოდი	საბაზისო პერიოდი	საანგარიშო პერიოდი	
1	4.5	6.8	810.0	14960	180	220	122.2
2	6.2	7.1	620.0	994.0	120	140	116.6
სულ	10.7	13.9	1430.0	2490.0	134	179	133.5

როგორც ჩანს, თითოეული ფირმის მიხედვით საშუალო ხელფასი უფრო ნაკლებად გაიზარდა, ვიდრე ორივე ფირმის ერთად აღებული. რამ გამოიწვია ეს? ეკონომიკაში ასეთი პარადოქსები ხშირად გამოწვეულია სტრუქტურული ძვრებით. როგორც ჩანს, პირველი ფირმის ხვედრითი წილი გაიზარდა მუშაკთა რიცხოვნობის მიხედვით 42,1 %-დან 48,9 %-მდე, სამაგიეროდ მეორე ფირმის ხვედრითი წილი შემცირდა 57,9 %-დან 51,1 –მდე. მაშასადამე, გაიზარდა მაღალი საშუალო ხელფასის ფირმის ხვედრითი წილი, რამაც განაპირობა ორივე ფირმის მიხედვით საშუალო ხელფასის უფრო მეტად გაზრდა, ვიდრე თითოეულ ფირმაში ცალკ-ცალკე. ასეთ შემთხვევაში ცვალებადი, უცვლელი ანუ ფიქსირებული და სტრუქტურული შემადგენლობის გარკვევისათვის ანგარიშობენ შესაბამის ინდექსებს.

ცვალებადი შემადგენლობის ინდექსი:

$$J_{ცვ.} = \frac{\sum N_1 Z_1}{\sum N_1} : \frac{\sum N_0 Z_0}{\sum N_0} \qquad (11.22).$$

455

სადაც $J_{ცვ.}$ –ხელფასის ცვალებადი შემადგენლობის ინდექსია, N_1 და N_0 –მუშაკთა რიცხოვნობაა ცალკეულ ქარხანაში შესაბამისად საანგარიშო და საბაზისო პერიოდებში;

Z_1 და Z_0 –საშუალო ხელფასი თითოეულ ქარხანაში საანგარიშო და საბაზისო პერიოდებში.

აქ ცვალებადია მუშაკთა რაოდენობა, ხოლო თუ მას უცვლელად დავტოვებთ, მივიღებთ ფიქსირებული შემადგენლობის ინდექსს:

$$J_{ფიქს.} = \frac{\sum N_1 Z_1}{\sum N_1} : \frac{\sum N_1 Z_0}{\sum N_1} = \frac{\sum N_1 Z_1}{\sum N_1 Z_0} \qquad (11.23).$$

ეს გვიჩვენებს საშუალო ხელფასის ცვალებადობას მუშაკთა შენადგენლობის უცვლელობის პირობებში. თუ ცვალებადი შემადგენლობის ინდექსს გავყოფთ ფიქსირებული შემადგენლობის ინდექსზე, მივიღებთ სტრუქტურული შემადგენლობის ინდექსს ($J_{სტრ.}$), რაც გვიჩვენებს საშუალო ხელფასზე მუშაკთა რიცხოვნობის ცვალებადობის გავლენას.

ჩვენს მაგალითზე:

$$J_{ცვ.} = \frac{6{,}8 \times 220 + 7{,}1 \times 140}{6{,}8 + 7{,}1} : \frac{4{,}5 \times 180 + 6{,}2 \times 120}{4{,}5 + 6{,}2} = 1{,}335,$$

რაც %-ში 133,5 %-ია.

$$\mathrm{J}_{ფიქს.} = \frac{6{,}8 \times 220 + 7{,}1 \times 140}{6{,}8 \times 180 + 7{,}1 \times 120} = \frac{1496 + 994}{1221 + 852} = 1:068 \times 100 = 106{,}8\%$$

$$\mathrm{J}_{სტრ.} = 133{,}5 : 106{,}8 = 1{,}25 \times 100 = 125\%.$$

მაშასადამე, თვით საშუალო ხელფასი მუშაკთა რიცხოვნობის უცვლელობის პირობებში გაიზარდა 6,8 %-ით, მუშაკთა შემადგენლობა 25 %-ით. ორივე ფაქტორის ხარჯზე კი საერთოდ საშუალო ხელფასი გაიზარდა 33,5 %-ით.

7. ლასპეირესის, პააშეს და ფიშერის ინდექსები

ინდექსების შექმნამ მსოფლიო სტატისტიკურ მეცნიერებაში გარკვეული ისტორია გაიარა. ჯერ კიდევ 1738 წელს ფრანგი მეცნიერ-ეკონომისტის **დიუტოს** მიერ შემუშავებული იქნა ფასების ცვალებადობის მარტივი ინდექსი, რომელსაც ასეთი სახე ჰქონდა:

$$J_p = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \qquad (11.24),$$

სადაც J_q – ფასების განმაზოგადოებელი ინდექსია;

$\sum p_1$ – საანგარიშო პერიოდში სხვადასხვა სახის საქონლის ერთეულის ფასთა ჯამი;

$\sum p_0$ – იგივე ნაჩვენებელია საანგარიშო პერიოდში.

1764 წელს სტატისტიკურ მეცნიერებასა და პრაქტიკაში იტალიელმა **კარლიმ**, შესთავაზა ფასების ინდექსის გასაანგარიშებელი შემდეგი სქემა:

$$J_p = \frac{\sum i_p}{n}, \qquad (11.25);$$

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

სადაც

n–საქონელთა რაოდენობა.

როგორც ჩანს **კარლის** ფასების ინდექსი ცალკეული სახის საქონლის ფასების ინდივიდუალური ინდექსების მარტივი საშუალო არითმეტიკულია და სხვა არაფერი. ვაჩვენოთ ამ ინდექსების გაანგარიშება და ურთიერთშედარება კონკრეტულ მაგალითზე.

457

ქ. თბილისის ბაზრობებზე ხორცის რეალიზაცია
(ციფრები პირობითია)

ცხრილი №66

ხორცის სახეობა	2000 წ.		2004 წ.	
	1 კგ-ის ფასი (ლარობით)	გაიყიდა (ტონობით)	1 კგ-ის ფასი (ლარობით)	გაიყიდა (ტონობით)
ძროხის ხორცი	4,50	20,8	5,50	31,5
ცხვრის ხორცი	3,60	11,5	4,20	12,6
ღორის ხორცი	4,00	30,8	5,00	35,9

2004 წელს 2003 წლის მიმართ ხორცის ფასი ქ. თბილისის ბაზრობებზე შეიცვალა:

ა) **დიუტოს** ინდქსის მიხედვით:

$$i_p = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} = \frac{5,5 + 4,2 + 5,0}{4,5 + 3,6 + 4,0} = \frac{14,7}{12,1} = 1,215$$ ანუ გაიზარდა 21,5% - ით.

ა) **კარლის** ინდექსის მიხედვით:

$$i_1 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{5,5}{4,5} = 1,222$$. ანუ ძროხის ხორცის ფასი გაიზარდა 22,2 %-ით;

$$i_1 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{4,2}{3,6} = 1,167$$ – ცხვრის ხორცის ფასი გაიზარდა 16,7 %-ით;

$$i_3 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{5,0}{4,0} = 1,25$$.–ღორის ხორცის ფასი გაიზარდა 25 %-ით.

საშუალოდ ხორცის ფასი კარლის ინდექსის მიხედვით

 458

შეიცვალა:

$$J_p = \frac{\sum i_p}{n} = \frac{1,222 + 1,167 + 1,250}{3} = 1,213$$

ე. ი. ხორცის ფასი საშუალოდ გაიზარდა 21,3 %-ით.

459

როგორც ჩანს **დიუტოსა** და **კარლის** ინდექსების მიხედვით გაანგარიშებული ფასების ცვალებადობა, დიდად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

ფასების აგრეგატული ანუ საერთო ინდექსები რომლებიც წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ, მხოლოდ მე-19 საუკუნის ბოლოს შეიმუშავა მსოფლიო მეცნიერებამ და დღემდე წარმატებით გამოიყენება პრაქტიკულ გაანგარიშებებში.

გერმანელმა სტატისტიკოსებმა **გ. პააშემ** და **ე. ლასპეირესმა** ფასების აგრეგატული ინდექსის გაანგარიშებას საკუთარი მოსაზრებანი შესთავაზეს. **გ. პააშეს მიხედვით,** ფასების საშუალო ცვალებადობა გაიანგარიშება საანგარიშო პერიოდის წონების გამოყენებით.

$$J_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} \qquad (11.26),$$

ხოლო ე. ლასპეირესის მიხედვით–საბაზისო პერიოდის წონების მიხედვით:

$$J_p = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} \qquad (11.27).$$

ჩვენს მაგალითზე (ცხრ. 66) გვექნება:

ა) გ. პააშეს ინდექსის მიხედვით:

$$J_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} = \frac{(31500 \times 5{,}5) + (12600 \times 4{,}2) + (35900 \times 5{,}0)}{(31500 \times 4{,}5) + (12600 \times 3{,}6) + (35900 \times 4{,}0)} = 1{,}227,$$

ე.ი. ხორცის ფასები საშუალოდ აღნიშნულ პერიოდში გაიზარდა 22,7 %-ით.

მაშასადამე მიღებული მაჩვენებელი მეტია დიუტოსა და კარლის შემოთავაზებული ინდექსების მიხედვით გაანგარიშებულ შედეგებთან შედარებით: $22{,}7 > 21{,}3\% \approx 21{,}5\%$.

ა) ე. ლასპეირესის ინდექსის მიხედვით:

460

$$J_p = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{(20800 \times 5{,}5) + (11500 \times 4{,}2) + (30800 \times 5{,}0)}{(20800 \times 4{,}5) + (11500 \times 3{,}6) + (30800 \times 4{,}0)} = 1{,}207$$

461

ანუ უფრო დაბალი მაჩვენებელია, ვიდრე დიუტოს, კარლისა და პააშეს ინდექსებით გაანგარიშებული მაჩვენებლები.

რითაა გამოწვეული სხვადასხვა წონებით გაანგარიშებულ ინდექსებს შორის განსხვავებანი?

ვ. ი. ბორტკევიჩის (1868–1931) აზრით განსხვავებული წონების ინდექსებს შორის სხვაობას ასახავს შემდეგი სახის ტოლობა:

$$\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} : \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} = 1 + Z_{qp} \times K_q \times K_p \qquad (11.28)$$

სადაც Z_{qp}–საქონლის ფიზიკურ მოცულობასა და ფასებს შორის კორელაციის კოეფიციენტია.

K_q–ცალკეული სახეობის საქონლის ფიზიკური მოცულობის ზრდის ტემპის ცვალებადობის მაჩვენებელია;

K_p– ფასების ზრდის ტემპის მაჩვენებელი.

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ საბაზისო და საანგარისო პერიოდის წონებით გაანგარიშებული ინდექსები ერთმანეთის ტოლია, თუ სრულდება ერთი პირობა მაინც: ა) თუ $Z_{qp} = 0$, ე.ი. საქონლის ფიზიკურ მოცულობასა და ფასებს შორის კორელაციური კავშირი არ არსებობს;

ბ) თუ საქონლის ფიზიკური მოცულობის ზრდის ტემპები ცალკეული სახის საქონლის მიხედვით არაა განსხვავებული ანუ ერთი და იგივეა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ცალკეული სახის საქონლის ფიზიკური მოცულობის ზრდის ტემპების ცვალებადობის მაჩვენებელი (K_q) ნულის ტოლია.გ) ფასების ზრდის ტემპის ცვალებადობის მაჩვენებელი ნულის ტოლია ($K_p = 0$).

ამის გარდა დიუტოსა და კარლის ინდექსები ვერ ითვალისწინებს საქონლის ასორტიმენტში ძვრების გავლენას. ეს კი როგორც ზემოთ დავინახეთ (იხ. პარაგრაფი 6) დიდ

გავლენას ახდენს საშუალო მაჩვენებლების ცვალებადობაზე. ჩვენს მაგალითზე (იხ. ცხრ. 66) 2004 წელს 2003 წელთან შედარებით უფრო მეტად გაიზარდა მაღალი ფასის მქონე ხორცის ფასი (ძროხის 22,2 %-ით, ღორის 25 %-ით), ვიდრე დაბალი ფასის მქონე საქონლის ფასი (ამ შემთხვევაში ცხვრის). ამიტომ ამ ფაქტორს, ცხადია, უნდა გამოეწვია საერთო ჯამში საშუალო ფასის გაზრდა უფრო მეტად (საქონლის ასორტიმენტში ძროხის ხორცის ხვედრითი წილი გაიზარდა $\left(\frac{20,8}{20,8+11,5+30,8}\times 100 = 32,9\right)$ 32,9 %-დან 49,9 %-მდე $\left(\frac{31,5}{31,5+12,6+35,9}\times 100 = 49,9\right)$.

ცხვრისა და ღორის ხორცის წარმოებისა და რეალიზაციის მოცულობა შემცირდა საქონლის საერთო ასორტიმენტში. პააშეს ინდექსით გაანგარიშებული ფასების მატება, როგორც დავინახეთ, მეტია (22,7 %) **ლასპეირესის** ინდექსით გაანგარიშებული შესაბამის მაჩვენებელზე. თუ გავითვალისწინებთ ამ ინდექსების ეკონომიკურ დანიშნულებას, ადვილი მისახვედრია, რომ, რადგან პააშეს ინდექსი გვიჩვენებს რამდენად გაძვირდა საქონლის ფასი მიმდინარე პერიოდში, ხოლო ლასპეირესის ინდექსი–რამდენად გაძვირდებოდა საბაზისო პერიოდის საქონლის ფასები, შესაბამის ინდექსებს შორის სხვაობა ყოველთვის დარჩება და გამოწვეულ იქნება საბაზისო და საანგარიშო პერიოდების სასაქონლო სტრუქტურების ცვალებადობით. სტატისტიკის სსრ კავშირის პრაქტიკა გასული საუკუნის 90-იან წლებამდე უპირატესობას ანიჭებდა **პააშეს** ინდექსის გამოყენებას, ხოლო მის შემდეგ მსოფლიოს უმრავლეს ქვყნებში (აშშ, ინგლისი, გერმანია, რუსეთი და სხვა.) ფასების ცვალებადობას უმთავრესად **ლასპეირესის** ფორმულით აწარმობენ. ამ შემთხვევაში ყოველწლიურად ინდექსის გაანგარიშებას ამარტივებს წონებად რომელიმე

 463

საბაზისო პერიოდის საქონელბრუნვის გამოყენება.

უცხოელი სტატისტიკოსები[1] მიანიშნებენ, რომ ცალცალკე საბაზისო ან საანგარიშო წონებით მოვლენის ცვალებადობის გაზომვა არ იძლევა სასურველ ეფექტს. მაგალითად, ჩვენ შეიძლება ტელევიზიით ვნახოთ მოძრავი გამოხატულება ხმის გარეშე, ან გვესმის ხმა გამოსახულების გარეშე, არც ერთია და არც მეორე სასურველი ეფექტის მატარებელი ცალცალკე. თუ ისინი ერთად შეერთდება და მოვისმენთ როგორც ხმას და იმავდროულად მოძრავ გამოსახულებას, ცხადია ეფექტი მეტი იქნება.

ამიტომ უფრო მეტი ეფექტის მისაღებად მსოფლიო სტატისტიკურ მეცნიერებას ამერიკელმა ეკონომისტმა **ი. ფიშერმა შესთავაზა პააშესა და ლასპეირესის** ინდექსების საშუალო გეომეტრიულის მიხედვით ფასების აგრეგატული ინდექსის გაანგარიშება, რომელსაც თვითონ ავტორმა უწოდა იდეალური ინდექსი. ი. ფიშერის ინდექსს ასეთი სახე აქვს:

$$J_p = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0}} \qquad (11.29).$$

ეს ინდექსი შეიძლება გამოყენებულ იქნას აგრეთვე, საქონლის (პროდუქციის) ფიზიკური მოცულობის აგრეგატული ინდექსის გასაანგარიშებლად:

$$J_y = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \times \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}} \qquad (11.30).$$

66-ე ცხრილის მონაცემებით გვექნება:

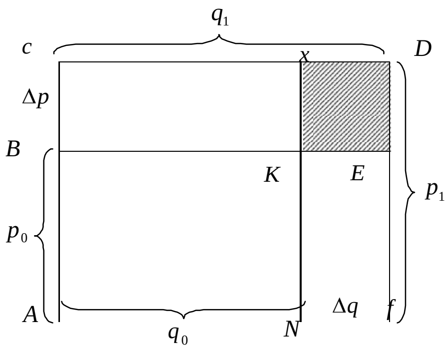
$$J_p = \sqrt{1{,}227 \times 1{,}207} = 1{,}217$$

[1]იხ. მაგალითად, È. È. Åëèñååâà, Ì. Ì. Þçáàøåâ, Îáøàÿ òåîðèÿ ñòàòèñòèêè (ïîä. ðåä. ïðîô .È. È. Åëèñååâîé);Ó÷åáíèê èçä. “Ôèíàíñû è ñòàòèñòèêà” Ì., 1995, ñòð. 325,326,327.

ი. ფიშერის საშუალო გეომეტრიული ინდექსი მოკლებულია კონკრეტულ ეკონომიკურ შინაარსს იმდენად, რამდენადაც ინდექსის მრიცხველსა და მნიშვნელს შორის სხვაობა ჩეულებრივი აგრეგატული ფორმის ინდექსისაგან განსხვავებით ვერ იძლევა რაიმე კონკრეტული შინაარსის მქონე მაჩვენებელს. ამიტომ მას პრაქტიკაში ძალიან იშვიათად იყენებენ.

8. საინდექსო ანალიზის ეკონომიკური და გეომეტრიული შინაარსი

ხშირად სტატისტიკოსები საერთო ეკონომიკური მოვლენის განვითარებაზე მოქმედ ფაქტორთა ერთდროულ ქმედებას გამოსახავენ ცნობილი რუსი სტატისტიკოსის **ვ.ე. ვარზარის (1851–1940)** ნიშნებით, რომლის გრაფიკულ გამოსახულებას ასეთი სახე აქვს (ნახ. 32):



ნახ. 32. ვარზარის ნიშნები

ვარზარის ნიშნები იმას ნიშნავს, რომ ავტორმა თითოეული ეკონომიკური მაჩვენებელი გამოსახა გეომეტრიული ფიგურებით, მაგალითად, ოთხკუთხედის ფართობი (S_0) გამოისახება p_0 და q_0 ნამრავლით (საბაზისო პერიოდის რეალიზებული საქონლის ფიზიკური მოცულობა გამრავლებული იმავე

465

საბაზისო პერიოდის საქონლის ერთეულის ფასზე–, გვაძლევს საბაზისო პერიოდის საქონელბრუნვას, რაც შეესაბამება მოცემული ოთხკუთხედის ფართობს). მასასადამე ABKN ოთხკუთხედის ფართობით $S_0 = \mathrm{AN}(q_o) \times \mathrm{AB}(p_0)$ გამოისახება საბაზისო პერიოდის საქონელბრუნვის მოცულობა ($\sum q_0 p_0$). საანგარიშო პერიოდში გაიზარდა საქონელბრუნვაზე მოქმედი (შეიძლება შემცირებული გვქონდეს) როგორც პირველი ფაქტორი, საქონლის ფიზიკური მოცულობა Δq–ით, ისე მეორე ფაქტორი, საქონლის ერთეულის ფასი Δp —ით. $q_0 + \Delta q = q_1$, $p_0 + \Delta p = p_1$. მაშასადამე საანგარიშო პერიოდის საქონელბრუნვას, რომელიც გამოისახება $\sum q_1 p_1$ -ით შეესაბამება $\mathrm{A}CDf$ ოთხკუთხედის ფართობი. $\mathrm{A}CDf$ და ABKN ოთხკუთხედის ფართობთა სხვაობა შეესაბამება საქონელბრუნვის საერთო ინდექსის $J_{qp} = \dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}$ მრიცხველსა და მნიშვნელს შორის სხვაობას.

მაშასადამე საქონელბრუნვის საერთო მატება საანგარიშო პერიოდში საბაზისო პერიოდთან შედარებით შეადგენს ($\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0$)-ს. თუ ამ საერთო სხვაობას დავშლით ფაქტორების (q და p) მიხედვით, მივიღებთ, რომ საქონლის ფიზიკური მოცულობის (q) ცვალებადობის ხარჯზე მოდის საქონელბრუნვის ფიზიკური მოცულობის ინდექსის ($J_y = \dfrac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$) მრიცხველსა და მნიშვნელს შორის სხვაობის შესაბამისი ნაწილი $\left(\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0\right)$, ხოლო ფასების ($p$) ცვალებადობის ხარჯზე ფასების ინდექსის ($I_p = \dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$)

466

მრიცხველსა და მნიშვნელს შორის სხვაობის შესაბამისი ნაწილი.

ანალიტიკურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ საანგარიშო და საბაზისო პერიოდის საქონელბრუნვათა საერთო სხვაობა ($\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0$) უდრის ცალკეული ფაქტორის ხარჯზე საქონელბრუნვათა სხვაობის ჯამს.

$$\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0 = (\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0) + (\sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0) =$$
$$= \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 + \sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 = \sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0$$

32-ე ნახაზზე საანგარიშო პერიოდის საქონელბრუნვას ($\sum q_1 p_1$) შეესაბამება ACDf ოთხკუთხედის ფართობი (S_1), ხოლო საბაზისო პერიოდის საქონელბრუნვას ($\sum q_0 p_0$) ABKN ოთხკუთხედის ფართობი (S_0). საქონელბრუნვას $\sum q_1 p_0$ შეესაბამება ABEf ოთხკუთხედის ფართობი, სხვაობას $\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 -$ NKEf ოთხკუთხედის ფართობი, საქონელბრუნვათა სხვაობას $\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0$ შეესაბამება BCXK ოთხკუთხედის ფართობი. მაშასადამე KXDE დაშტრიხული ოთხკუთხედის ფართობი რომელ ფაქტორს მივაკუთვნოთ? ესაა პრობლემა თანამედროვე სოციალურ–ეკონომიკური მოვლენების განვითარების ანალიზსა და პროგნოზირებაში.

66-ე ცხრილის მონაცემებით საანგარიშო ანუ 2004 წლის საქონელბრუნვის მოცულობამ ხორცის პროდუქტებზე შეადგინა

$$\sum q_1 p_1 = (31500 \times 5{,}5) + (12600 \times 4{,}2) + (35900 \times 5{,}0) =$$
$$= 173250 + 52920 + 179500 = 405670 \text{ ლარი.}$$

საბაზისო პერიოდში:

$$\sum q_0 p_0 = (20800 \times 4{,}5) + (11500 \times 3{,}6) + (30800 \times 4{,}0) =$$
$$= 93600 + 41400 + 123200 = 258200 \quad \text{ლარი.}$$

სხვაობა საანგარიშო და საბაზისო საქონელბრუნვათა შორის შეადგენს $405670-258200=147470$ ლარს.

ეს საერთო მატება შეიძლება დავშალოთ ორი ფაქტორის მიხედვით: საქონლის ფიზიკური მოცულობის გადიდების ხარჯზე მოდის საერთო მატების

$$\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = [(31500\times 4{,}5)+(12600\times 3{,}6)+(35900\times 4{,}0)]-$$
$$-[(20800\times 4{,}5)+(11500\times 3{,}6)+(30800\times 4{,}0)]=72510 \quad \text{ლარი.}$$

ფასების გადიდების ხარჯზე კი საერთო მატების

$$\sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 = [(31500\times 5{,}5)+(12600\times 4{,}2)+(35900\times 5{,}0)]-$$
$$-[(31500\times 4{,}5)+(12600\times 3{,}6)+(35900\times 4{,}0)]=$$
$$=405670-330710=74960 \quad \text{ლარი.}$$

მაშასადამე, ანალიტიკურად ცალკეული ფაქტორის გავლენით გამოწვეულ ეფექტთა ჯამი საერთო ეფექტის ტოლია. მაგრამ ნახაზზე (ნახ. 32) ნათლად ჩანს, რომ აშკარად რჩება $KXDE$ დაშტრიხული ოთხკუთხედის შესაბამისი ეფექტი გაუნაწილებელი ფაქტორების მიხედვით.

სტატისტიკური მეცნიერების მიერ შემუშავებულია ამ გაუნაწილებელი ეფექტის ფაქტორებისადმი მიკუთვნებადობის ზოგიერთი ვერსია. მათ შორისაა რომელიმე ერთი ფაქტორისადმი, ან ორთავე ფაქტორისადმი თანაბრად მიკუთვნებადობის და სხვა ვერსიები. დღესდღეობით არცერთი მათგანი დასმულ კითხვაზე პასუხს ვერ იძლევა და მაშასადამე პრობლემის გადაწყვეტა მაინც ღიად რჩება.

9. ტერიტორიული ინდექსები

ინდექსი, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, რაიმე სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების ცვალებადობის მძლავრი სტატისტიკური მაჩვენებელია. ეს ცვალებადობა განიხილება როგორც დროში ქრონოლიგიური თარიღების, ისე სივრცის ანუ ტერიტორიული ჭრილის მიხედვით.

468

პირველ ცვალებადობას განსაზღვრავს დინამიკური, ხოლო მეორეს ტერიტორიულ-სივრცობრივი ინდექსები. განსხვავებით აქამდე განხილული და ჩვენთვის უკვე ცნობილი დინამიკური, აგრეგატული ფორმის ინდექსებისაგან ტერიტორიულ-სივრცობრივი აგრეგატული ფორმის ინდექსების გაანგარიშებისას მწვავედ დგას თანაზომადობის მაჩვენებლის ანუ წონების შერჩევის საკითხი. დინამიკური ინდექსები **პააშეს** მიხედვით გაიანგარიშება საანგარიშო, (11.26), ხოლო **ლასპეირესის** მიხედვით–საანალიზო პერიოდის წონების გამოყენბით (11.27). გაანგარიშების შედეგები ძალიან მცირედით განსხვავდებიან ერთმანეთასაგან. ტერიტორიალურ-სივრცობრივი ინდექსების გამოყენებით წარმოებს სხვადასხვა ტერიტორიული ერთეულების (ქვეყნები, რეგიონები, რაიონები) ეკონომიკური მაჩვენებლების ურთიერთშედარება. მაგალითად, თუ გვინდა ‘‘ა’’ და ‘‘ბ’’ რაიონები ერთმანეთს შევადაროთ საქონელბრუნვით, ფასებით ან საქონელბრუნვის ფიზიკური მოცულობით, მაშინ რომელი რაიონის შესაბამისი მაჩვენებელი უნდა ავიღოთ უცვლელ დონეზე, როგორც წონა? ამ შემთხვევაში რომელიმე ერთი რაიონის შესაბამისი მაჩვენებლის გამოყენება წონის სახით არ იძლევა სწორ შედეგს. ამას ნათლად დავინახავთ შემდეგ კონკრეტულ მაგალითზე:

საქონელბრუნვა "ა" და "ბ" რაიონებში

(ციფრები პირობითია)

ცხრილი №67

პროდუქტის დასახელება	ზ/ე	"ა" რაიონი		"ბ" რაიონი		საქონელბრუნვა		$p_ბ q_ა$	$p_ა q_ბ$	რეალიზაციის მოცულობა ორთავე რაიონში $q_ა + q_ბ$	$p_ა(q_ა + q_ბ)$	$p_ბ(q_ა + q_ბ)$
		ერთეულის ფასი (ლარი) $P_ა$	რეალიზაციის მოცულობა $q_ა$	ერთეულის ფასი (ლარი) $p_ბ$	რეალიზაციის მოცულობა $q_ბ$	"ა" რაიონი $p_ა q_ა$	"ბ" რაიონი $p_ბ q_ბ$					
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
ზორცი	კგ.	4,0	2000	4,5	400	8000	1800	9000	1600	2400	9600	10800
რძე	კგ.	3,5	1000	3,0	800	3500	1400	3000	2800	1800	6300	5400
კარაქი	კგ.	6,2	500	5,0	2500	3200	12500	2500	15500	3000	18600	15000
სულ	–	–	–	–	–	14600	16700	14500	19900	–	34500	31200

ამ ცხრილის მონაცემებით შეიძლება დაისვას ორი საკითხი: 1) როგორია ‘‘ა’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასების ცვალებადობა ‘‘ბ’’ რაიონის საშუალო ფასების მიმართ?, 2) როგორია :ბ’’ რაიონის ფასების ცვალებადობა ‘‘ა’’ რაიონის შესაბამისი მაჩვენებლების მიმართ?

პირველ კითხვაზე პასუხის გასაცემად ავაგოთ ფასების აგრეგატული ინდექსი ‘‘ა’’ რაიონის საქონლის ფიზიკური მოცულობის წონებად გამოყენებით. გვექნება:

$$J_{p(ა/ბ)} = \frac{\sum p_{ა} q_{ა}}{\sum p_{ბ} q_{ა}} \qquad (11.31),$$

ხოლო მეორე კითხვაზე პასუხის გასაცემად გვექნება ინდექსი:

$$J_{p(ბ/ა)} = \frac{\sum p_{ბ} q_{ბ}}{\sum p_{ა} q_{ბ}} \qquad (11.32).$$

67-ე ცხრილის მონაცემებით გვექნება:

$$J_{p(ა/ბ)} = \frac{14600}{14500} = 1{,}007\,;$$

$$J_{p(ბ/ა)} = \frac{16700}{19900_{ა}} = 0{,}839\,.$$

მივიღეთ, რომ ‘‘ა’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასები მხოლოდ 0,7 %-ით (100,7–100,0) აჭარბებს ‘‘ბ’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასებს, მაშინ, როდესაც ‘‘ბ’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასები 0,7 %-ით კი არ ჩამორჩება (უფრო დაბალი) ‘‘ა’’ რაიონის საშუალო ფასებს, არამედ 16,1 %-ით (100,0–83,(). მივიღეთ პარადოქსული ეკონომიკური შედეგი.

რითაა გამოწვეული ასეთი დიდი განსხვავებანი? ეს განსხვავება გამოწვეულია იმით, რომ ცალკეული ქვეყნების, რეგიონებისა და რაიონების როგორც საქონლის ფიზიკური

მოცულობის, ისე ფასების სტრუქტურა უფრო მკვეთრადაა განსხვავებული ერთმანეთისაგან, ვიდრე ერთი და იგივე ტერიტორიული ერთეულის ან სივრცის სხვადასხვა პერიოდის

 468

შესაბამისი მაჩვენებლები. ეს კი თავისთავად გამოწვეულია ცალკეული ტერიტორიული ერთეულების ეკონომიკის თავისებურებებით, რაც შეიძლება გამოისახოს საქონლისა და მომსახურების სუბსიდირების განსხვავებულობაში, ქვეყანაში არასაბაზრო საქმიანობის გავრცელების ხარისხში, ზოგიერთი სოციალური მომსახურების სტრუქტურაში ანაზღაურებადი და არაანაზღაურებადი სახეების მიხედვით და ა.შ.

ამიტომ სტატისტიკის თეორიასა და პრაქტიკაში წონებად გამოიყენებენ არა ერთი რომელიმე ტერიტორიული ერთეულის რაიმე მაჩვენებელს, არამედ ე. წ. სტანდარტულ სიდიდეს. სტანდარტული წონის სახით ჩვეულებრივად იყენებენ შესადარებელი ტერიტორიულ-სივრცობრივი ერთეულების წონათა საერთო ჯამს. ამ საფუძველზე ტერიტორიული ინდექსის ფორმა ასეთი იქნება:

$$J_{p(\text{ა}/\text{ბ})} = \frac{\sum p_{\text{ა}}\left(q_{\text{ა}} + q_{\text{ბ}}\right)}{\sum p_{\text{ბ}}\left(q_{\text{ა}} + q_{\text{ბ}}\right)} \qquad (11.33)$$

მოცემული ინდექსი (11.33) გამოიყენება ‘‘ა’’ რაიონის ფასების ‘‘ბ’’ რაიონის ფასებისადმი შესადარებლად.

‘‘ბ’’ რაიონის ფასების ‘‘ა’’ რაიონის ფასებისადმი შესადარებლად ინდექსი მიიღებს სახეს:

$$J_{p(\text{ბ}/\text{ა})} = \frac{\sum p_{\text{ბ}}\left(q_{\text{ა}} + q_{\text{ბ}}\right)}{\sum p_{\text{ა}}\left(q_{\text{ა}} + q_{\text{ბ}}\right)} \qquad (11.34).$$

67-ე ცხრილის მონაცემებით გვექნება:

$$J_{p(\text{ა}/\text{ბ})} = \frac{34500}{31200} = 1{,}105$$

 469

ეს იმას ნიშნავს, რომ ‘‘ა’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასები 10,5 %-ით მეტია ‘‘ბ’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასებზე.

$$J_{p(ბ/ა)} = \frac{31200}{34500} = 0{,}913$$

470

მაშასადამე ‘‘ბ’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასები ‘‘ა’’ რაიონის საქონლის საშუალო ფასებზე ნაკლებია 8,7 %-ით.

განსხვავება (11.33) და (11.34) ფორმულებით გაანგარიშებულ შედეგებს შორის სავსებით ბუნებრივი და კანონზომიერია, რადგან შეესაბამება რიცხვთა შორის ურთიერთშეფარდების საყოველთაოდ ცნობილ შედეგებს. თუ, მაგალითად, 25 მეტია 20-ზე 25%-ით, 20 ნაკლებია 25-ზე 20%-ით (20 : 25).

10. ინდექსების თვისებები

პააშესა და ლასპეირესის ინდექსების საფუძველზე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ინდექსების ზოგიერთი თვისება, რომელიც გამოიყენება საინდექსო ანალიზსა და პროგნოზირებაში. ამ ინდექსების სქემა ასეთია:

პააშესა და ლასპეირესის ინდექსები

ცხრილი №68

ინდექსის დასახელება	ინდექსის ფორმულა	
	პააშეს (საანგარიშო პერიოდის წონებით)	ლასპეირესის (საბაზისო პერიოდის წონებით)
ფიზიკური მოცულობის ინდექსი	$J_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$	$J_q = \frac{\sum q_1 p_o}{\sum q_0 p_0}$
ფასების ინდექსი	$J^p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$	$J^p = \frac{\sum p_1 q_o}{\sum p_0 q_0}$

I-თვისება: პააშეს ფასების ინდექსი უდრის პროდუქციის ღირებულების საქონელბრუნვის ინდექსი გაყოფილი **ლასპეირესის** ფიზიკური მოცულობის ინდექსზე:

471

$$J_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} : \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \qquad (11.35).$$

II-თვისება: **ლასპეირესის** ფასების ინდექსი გამრავლებული **პააშეს** პროდუქციის ან საქონელბრუნვის ფიზიკური

472

მოცულობის ინდექსზე უდრის პროდუქციის ან საქონელბრუნვის საერთო ღირებულების ინდექსს:

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} \qquad (11.36)$$

III- თუ ცნობილია ფასების ინდივიდუალური ინდექსები, მაშინ საბაზისო პერიოდის საქონელბრუნვის ან პროდუქციის ღირებულების წონებად გამოყენებით შეგვიძლია გავიანგარიშოთ

ლასპეირესის ფასების აგრეგატული ინდექსი, რასაც ძალიან ფართოდ იყენებენ დასავლეთის ქვეყნებში.

$$J_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum i_p q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} \qquad (11.37),$$

სადაც $i_p = \frac{p_1}{p_{0,}}$. აქედან $p_1 = i_p p_0$.

ბოლო ტოლობას თუ შევიტანთ p_1-ის ნაცვლად **ლასპეირესის** ფასების აგრეგატული ინდექსის ფორმულაში, მივიღებთ (11.37) ფორმულას.

IV-თვისება: ლასპეირესის ფიზიკური მოცულობის ინდექსი უდრის ფიზიკური მოცულობის ინდივიდუალური ინდექსების შეწონილ არითმეტიკულს, სადაც წონებად გამოყენებულია საბაზისო პერიოდის პროდუქციის ღირებულება ან საქონელბრუნვა.

$$J_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum i_y q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} \qquad (11.38),$$

სადაც $i_q = \frac{q_1}{q_0}$ აქედან $q_1 = i_q q_0$

V-თვისება: **პააშეს** ფასების აგრეგატული ინდექსი უდრის პროდუქციის ფასების ინდექსების საშუალო შეწონილ არითმეტიკულს, სადაც წონებად გამოყენებულია საანგარიშო

პერიოდის პროუქციის ან საქონელბრუნვის ფიზიკური მოცულობა შეფასებული საბაზისო პერიოდის ფასებით:

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum i_p p_0 q_1}{\sum p_0 q_1}, \qquad (11.39)$$

სადაც ტოლობის მარცხენა ნაწილის მრიცხველში p_1 ფასების ინდივიდუალური ინდექსიდანაა განსაზღვრული:

$$i_p = \frac{p_1}{p_{0,}}, p_1 = i_p \times p_0$$

VI- თვისება: პააშეს პროდუქციის ფიზიკური მოცულობის აგრეგატული ინდექსი უდრის პროდუქციის ან საქონლის ფიზიკური მოცულობის საშუალო შეწონილ ინდექსს, სადაც წონებად გამოყენებულია საბაზისო პერიოდის საქონლის ან პროდუქციის ფიზიკური მოცულობა გამოსახული საანგარიშო პერიოდის ფასებით

$$\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} = \frac{\sum i_q q_0 p_1}{\sum q_0 p_1},$$

სადაც ტოლობის მარცხენა ნაწილის q_1 მიღებულია პროუქციის ან საქონელბრუნვის ინდივიდუალური ინდექსიდან:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}, q_1 = i_q q_0$$

ინდექსების ასეთი თვისებების გამოყენება საგრძნობლად ამარტივებს საინდექსო მეთოდით სოციალურ-ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების ანალიზს.

474

475